Devoir surveillé - vendredi 22 mars 2013
Durée 3h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée.

Exercice 1

1. Vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2+x}$.
2. Justifier que l'on définit une suite $(u_n)_n$ de réels appartenant au segment $[0, 1]$ par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout entier n

$$|u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1)| \leq \frac{1}{4} |u_n - (\sqrt{2} - 1)|$$

puis que $|u_n - (\sqrt{2} - 1)| \leq \frac{1}{4^n}$.

4.

- a) Justifier que pour tout entier n , u_n est un rationnel.
- b) Quel résultat vient-on d'obtenir avec ce qui précède?
5. Montrer que la suite $(u_{2n})_n$ est croissante et que la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.
6. Dédurre de ce qui précède un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ par des rationnels.

Exercice 2

Dans cet exercice on va supposer connue la fonction $\exp$, elle est définie comme solution de l'équation fonctionnelle $f' = f$ et $f(0) = 1$, il en découle en particulier que cette fonction est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$. On pourra aussi utiliser sans la justifier la notation $e^x = \exp(x)$. En revanche on ne suppose pas connue la fonction logarithme népérien.

a désigne un réel strictement positif et on considère les suites $(f_a(n))_n$ et $(\varphi_a(n))_n$ définies par

$$f_a(n) = \int_0^a t^n e^{-t} dt \quad \varphi_a(n) = e^a \left(1 - \frac{f_a(n)}{n!} \right).$$

On se propose dans les questions ci-dessous de montrer de façon élémentaire que $\varphi_a(n) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$ et que la suite $(\varphi_a(n))_n$ converge vers e^a .

1. Soit n un entier naturel
 - a) Calculer $f_a(0)$ et $\varphi_a(0)$.
 - b) Exprimer $f_a(n+1)$ en fonction de $f_a(n)$.
 - c) En déduire une expression de $\varphi_a(n+1)$ en fonction de $\varphi_a(n)$, puis que $\varphi_a(n) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\frac{a^{n+1}}{e^a(n+1)} \leq f_a(n) \leq \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite $(\frac{a^n}{n!})_n$.
4. En déduire que la suite $(\varphi_a(n))_n$ converge vers e^a .
5. Quelles adaptations faudrait-il apporter au travail précédent pour avoir le résultat de convergence ci-dessus pour tout réel a ?
6. (*bonus*) En utilisant des résultats post-bac comment pourriez-vous montrer directement que pour tout entier n et tout réel a

$$e^a = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} + \frac{e^a}{n!} \int_0^a t^n e^{-t} dt ?$$

Problème**Partie I**

On note H l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant la relation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{1}$$

- I.1 Justifier que l'ensemble H n'est pas vide.
- I.2 Soit φ un élément de H .
 - a) Montrer que $\varphi(0) = 0$ et que φ est impaire.

b) Etablir que pour tout n entier naturel non nul et toute partie finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}$, on a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i).$$

c) Montrer que pour tout p de $\mathbb{N}$ et tout q de $\mathbb{N}^*$

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1)$$

puis pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\varphi(r) = r\varphi(1)$.

I.3 Montrer que si φ est un élément de H continue sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x , $\varphi(x) = x\varphi(1)$.

I.4 Soit φ un élément de H , montrer que si φ est continue en un point a de $\mathbb{R}$ alors φ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.5 Montrer que l'on a la même conclusion qu'à la question I.3 si on ne sait pas que φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais que l'on suppose φ dans H et monotone sur $\mathbb{R}$.

Partie II

On note $\tanh$ la fonction tangente hyperbolique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

II.1 Justifier que l'on a aussi pour tout réel x

$$\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

II.2 Montrer que $\tanh$ réalise une bijection bi-continue de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

II.3 Justifier que pour tout réel b appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$, il existe un unique réel a tel que $\tanh(a) = b$. Montrer de plus que

$$a = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right).$$

Partie III

On se propose d'étudier les fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui satisfont à la relation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} \quad (2)$$

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont la relation (2).

III.1 Montrer qu'il existe des fonctions constantes appartenant à E et les préciser.

III.2 Montrer que la fonction $\tanh$ est un élément de E puis que pour tout φ de H , $\tanh \circ \varphi$ est encore un élément de E .

Dans la suite on considère une fonction f élément de E .

III.3

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq 1$ (ind. on pourra commencer par exprimer $f(x)$ en fonction de $f(x/2)$).

b) Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors la fonction f est nécessairement la fonction constante (on précisera les valeurs possibles).

III.4 On suppose désormais que $f(0) = 0$.

a) Montrer qu'alors f est impaire et que l'on a $|f(x)| < 1$ pour tout réel x .

b) Justifier que l'on peut alors définir une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) \quad (3)$$

et que de plus g est un élément de H .

III.4 On suppose que f est un élément de E tel que $f(0) = 0$ et que de plus f est continue en 0. On définit la fonction g comme en (3).

a) Montrer que g est continue en 0.

b) On pose $k = g(1)$, montrer que pour tout réel x , $f(x) = \tanh(kx)$.

III.5 On suppose que f est un élément de E tel que $f(0) = 0$ et que de plus f est monotone sur $\mathbb{R}$. Que pouvez-vous en conclure ?