Devoir 1

A rendre au plus tard vendredi 15 février

Le but de ce problème est de montrer dans un premier temps que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec a réel, soit denses dans $\mathbb{R}$. On appliquera ensuite ce résultat à la caractérisation de l'irrationalité d'un réel ainsi qu'à une étude de la périodicité de fonctions continues.

Préambule

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout élément x de $\mathbb{R}$ il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

Montrer que A partie dense dans $\mathbb{R}$ équivaut à

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < y \ , \quad \exists a \in A \ : \ x < a < y.$$

Partie 1 - Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

1.1 Soit α un réel, justifier que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

1.2 Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et α un élément de H, quel lien a-t-on entre H et $\alpha\mathbb{Z}$?

Soient H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ que l'on suppose non réduit à $\{0\}$ et $K = H \cap \mathbb{R}_+^*$.

1. 3 Justifier que K admet une borne inférieure a dans $\mathbb{R}_+$.

1.4 Montrer que si a est strictement positif alors a est dans K (ind. : on pourra supposer a strictement positif et n'étant pas dans K puis en déduire une contradiction).

1.5 Montrer que si a est strictement positif alors $H = a\mathbb{Z}$.

1.6 On suppose maintenant que a est nul. Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

a. Justifier qu'il existe h dans K tel que $0 < h < y - x$.

b. En déduire qu'il existe un entier relatif n tel que $\dfrac{x}{h} < n < \dfrac{y}{h}$ puis que l'on peut trouver un élément g de H tel que $x < g < y$.

c. Conclure.

Partie 2 - Un critère d'irrationalité.

Pour tout réel θ, on note $H_\theta := \theta\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \{p\theta + q \mid (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$.

2.1 Vérifier que H_θ est le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et θ.

2.2 Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si H_θ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.3 Montrer qu'un réel θ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ p_n\theta - q_n \neq 0 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (p_n\theta - q_n) = 0 \tag{2}$$

Partie 3 - Irrationalité de e.

3.1 Justifier que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$ converge (on rapelle que sa somme est e, ceci pourra être utilisé sans justification).

3.2 En utilisant la partie 2, montrer l'irrationalité de e.

Partie 4 - Fonctions périodiques.

Dans cette partie on considèrera uniquement des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.

Soit T un réel non nul, on dit qu'une fonction f a une période T si pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.

4.1 Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4.2 Le but de cette question est de montrer qu'une fonction, f, continue sur $\mathbb{R}$, non constante et périodique admet parmi ses périodes strictement positives, une plus petite période. Pour cela on va considérer l'ensemble

$$P := \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \ f(x+T) = f(x)\}$$

a. Justifier que l'ensemble P est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.

b. Que doit-on montrer sur a la borne inférieure de $P \cap \mathbb{R}_+^*$ pour que le but de la question soit atteint ? En utilisant les résultats de la partie 1, que cela revient-il à montrer sur P ?

c. On suppose que P est dense dans $\mathbb{R}$, en utilisant la continuité de f montrer qu'alors pour tout réel x, $f(x) = f(0)$.

d. Conclure.

On considère f continue périodique de plus petite période strictement positive α et g continue périodique de plus petite période strictement positive β. On cherche à caractériser les cas où $f+g$ est périodique.

4.3 On suppose que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est rationnel, ou de façon équivalente, qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que $q\alpha = p\beta$. Montrer que $T := q\alpha = p\beta$ est une période de $f+g$.

4.4 On suppose maintenant $\dfrac{\alpha}{\beta}$ irrationnel et qu'il existe un réel T tel que pour tout réel x, $(f+g)(x+T) = (f+g)(x)$. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions h et k par $h(x) = f(x+T) - f(x)$ et $k(x) = g(x+T) - g(x)$.

a. Montrer que h et k ont à la fois α et β pour périodes (ind. : on pourra penser à considérer $h+k$).

b. En déduire que tous les éléments non nuls de $(\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z})$ sont des périodes de h et k puis que h et k sont des fonctions constantes (ind. : on pourra penser à utiliser la question 4.2).

c. En considérant la suite $(f(nT))_n$ montrer que la fonction h est la fonction nulle. Que pouvez-vous dire sur la fonction k ?

d. Déduire des questions précédentes que T est un élément de $(\alpha\mathbb{Z} \cap \beta\mathbb{Z})$ et conclure que $T = 0$.

4.5 Enoncer un résultat donnant la caractérisation de la périodicité de $f+g$.