Eléments de correction du DM n°1

Préambule

- Soit A dense dans $\mathbb{R}$ et $x<y$ deux réels arbitraires.
Par définition de A dense, il existe une suite $(a_n)_n$ de points de A telle que $\lim_n a_n = \frac{x+y}{2}$. En prenant n_0 tel que $\left|a_{n_0} - \frac{x+y}{2}\right| < \frac{y-x}{2}$ on a

$$-\frac{y-x}{2} < a_{n_0} - \frac{x+y}{2} < \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow \quad x < a_{n_0} < y$$

- Récipquement pour x réel arbitraire, en prenant $y_n = x + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ on a :

$$\exists a_n \in A \ : \ x < a_n < x + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ a_n \in A \text{ et } \lim_n a_n = x$$

Partie I

1.1 . $0 \in \alpha\mathbb{Z}$

. $(x,y) \in (\alpha\mathbb{Z})^2 \Leftrightarrow \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x = k\alpha \\ y = k'\alpha \end{cases}$

alors $x - y = (k-k')\alpha$, $k-k' \in \mathbb{Z}$ donc $x - y \in \alpha\mathbb{Z}$.

$(\alpha\mathbb{Z}, +)$ sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

1.2 $\alpha\mathbb{Z}$ est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{R}$ contenant α donc $\alpha\mathbb{Z} \subset H$. (Si on veut le démontrer, par récurrence : $\alpha\mathbb{N} \subset H$ puis par stabilité en prenant l'opposé, $\alpha\mathbb{Z} \subset H$)

1.3 $H \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in H, \ x \neq 0$.

si $x > 0$ alors $x \in K$ et $K \neq \emptyset$

si $x < 0$ alors $-x \in H$, $-x > 0$ et $K \neq \emptyset$

K est non vide, minoré par 0 donc il admet une borne inférieure a, supérieure ou égale à 0 qui est un minorant.

1.4 Supposons $a > 0$ et $a \notin K$.

Alors $0 < a < 2a$, donc par définition de la borne inférieure, il existe x dans K tel que

$$a < x < 2a \qquad (\text{cf } x \neq a \text{ car } a \notin K).$$

A nouveau il existe y dans K tel que

$$a < y < x < 2a.$$

Ainsi $0 < x - y < a$ avec x et y dans H donc $x-y$ dans H et $0 < x-y$ donc $x-y$ dans K. Contradiction avec a borne inférieure de K. Donc a est dans K si $a > 0$.

1.5 • $a \in K \subset H$ donc par 1.1 $a\mathbb{Z} \subset H$

• Soit x dans H, posons $n = E\left(\frac{x}{a}\right)$ (cf $a \neq 0$), alors.

$$n \leq \frac{x}{a} < n+1 \underset{(a>0)}{\Rightarrow} 0 \leq x - na < a$$

$x - na \in H$, $x - na$ n'est pas dans K car strictement inférieur à a, donc $x - na = 0$. et $H \subset a\mathbb{Z}$.

Conclusion $H = a\mathbb{Z}$.

1.6 a) $a = 0$ donc $a \notin K$, par définition de la borne inférieure (cf $y - x > 0$).

$$\exists h \in K : \quad 0 < h < y - x$$

b) • $\left.\begin{array}{l} h > 0 \\ h < y - x \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \frac{y}{h} - \frac{x}{h}$

$\left]\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right[$ est un intervalle de longueur strictement supérieure à 1 donc il contient nécessairement un entier ($n = E\left(\frac{x}{h}\right) + 1$ convient).

• $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{h} < n < \frac{y}{h} \\ h > 0 \end{array}\right. \Rightarrow x < nh < y$

$g = nh \in H$ convient.

c) Avec le préambule, on vient de montrer que si $a = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie 2

2.1 . $0 \in H_\theta$

. $(x,y) \in H_\theta^2 \iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2, \exists (p',q') \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x = p\theta + q \\ y = p'\theta + q' \end{cases}$

$x - y = (p-p')\theta + (q-q')$

$p - p' \in \mathbb{Z}$, $q - q' \in \mathbb{Z}$ donc $x - y \in H_\theta$

$(H_\theta, +)$ sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, il contient 1 et θ donc il contient nécessairement $\theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. C'est le plus petit sous-groupe contenant 1 et θ.

2.2 On va montrer que θ rationnel si et seulement si H_θ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, soit si et seulement si (avec la partie 1) H_θ est de la forme $a\mathbb{Z}$.

- Si θ est rationnel, $\theta = \frac{n}{m}$ avec $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $n \wedge m = 1$

$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \quad p\theta + q = \frac{1}{m}(pn + qm) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$.

D'où $H_\theta \subset \frac{1}{m}\mathbb{Z}$ et H_θ n'est pas dense.

Remarque : Avec le théorème de Bezout on peut montrer que $H_\theta = \frac{1}{m}\mathbb{Z}$

- Si $H_\theta = a\mathbb{Z}$ alors $\begin{cases} \theta = ap & p \in \mathbb{Z} \\ 1 = aq & q \in \mathbb{Z} \end{cases}$ et $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

2.3 Avec ce qui précède

- Si θ est irrationnel alors H_θ dense dans $\mathbb{R}$ et avec le préambule

$\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^2 : \quad 0 < p_n\theta + q_n < \frac{1}{n}$

et le résultat en prenant $q_n' = -q_n$

- Si on a (1) et (2) alors $a = \inf(H_\theta \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ car ou bien $p_n\theta - q_n$ est dans $H_\theta \cap \mathbb{R}_+^*$ ou bien $-p_n\theta + q_n$ est dans $H_\theta \cap \mathbb{R}_+^*$.

Et θ irrationnel avec 2.2 et 1.6.

Partie 3

3.1 $u_k = \frac{1}{k!} > 0$ $\quad \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{k+1}$, $\lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 0$, la série converge avec le critère de d'Alembert.

3.2 $p_n = n! \in \mathbb{N}$ $q_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$, d'où

$$p_n e - q_n = n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 0 \quad (1)$$

$\forall k \geq n+1$ $\quad k! \geq (n+1)!\,(n+2)^{k-n-1}$, d'où

$$0 < p_n e - q_n \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^j} \leq \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$, donc par encadrement $\lim_{n \to +\infty} (p_n e - q_n) = 0 \; (2)$

On a (1) et (2), e est irrationnel.

Partie 4 (On va montrer que $f+g$ périodique si et seulement si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$).

4.1 f continue sur $[0,T]$ fermé borné donc elle est bornée sur $[0,T]$. Par périodicité $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$ donc f bornée sur $\mathbb{R}$

4.2 a) . $0 \in P$

. $(T,T') \in P^2$, $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T-T') = f(x-T')$
$= f(x-T'+T') = f(x)$

d'où $T-T' \in P$

$(P,+)$ sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ et f périodique donc $T \neq 0$ est dans P.

b) On doit montrer que a est dans $P \cap \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire avec la partie I que $P = a\mathbb{Z}$.

c) Si P est dense dans $\mathbb{R}$. Soit x réel, alors il existe (T_n) suite d'éléments de P telle que $\lim_n T_n = x$. Par continuité de f et périodicité T_n
$f(x) = \lim_n f(T_n) = \lim_n f(0) = f(0)$. f est constante.

d) On a supposé f non constante donc P n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ et avec la partie 1, $P = a\mathbb{Z}$ où $a = \inf(P \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$

4.3 $q\alpha$ période de f, $p\beta$ période de g donc $T = q\alpha = p\beta$ période de $f+g$

4.4 a) $h(x) + k(x) = (f+g)(x+T) - (f+g)(x) = 0$

. α période de f donc de h puis de k car $k = -h$
. β ——— g ——— k ——— h ——— $h = -k$.

b) $(P,+)$ groupe contenant α et β donc il contient $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$.
$\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = \beta H_{\frac{\alpha}{\beta}}$. $\frac{\alpha}{\beta}$ irrationnel donc $H_{\alpha/\beta}$ dense dans $\mathbb{R}$ donc $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ et P aussi. Avec 4.2c, h et k constantes.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(nT) = n\,h(0) + f(0) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |h(0)| \leq \frac{2M}{n}$ où $M = \sup_{\mathbb{R}} |f| \Rightarrow h(0) = 0$

d) $h = k = 0$ donc T période de f et g donc T dans $\alpha\mathbb{Z} \cap \beta\mathbb{Z} = \{0\}$ car $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$