Eléments de correction du DS - vendredi 22 mars 2013

Exercice 1
1. Immédiat car $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$.
2. Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{1}{2+x}$. Cette fonction est décroissante sur $[0,1]$; $f(0)=1/2$, $f(1)=1/3$ donc $f([0,1])\subset[0,1]$, la suite est bien définie.
3. Avec la question 1. $f(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$, f' est continue donc bornée sur $[0,1]$ et avec l'inégalité des accroissements finis

$$|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)|=|f(u_n)-f(\sqrt{2}-1)|\leq\sup_{[0,1]}|f'|\,|u_n-(\sqrt{2}-1)|.$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, $f'(x)=-\frac{1}{(2+x)^2}$ et $\sup\limits_{[0,1]}|f'|=1/4$ d'où la première inégalité demandée.
Rem : on peut aussi calculer $|f(u_n)-f(\sqrt{2}-1)|=\left|\frac{1}{2+u_n}-\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\right|=\left|\frac{(\sqrt{2}-1)-u_n}{(2+u_n)(2+(\sqrt{2}-1))}\right|$ *et terminer en remarquant que pour tout entier n, $(2+u_n)(2+(\sqrt{2}-1))\geq 4$.*
Montrons par récurrence l'assertion (H_n) : $|u_n-(\sqrt{2}-1)|\leq\frac{1}{4^n}$.
(H_0) est vérifié car $|0-(\sqrt{2}-1)|\leq 1$.
Montrons que pour tout entier n, $[(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})]$. Avec la première inégalité

$$|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)|\leq\frac{1}{4}|u_n-(\sqrt{2}-1)|$$

puis avec (H_n), $|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)|\leq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^n}\leq\frac{1}{4^{n+1}}$, soit (H_{n+1}).
(H_0) est vrai, pour tout entier n, $[(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})]$, donc (H_n) est vrai pour tout entier n.
4. a) Si u_n est rationnel alors il existe (p,q) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $u_n=\frac{p}{q}$ et $u_{n+1}=\frac{q}{2q+p}$ est rationnel. u_0 est rationnel, on termine par récurrence.
Rem : on a bien détaillé la précédente récurrence qui était elle aussi assez évidente, on se permet donc dans cette question de "l'escamoter" un peu par soucis d'efficacité.
b) $0<\frac{1}{4}<1$ donc la suite géométrique $\left(\frac{1}{4^n}\right)_n$ converge vers 0 ; la suite (u_n) qui est une suite de rationnels, converge vers $\sqrt{2}-1$ qui est irrationnel.
5. La suite $(u_{2n})_n$ est définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{2n+2}=f\circ f(u_{2n})\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

La fonction $f\circ f$ est croissante (composée de deux fonctions décroissantes) sur $[0,1]$, donc la suite $(u_{2n})_n$ est monotone. $u_0=0$, $u_2=2/5$, $u_2\geq u_0$ et avec les résultats sur les suites récurrentes la suite $(u_{2n})_n$ est croissante. De la même façon puisque $u_3-u_1=5/12-1/2$ est négatif, la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.
6. Les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont extraites de la suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\sqrt{2}-1$, elles convergent donc aussi vers la même limite. De plus par monotonie des deux suites on a pour tout entier n

$$u_{2n}\leq\sqrt{2}-1\leq u_{2n+1}.$$

Il suffit donc de trouver un entier p tel que $u_{2p+1}-u_{2p}\leq 10^{-3}$ ou encore un entier n à partir duquel $|u_n-(\sqrt{2}-1)|\leq\frac{1}{2}10^{-3}$. Pour cela il suffit que $4^n\geq 2000$ et $n\geq 5$ convient.
Un encadrement d'amplitude inférieur à 10^{-3} est $1+u_6\leq\sqrt{2}\leq 1+u_5$ soit $\frac{239}{169}\leq\sqrt{2}\leq\frac{99}{70}$.
Un petit algorithme où l'on teste le premier p satisfaisant $u_{2p+1}-u_{2p}\leq 10^{-3}$ nous donne $p=2$ et $\frac{41}{29}\leq\sqrt{2}\leq\frac{99}{70}$.

Exercice 2
1. a) $f_a(0)=\int_0^a e^{-t}\,dt=1-e^{-a}$ et $\varphi_a(0)=1$.
b) Les fonctions puissances et exponentielle sont continument dérivables, en intégrant par parties

$$f_a(n+1)=\left[t^{n+1}(-e^{-t})\right]_0^a+(n+1)\int_0^a t^n e^{-t}\,dt=-a^{n+1}e^{-a}+(n+1)f_a(n).$$

c) Avec la question précédente

$$\varphi_a(n+1)=e^a\left(1+\frac{a^{n+1}e^{-a}}{(n+1)!}-\frac{f_a(n)}{n!}\right)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\varphi_a(n).$$

On obtient que pour tout entier non nul k, $\varphi_a(k) - \varphi_a(k-1) = \frac{a^k}{k!}$ et en sommant de 1 à n

$$\varphi_a(n) - \varphi_a(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

soit le résultat avec $\varphi_a(0) = 1$.
2. Sur $[0, a]$ la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante, t^n est positif d'où

$$e^{-a}t^n \leq t^n e^{-t} \leq t^n$$

et par positivité de l'intégrale

$$\int_0^a e^{-a}t^n\, dt \leq f_a(n) \leq \int_0^a t^n\, dt \Leftrightarrow \frac{a^{n+1}}{e^a(n+1)} \leq f_a(n) \leq \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

3. Notons $u_n = \frac{a^n}{n!}$, cette suite est à termes strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$, la limite du rapport existe et vaut 0 donc la suite (u_n) converge vers 0.
Rappel : on peut en déduire un résultat plus fort, à savoir la convergence de la série de terme général u_n.
4.
$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ et grâce à l'encadrement obtenu en question 2., nous avons que $\lim_n \frac{f_a(n)}{n!} = 0$ avec le théorème dit "des gendarmes". Il en découle que $\lim_n \varphi_a(n) = e^a$.
5.
Pour $a \leq 0$ on définira de même, f_a et φ_a. Pour $a = 0$, la suite $(\varphi_0(n))$ est constante et vaut 1, c'est terminé. Pour $a < 0$ on obtiendra les mêmes résultats qu'à la question 1. toujours avec une intégration par parties.
Le seul point pour lequel il faut être plus attentif est l'encadrement de $f_a(n)$ puisque t^n peut être positif ou négatif sur $[a, 0]]$ selon la parité de n et $a < 0$. Pour cela on écrit

$$f_a(n) = -(-1)^n \int_a^0 (-t)^n e^{-t}\, dt$$

et puisque $a < 0$ et $-t \geq 0$ sur $[0, a]$ on a que

$$|f_a(n)| = \int_a^0 (-t)^n e^{-t}\, dt$$

ce qui comme précédemment permet d'avoir l'encadrement

$$\frac{(-a)^{n+1}}{n+1} \leq |f_a(n)| \leq \frac{(-a)^{n+1}}{n+1} e^{-a}.$$

Puis on termine de même que pour $a > 0$.
6. En remarquant que (avec le changement de variable $u = a - t$)

$$\frac{e^a}{n!} \int_0^a t^n e^{-t}\, dt = \int_0^a \frac{t^n}{n!} e^{a-t}\, dt = \int_0^a \frac{(a-u)^n}{n!} e^u\, du$$

on reconnait la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.
Rem : cette formule se montrant par récurrence et grâce à une intégration par parties, rien de bien surprenant dans la méthode de démonstration élémentaire de l'égalité.

Problème
Partie I
I.1 La fonction nulle est dans H.
I.2 a) En prenant $x = y = 0$ on a $\varphi(0) = 2\varphi(0)$ soit $\varphi(0) = 0$. Les fonctions de H sont définies sur $\mathbb{R}$, puis en prenant $y = -x$ on a $\varphi(0) = 0 = \varphi(x) + \varphi(-x)$, φ est impaire.
b) On note (H_n) l'assertion : pour toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{R}$, $\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)$. (H_1) est vérifiée, montrons que pour tout entier non nul n, (H_n) implique (H_{n+1}). Soit $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ une partie de $\mathbb{R}$, en prenant $x = \sum_{i=1}^n x_i$ et $y = x_{n+1}$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \varphi(x_{n+1})$$

et avec (H_n)

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(x_i)$$

soit (H_{n+1}).
L'égalité est vérifiée pour tout entier n non nul.
c) Si $p=0$ c'est immédiat. Si p est un entier non nul, en prenant pour $1 \leq i \leq p$, $x_i = \frac{1}{q}$ et avec l'égalité obtenue au b) on a

$$\varphi(\frac{p}{q}) = p\varphi(\frac{1}{q}).$$

Ce qui donne en particulier pour $p=q$, $\varphi(1) = q\varphi(\frac{1}{q})$ et avec l'égalité précédente $\varphi(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}\varphi(1)$.
L'égalité pour les rationnels négatifs découle du fait que φ est impaire.
I.3 Nous avons déjà l'égalité pour les rationnels. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, pour tout réel x, on peut trouver une suite de rationnels (r_n) qui converge vers x. Pour tout entier n, $\varphi(r_n) = r_n\varphi(1)$ et par continuité de φ en x

$$\varphi(x) = \lim_n \varphi(r_n) = \lim_n r_n\varphi(1) = x\varphi(1).$$

I.4 Soit x_0 et h deux réels arbitraires alors

$$\varphi(x_0+h) = \varphi(a+h+(x_0-a)) = \varphi(a+h) + \varphi(x_0-a).$$

φ étant continue en a, $\varphi(x_0+h)$ admet une limite lorsque h tend vers 0 et

$$\lim_{h\to 0} \varphi(x_0+h) = \lim_{h\to 0} \varphi(a+h) + \varphi(x_0-a) = \varphi(a) + \varphi(x_0-a) = \varphi(x_0).$$

φ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ donc est continue sur $\mathbb{R}$.
I.5 Quitte à changer φ en $-\varphi$ on peut supposer la fonction croissante.
Soit un réel x arbitraire et considérons les ensembles

$$E = \{\varphi(r) \mid r \in \mathbb{Q}\cap]-\infty, x]\}, \quad F = \{\varphi(r) \mid r \in \mathbb{Q} \cap [x, +\infty[\}.$$

φ étant croissante, E est non vide et majoré par $\varphi(x)$, F est non vide et minoré par $\varphi(x)$, d'où

$$\sup E \leq \varphi(x) \leq \inf F.$$

Mais puisque l'on a aussi, grâce à l'égalité obtenue en I.2.c,

$$E = \{r\varphi(1) \mid r \in \mathbb{Q}\cap]-\infty, x]\}$$

en utilisant à nouveau la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\sup E = x\varphi(1)$ (par croissance de φ, $\varphi(1) \geq 0$) et de même $\inf F = x\varphi(1)$. Ce qui permet à nouveau d'en déduire que pour tout réel x, $\varphi(x) = x\varphi(1)$.
Partie II
II.1

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)}.$$

II.2 La fonction tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tanh'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. tanh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection bi-continue sur $\mathbb{R}$ sur $I = f(\mathbb{R})$ (ici on a même un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).
$\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$ d'où $I =]-1, 1[$.
II.3 L'existence et l'unicité de a découlent du fait que tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
Pour trouver a, il peut résoudre l'équation

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} = b \Leftrightarrow e^{2a}(1-b) = 1+b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

ou puisque la solution est donnée, vérifier directement que $\tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)\right] = b$.
Partie III
III.1 Si $f \equiv c$ alors nécessairement $c = \frac{2c}{1+c^2}$ soit $c(c^2-1) = 0$. On vérifie que les fonctions constantes égales à 0, 1 ou -1 conviennent.
III.2 Commençons par remarquer que tanh est défini sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ donc elle vérifie bien pour tout réels x et y, $\tanh(x)\tanh(y) \neq -1$. De plus pour tout réels x et y

$$\frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)} = \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y}) + (e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})}{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y}) + (e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})} = \frac{2(e^{x+y}-e^{-x-y})}{2(e^{x+y}+e^{-x-y})} = \tan(x+y)$$

$\tanh \circ \varphi$ est encore un élément de E découle immédiatement du fait que tan est dans E et que $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$.

III.3 a) Puisque f est dans E, $f(x) = \frac{2f(x/2)}{1+f^2(x/2)}$. Pour tout réel α, $|2\alpha| \leq 1+\alpha^2$ d'où $|f(x)| \leq 1$.
b) En prenant $x = y = 0$, si $f(0) \neq 0$ on obtient comme en III.1. que $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.
Si $f(0) = 1$ alors pour tout réel x, $f(x) = f(x+0) = \frac{f(x)+1}{1+f(x)} = 1$, f est la fonction constante égale à 1.
Si $f(0) = -1$ alors pour tout réel x, $f(x) = f(x+0) = \frac{f(x)-1}{1-f(x)} = -1$, f est la fonction constante égale à -1.

III.4 a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et en prenant $y = -x$, on a $0 = \dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}$, f est impaire.
On sait déjà que $|f(x)| \leq 1$, s'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 1$ alors $f(-x_0) = -1$ et $f(x_0)f(-x_0) = -1$ ce qui est exclu car f est dans E. De même il n'existe pas de réel x_0 tel que $f(x_0) = -1$. On en conclue que $|f| < 1$.
b) La fonction h définie sur $]-1,1[$ par $h(t) = \frac{1+t}{1-t}$ est croissante et à valeurs dans $]0,+\infty[$, $g = \frac{1}{2}\ln \circ h \circ f$ est bien définie car d'après a) f est à valeurs dans $]1,1[$. De plus pour tous réels x et y

$$g(x+y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)f(y)+f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)-f(x)-f(y)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+f(x))(1+f(y))}{(1-f(x))(1-f(y))}\right) = g(x)+g(y).$$

III.4 a) On a remarqué que $g = \frac{1}{2}\ln \circ h \circ f$, la fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction h est continue sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$, la fonction f est continue en 0 et à valeurs dans $]-1,1[$ donc par composition g est continue en 0.
b) g étant dans H et continue en 0, d'après la partie II, g est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g(x) = xg(1) = kx$. Avec II.3, kx est l'unique solution de $\tanh(kx) = f(x)$ d'où le résultat.

III.5 Les fonction ln et h étant croissantes on a par composition que g est monotone sur $\mathbb{R}$, g est dans H donc avec I.5, $g(x) = kx$ et l'on conclue de même que pour tout réel x, $f(x) = \tanh(kx)$.