Analyse M1 MEEF 2013-2014 Ch. Menini

Eléments de correction du problème 1

Partie I

I.1) Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^x - (x+1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$.
$e^x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$, $f(0) = 0$, d'où le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

f est positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant x+1.$

I.2) En appliquant le résultat précédent à $\frac{x}{2}$, pour x positif
$$e^{\frac{x}{2}} \geqslant \frac{x}{2} + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \left(e^{x/2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \Rightarrow e^x \geqslant \left(\frac{x}{2}+1\right)^2.$$
Grâce à la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x/2+1)^2}{x} = +\infty$ et par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

I.3) Pour $n=0$, on déduit de l'inégalité $e^x \geqslant x+1$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Pour $n>0$ et $x>0$ $\quad \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n \times \frac{1}{n^n}$. Avec ce qui précède $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} = +\infty$, on sait que $\lim\limits_{y\to+\infty} y^n = +\infty$ pour $n>0$, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

I.4) $x^n e^{-x} = \frac{1}{e^x/x^n}$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{y} = 0$, avec I.3 et par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier n.

Partie II

II.1) f_n est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$. Elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que pour tous $0 \leq a < b$, $\int_a^b f_n(t)\,dt$ est bien définie) et

$\forall x \geqslant 2 \quad 0 \leq x^2 \times f_n(x) \leq x^{n+2} e^{-x}$ fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
car $\frac{x^2}{2} \geqslant x$ pour $x \geqslant 2$, et $y \mapsto e^{-y}$
Avec I, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2} e^{-x} = 0$ donc $f_n(x) \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2}$.
$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, par comparaison entre fonctions positive
$\int_2^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge pour tout entier naturel n.

II.2) Soit $A > 0$, les fonctions $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et $x \mapsto x^{n+1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec une intégration par parties :

$$\int_0^A f_{n+2}(x)\,dx = \int_0^A x^{n+1} \times x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[x^{n+1} \times \left(-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\right]_0^A + \int_0^A (n+1)x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= -A^{n+1}\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + (n+1)\int_0^A x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \quad (1)$$

$\lim\limits_{A \to +\infty} A^{n+1}\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) = 0$, d'où en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1)

$$\underline{I_{n+2} = (n+1)\, I_n}.$$

II.3) (a) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$.

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est la densité de la loi normale centrée, réduite $N(0,1)$, c'est une fonction paire d'où $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{2}$.

$$\underline{I_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

(b) $\underline{I_1} = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2}\,dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A x e^{-x^2/2}\,dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A$

$$= \lim_{A \to +\infty}\left(1 - e^{-A^2/2}\right) \underline{= 1}$$

II.4) Notons pour tout entier n

$$(H_n) \begin{cases} I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} = 2^n n! \end{cases}$$

$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{(2\times 0)!}{2^0\, 0!}$ et $I_1 = 1 = 2^0 \times 0!$. (H_0) est vérifiée.

Montrons pour tout entier n ; $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

Avec II.2 et (H_n) :

$$\begin{cases} I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n} = (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n)!}{2^n n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2\times(n+1)\times(2^n n!)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!} \\ I_{2(n+1)+1} = I_{2n+1+2} = (2n+2)I_{2n+1} = 2\times(n+1)2^n n! = 2^{n+1}\times(n+1)! \end{cases}$$

soit (H_{n+1}).

On a montré que (H_0) vérifié, que pour tout entier n, $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

Donc (H_n) vérifié pour tout $\underline{n \geq 0}$.

Partie III

III.1) $f_1(0) = 0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$. $f_1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f positive. De plus par définition de f

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = I_1 = 1$. L'intégrale converge et vaut 1, $\underline{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}$

III.2) (a) X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx$ converge.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x f_1(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_2(x)\,dx = I_2$, l'intégrale converge.

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^{+\infty} x f_1(x)dx = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{(2\times 1)!}{2^1 \times 1!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = E(X)$.

(b) X admet une variance si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge.

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_3(x)\,dx = I_3 < +\infty$, l'intégrale converge.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = I_3 - I_2^2 = 2^1 \times 1! - \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

III.3) (a) $G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

f, la densité de probabilité de X, est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc $P(X \leq 0) = 0$ et $P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = P(0 \leq X \leq \sqrt{x}) = P(X \leq \sqrt{x})$. D'où

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) • Si $x < 0$, $F(x) = 0$. • Si $x \geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x f_1(t)dt$

$= \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

• Si $x \geq 0$ $G(x) = F(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$, si $x < 0$ $G(x) = 0$

Avec les expressions analytiques de F et G, elles sont déjà dérivables sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme sommes et composées de fonctions dérivables.

Etude en 0

• Pour $x > 0$ $\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1 - e^{-x^2/2}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$

d'où $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x}$. F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$

Conclusion F dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour $x > 0$ $\frac{G(x) - G(0)}{x} = \frac{1 - e^{-x/2}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$

d'où $\lim_{x \to 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{G(x) - G(0)}{x} = 0$, G n'est pas dérivable en 0.

Conclusion G dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

(c) Sur $]-\infty, 0[$, $G'(x) = 0$, sur $]0, +\infty[$ $G'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ donc Y admet pour densité de probabilité la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$. On reconnait la densité de la loi exponentielle de paramètre $1/2$.