Eléments de correction du DM2

Exercice 24 p37

1) $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité par 1 en 0. Elle est localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour $X > 1$, en intégrant par parties

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est absolument convergente donc convergente.

$\lim_{X \to +\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge $\left(\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right)$

2) On pose $u(x) = f(x)$ $\quad u'(x) = f'(x)$

$v'(x) = \sin(n+\frac{1}{2})x \quad v(x) = -\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cos(n+\frac{1}{2})x$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et

$$\int_0^\pi f(x)\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx = \left[-\frac{f(x)}{n+\frac{1}{2}}\cos(n+\tfrac{1}{2})x\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(x)\cos(n+\tfrac{1}{2})x\,dx$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left[f(0) + \int_0^\pi f'(x)\cos(n+\tfrac{1}{2})x\,dx\right]$$

$\left|\int_0^\pi f'(x)\cos(n+\frac{1}{2})x\,dx\right| \le \int_0^\pi |f'(x)|\,dx$, d'où

$\left|\int_0^\pi f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx\right| \le \frac{1}{n+1/2}\left[|f(0)| + \int_0^\pi |f'(x)|\,dx\right]$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x)\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx = 0$$

3) $x \longmapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ est continue sur $]0,\pi]$ et est prolongeable par continuité par $n+\frac{1}{2}$ en 0 donc I_n est bien définie.

b) Pour $n \geq 1$

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{2\cos(nx)\sin(\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = \left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0.$$

D'où $I_n = I_0 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

4) a) $\sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, étude en 0 :

$$f(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x} - 1\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(-\frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)$$

$\sin u \underset{0}{\sim} u \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{24} \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x}{24} + o(x)$$

On a un $DL_1(0)$ de f ce qui équivaut à dire que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{24}$. Reste à montrer que f est $\mathcal{C}^1$ en 0.

$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[-\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \cos\frac{x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[-\overline{\left(1 - \frac{x^2}{24}\right)^2}^{(2)} + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right]$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[-\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + 1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right]$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[-\frac{x^2}{24} + o(x^2)\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(-\frac{x^2}{24}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{24} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{24} = f'(0)$$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

5) D'après 2) et 4b)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,dx - I_n\right] = 0.$$

Or pour tout entier n, $I_n = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,dx$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. $(*)$

En posant $u=(n+\frac{1}{2})x$, $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u}\,du$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge, d'où avec $(*)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10 p54

a) $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(x)$ donc $X_1+\dots+X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$. les valeurs prises par $X_1+\dots+X_n$ sont les entiers k avec $0\le k\le n$, f est continue sur $[0,1]$ d'où

$$E\left(f\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(X_1+\dots+X_n=k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

b) f est continue sur $[0,1]$ compact donc elle est uniformément continue

c) $f(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ d'où

$$|f(x)-P_n(f)(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$ et avec b) $(x, \frac{k}{n} \in [0,1])$

$$\le \sum_{|x-\frac{k}{n}|<\eta} \varepsilon\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{|x-\frac{k}{n}|\ge\eta}\left(|f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{|x-\frac{k}{n}|\ge\eta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le \varepsilon + 2\|f\|_\infty\, P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-x\right|\ge\eta\right).$$

d) Inégalité de Markov (les variables aléatoires ont une variance)

$$P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-x\right|\ge\eta\right) \le \frac{1}{\eta^2} E\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-x\right|^2\right)$$

Par linéarité de l'espérance $E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{nx}{n} = x$

Les variables aléatoires étant indépendantes $V\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{n}{n^2}x(1-x) = \frac{x(1-x)}{n}$

D'où $P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-x\right|\ge\eta\right) \le \frac{1}{n}\frac{x(1-x)}{\eta^2}$

$\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon : \forall n\ge n_\varepsilon$ $\frac{1}{n}\frac{x(1-x)}{\eta^2}\le\varepsilon$ et $\forall x\in[0,1]\ |f(x)-P_n(f)(x)|\le 2\varepsilon$