Analyse M1 ENSM **Ch. Menini**

Examen - jeudi 2 mai 2013

Durée 4h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée.

Exercice

On note $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On note $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$, on rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$. On définit sur $\mathcal{C}([0,1])$ les applications T et T_n ($n \in \mathbb{N}^*$) par

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt, \quad T_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

1-a. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ arbitraire donnée, justifier que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \ : \ \forall (x,y) \in [0,1]^2 \ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

1-b. Démontrer que la suite $(T_n(f))_n$ converge vers $T(f)$.

2. Justifier rapidement que pour tout entier non nul n, les applications T_n et T sont linéaires sur $\mathcal{C}([0,1])$.

Rappel : si L est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1])$, on note $\|L\| := \sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} (|L(f)|)$.

3-a. Montrer que pour tout entier non nul n, T_n est continue et $\|T_n\| = 1$.

3-b. Montrer que T est continue et $\|T\| = 1$.

4-a. Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = \cos(2\pi n t)$. Calculer $T_n(f_n)$ et $T(f_n)$.

4-b. Que peut-on en déduire pour $\|T_n - T\|$?

Problème 1 - Suite de Fibonacci

Préliminaire

1-a. Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On notera ϕ la solution positive et ψ la solution négative de cette équation.

1-b. Justifier que $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, $\psi = 1 + \dfrac{1}{\psi}$ et que $\phi = -\dfrac{1}{\psi}$.

Ce problème est autour de la suite de Fibonacci (F_n) définie par

$$\begin{cases} F_0 = 1 \quad \text{et} \quad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

2-a. Sans déterminer son expression générale montrer que la suite (F_n) est croissante.

2-b. Toujours sans déterminer son expression générale, montrer que $\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

Partie I - Expression de F_n en fonction de n

1-a. Sans les calculer justifier qu'il existe deux réels uniques a et b tels que

$$\begin{cases} F_0 = a\phi^0 + b\psi^0 = a + b \\ F_1 = a\phi^1 + b\psi^1 = a\phi + b\psi \end{cases}$$

1-b. Montrer que $a = \dfrac{\phi}{\sqrt{5}}$ et $b = -\dfrac{\psi}{\sqrt{5}}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})$.

On va demander de traiter les parties suivantes sans les résultats de la partie I, lorsque ceux-ci seront nécessaires alors ce sera indiqué explicitement.

Partie II - Une suite convergeant vers ϕ

On suppose que seuls les résultats de la partie préliminaire sont connus.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ pour tout entier n.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
2. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
2-a. Justifier que $f([1,2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$.
2-b. Déterminer $k = \sup\{|f'(x)| \mid x \in [\frac{3}{2}, 2]\}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$.
4. Montrer que pour tout entier n, $|u_n - \phi| \leq k^n$.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
6. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant l'expression de F_n trouvée dans la partie I.

Partie III - ϕ comme somme d'une série

A nouveau on ne suppose pas connus les résultats de la partie I.

On considère la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$ et on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$ la somme partielle de cette série.

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$ converge.
2-a. Montrer que pour tout entier k on a $F_{k+2}^2 - F_{k+1}F_{k+3} = F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2$.
2-b. En déduire que pour tout entier k on a $F_{k+1}^2 - F_k F_{k+2} = (-1)^{k+1}$.
2-c. Conclure que pour tout entier k on a $\dfrac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}} = u_{k+1} - u_k$, où u_k est le terme général de la suite définie dans la partie II.
3. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que l'on retrouve que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$ converge et que de plus

$$\phi = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}.$$

Partie IV - Série génératrice

On considère la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$.

1. Calculer le rayon de convergence de cette série.
2-a. Pour x réel, $|x| < \dfrac{1}{\phi}$ on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 f(x) + x\,(f(x) - 1)$.
2-b. En déduire que pour x réel, $|x| < \dfrac{1}{\phi}$ on a

$$f(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

3. Expliquer comment à partir de cette égalité on peut retrouver l'expression de F_n en fonction de n.

Partie V - Série génératrice exponentielle

On considère la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{F_n}{n!} x^n$.

1. Calculer le rayon de convergence de cette série.
2-a. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{F_n}{n!} x^n$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'' - y' - y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

2-b. Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire que pour tout réel x on a

$$g(x) = \frac{1}{\phi - \psi}(\phi e^{\phi x} - \psi e^{\psi x}).$$

3. Expliquer à nouveau comment à partir de cette égalité on peut retrouver l'expression de F_n en fonction de n.

Problème 2 - Transformée de Laplace
Lorsque cela a un sens, on note $\mathcal{L}(f)(r) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-rt}\,dt$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que

$$\exists r \in \mathbb{R} \ : \ \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}\,dt \text{ converge.}$$

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-r_0 t}\,dt$ converge alors

$$\forall r \geq r_0 \ \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}\,dt \text{ converge.}$$

On note I_f l'ensemble des réels r tels que $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}\,dt$ converge. Ce qui précède nous permet de dire que pour f dans $\mathcal{F}$, I_f est un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ (avec α réel ou $\alpha = -\infty$).
2-a. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = e^{at}$. Pour T réel strictement positif et r réel, calculer $\int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$.
2-b. En déduire que $I_f =]a, +\infty[$ et que de plus pour tout r de $]a, +\infty[$, $\mathcal{L}(f)(r) = \frac{1}{r-a}$.
3. Soit a un réel, h un élément de $\mathcal{F}$ et g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = h(t)e^{at}$. Justifier brièvement que g est dans $\mathcal{F}$, $I_g = a + I_h = \{r + a \mid r \in I_h\}$ et que pour tout r de I_g, $\mathcal{L}(g)(r) = \mathcal{L}(h)(r - a)$.
4. Soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(t) = t^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_{f_n} =]0, +\infty[$.
5 Donner un exemple de fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $I_f = [0, +\infty[$. Le justifier.
6. Donner une fonction f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $I_f = \mathbb{R}$. Le justifier.
7. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $r \in I_f$, on suppose de plus que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-rt} = 0$. Montrer qu'alors

$$\mathcal{L}(f')(r) = -f(0) + r\mathcal{L}(f)(r).$$

On pourra pour cela commencer par exprimer $\int_0^T f'(t)e^{-rt}\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
8-a. Soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(t) = t^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout r de $]0, +\infty[$ et tout entier naturel n

$$(n + 1)\mathcal{L}(f_n)(r) = r\mathcal{L}(f_{n+1})(r).$$

8-b. En déduire que pour tout r de $]0, +\infty[$ et tout entier naturel n, $\mathcal{L}(f_n)(r) = \frac{n!}{r^{n+1}}$.
On rappelle le résultat suivant

Théorème 0.1 (Continuité d'une intégrale à paramètre) *Soit h une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times [0, +\infty[$ où A est une partie de $\mathbb{R}$, on suppose que*

1. *pour tout t de $[0, +\infty[$, l'application $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur A,*
2. *pour tout x de A, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$,*
3. *il existe φ continue sur $[0, +\infty[$, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que pour tout x de A, pour tout t de $[0, +\infty[$, $|h(x, t)| \leq \varphi(t)$.*

Alors pour tout x de A, $h(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'application

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} h(x, t)\,dt$$

est continue sur A.

9-a. Soient f un élément de $\mathcal{F}$ et $r_0 \in I_f$, démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[r_0, +\infty[$.
9-b. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur I_f.