Analyse M1 MEEF **Ch. Menini**

Devoir surveillé - jeudi 14 novembre 2013

Eléments de correction

Question de cours

En rappelant les théorèmes utilisés, justifier que la fonction tan *réalise une bijection de* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbb{R}$ *et que sa bijection réciproque, notée* arctan*, est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ *pour tout réel* x*.*

Nous allons tout d'abord utiliser le théorème de la bijection, à savoir que si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors, $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur $f(I)$. De plus sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$.

La fonction tan est définie et dérivable (donc aussi continue) sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ de dérivée $\tan'=\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}=1+\tan^2$. Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x)>0$ donc la fonction tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. De plus $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$, $f(I)$ est un intervalle donc $f(I)=\mathbb{R}$.

Nous avons montré que tan bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ **sur** $\mathbb{R}$.

Remarques : Si on ne précise pas l'ensemble d'arrivée on ne peut pas savoir si l'application considérée est bijective ou non. Le fait qu'une fonction f définie et injective sur I prenne ses valeurs **dans** un ensemble J n'implique pas qu'elle réalise une bijection de I **sur** J il faut encore s'assurer que tous les élément de J ont un antécédent dans I par f.

Pour montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ nous allons utiliser le résultat sur la dérivée d'une bijection réciproque, qui nous dit que si une fonction f est continue sur l'intervalle I et réalise une bijection de I sur J, alors pour tout a de I vérifiant $f'(a)\neq 0$, f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$ et $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Nous avons déjà vu que tan est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc sa bijection réciproque arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (\arctan)'(x)=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 1

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$.

1. *Justifier que cette série converge.*

On note $u_n=\frac{1}{(n+1)3^n}$, $u_n>0$ pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}<1$ et avec la règle de d'Alembert la série converge.

On pouvait aussi utiliser que $0\le u_n\le\frac{1}{3^n}$ et que la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ converge ($|\frac{1}{3}|<1$) et par comparaison entre séries à termes positifs $\sum u_n$ converge.

2. *Quel est le rayon de convergence* R *de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\ge0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^n}$ *?*

Avec les notations précédentes la série entière s'écrit $\sum_{n\ge0}u_nx^{n+1}$ et on a vu à la question I.1. que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe et vaut $l=\frac{1}{3}$. A nouveau avec la règle de d'Alembert le rayon de convergence est $R=\frac{1}{l}=3$.

Remarque : La série convergente considérée en I.1. est la valeur de la série entière pour $x=1$, nous savons donc avant de commencer la question I.2. que la série entière a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 puisqu'il y a divergence des séries entières en tout point x tel que $|x|>R$.

3. *On note* $F(x)=\displaystyle\sum_{n\ge0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^n}$ *pour* $x\in]-R,R[$*, justifier que* F *est dérivable sur* $]-R,R[$ *et donner une expression de* F'*.*

Les séries entières sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle ouvert de convergence et la série dérivée est obtenue en dérivant terme à terme. Ainsi F est dérivable sur $]-3,3[$ et

$$\forall x\in]-3,3[\quad F'(x)=\sum_{n\ge0}(n+1)\frac{x^n}{(n+1)3^n}=\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{3^n}.$$

4. *Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $F'(x) = \frac{3}{3-x}$.*
Pour tout x de $]-3,3[$ on a $|\frac{x}{3}| < 1$ et on reconnait la somme d'une série géométrique de premier terme 1 et raison $\frac{x}{3}$, d'où

$$\forall x \in]-3,3[\quad F'(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x}.$$

Remarque : On pouvait retrouver ici que le rayon de convergence de la série entière F est 3 puisque qu'une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence et il est connu que la série géométrique de raison $\frac{x}{3}$ converge si et seulement si $|\frac{x}{3}| < 1$.

5. *Calculer $F(0)$ puis $F(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.*
$F(0) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{0^{n+1}}{(n+1)3^n} = 0$. F est **la** primitive de F' qui s'annule en 0. Les primitives sur $]-3,3[$ de la fonction $x \mapsto \frac{3}{3-x}$ sont les fonctions $x \mapsto -3\ln(3-x)+C$ avec C constante à déterminer. $F(0) = 0 = -3\ln(3-0)+C$ donc $C = 3\ln(3)$ et $F(x) = 3\ln(3) - 3\ln(3-x)$.

6. *En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)3^n} = F(1) = 3\ln(3) - 3\ln(3-1) = 3\ln(\frac{3}{2})$.

Exercice 2

1. *Soit n un entier relatif, montrer que l'intégrale généralisée*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\, dx$$

converge si et seulement si $n \geq 2$.
Pour tout entier **relatif** n, les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}$ sont définies et continues sur $[1,+\infty[$ donc intégrables sur tout intervalle $[1, X]$ avec $X \geq 1$. De plus ces fonctions sont positives sur $[1,+\infty[$, on pourra donc utiliser les théorèmes de comparaison pour conclure à la convergence ou divergence de l'intégrale.
Pour $x \geq e$, $\ln x \geq 1$ et $f_n(x) \geq \frac{1}{x^n}$. Pour $n \leq 1$ l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ diverge donc par comparaison $\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$ diverge pour $n \leq 1$.
On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ donc pour tout entier $n \geq 2$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \frac{1}{x^{n-2}} = 0.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge et $f_n(x) \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x^{3/2}}$, par comparaison $\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$ converge pour $n \geq 2$.

Remarque : On rappelle que $f \leq g$ et $\int_a^b g(x)\, dx$ divergente ne donne aucune information sur la nature de $\int_a^b f(x)\, dx$. De même $\int_a^b f(x)\, dx$ convergente ne donne aucune information sur la nature de $\int_a^b g(x)\, dx$.

2. *A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de cette intégrale pour $n \geq 2$.*
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^{n-1}}$ et $x \mapsto \ln x$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, pour tout $X > 1$ et avec une intégration par parties

$$\int_1^X \frac{1}{x^n} \ln(x)\, dx = \left[\frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}} \ln(x)\right]_1^X - \frac{1}{1-n}\int_1^X \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{1}{1-n}\frac{\ln X}{X^{n-1}} - 0 - \frac{1}{(1-n)^2}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^X$$

$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X^{n-1}} = 0$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^{n-1}} = 0$ car $n-1 > 0$ pour $n \geq 2$, d'où

$$\forall n \geq 2 \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\, dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\ln x}{x^n}\, dx = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Remarque : On conseille de faire les intégrations par parties avec les intégrales définies **puis** de passer à la limite. Sinon il faut au préalable justifier que chacune des expressions que l'on va obtenir avec l'intégration par parties converge.