Analyse M1 ENSM

Ch. Menini

10 janvier 2013

Table des matières

Chapitre 1

Suites et séries numériques

Rappelons au préalable une propriété de $\mathbb{R}$ qui est capitale pour ce chapitre :
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

1.1 Premiers résultats sur les suites numériques

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 (Suite d'éléments de $\mathbb{K}$) *Une suite de $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{K} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Une suite de $\mathbb{K}$ définie à partir du rang n_0 est une application de $\mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, on la note $(u_n)_{n\geq n_0}$.
L'ensemble des suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 1.1.2 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Définition 1.1.3 *Une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ est dite*
– **majorée**, *s'il existe un réel M tel que pour tout entier n, $u_n \leq M$*
– **minorée**, *s'il existe un réel m tel que pour tout entier n, $u_n \geq m$*
– **bornée**, *lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.*
Une suite (z_n) de $\mathbb{C}$ est dite **bornée** *si la suite de réels $(|z_n|)$ est bornée.*
L'ensemble des suites réelles (resp. complexes) bornées est noté $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{C})$).

Proposition 1.1.4 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
$\mathcal{B}(\mathbb{C})$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.5 *Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$* **converge vers** *$a \in \mathbb{K}$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ |u_n - a| \leq \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_n u_n = a$.
Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite **convergente** *s'il existe un élément a de $\mathbb{K}$ tel que (u_n) converge vers a.*
Une suite non convergente est dite **divergente**.

$|\cdot|$ désigne ici la valeur absolue lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.6 *Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite* **de Cauchy** *si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geq n_\epsilon\ p \geq n_\epsilon \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \epsilon.$$

Augustin Cauchy, 1789-1857.

Proposition 1.1.7 *1. Toute suite convergente est de Cauchy.*

2. Par construction de $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est convergente.

Proposition 1.1.8 *(u_n) converge vers a si et seulement si $(u_n - a)$ converge vers 0.*
Si une suite converge vers a et a' alors $a = a'$.
Toute suite convergente est bornée.

Exercice 1
Enoncer et redémontrer les résultats concernant les opérations algébriques sur les limites. Vérifier qu'un suite complexe (z_n) converge si et seulement si les deux suites réelles $(Re(z_n))$ et $(Im(z_n))$ convergent.

Proposition 1.1.9
1. *Passage à la limite et relation d'ordre : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers a et a', si de plus il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n$ alors $a \leq a'$.*
2. *Encadrement : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles qu'il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si on suppose de plus que (u_n) et (w_n) convergent vers la* **même limite** *a, alors (v_n) converge vers a.*
3. *Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

Démonstration : à faire. Pour le (1) donner aussi un exemple où $a = a'$ et $u_n < v_n$ pour tout n.

Définition 1.1.10 *Soit (u_n) une suite et φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors la suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée* **suite extraite** *de la suite (u_n).*
l est dite ***valeur d'adhérence*** *de la suite $u = (u_n)$ s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l.*

Proposition 1.1.11 *Si la suite (u_n) converge vers a alors toute suite extraite de (u_n) converge vers a.*

Démonstration : à faire.

1.2 Suites monotones et conséquences

Dans cette partie les suites considérées sont **réelles**.

Définition 1.2.1 *La suite (u_n) est dite*
- **croissante** *si pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$,*
- **strictement croissante** *si pour tout entier n, $u_n < u_{n+1}$,*
- **décroissante** *si pour tout entier n, $u_n \geq u_{n+1}$,*
- **strictement décroissante** *si pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$,*
- **monotone** *si elle est croissante ou décroissante,*
- **strictement monotone** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Théorème 1.2.2 (Limite monotone) *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démonstration : à faire.
Exercice 2
Montrer qu'une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

Définition 1.2.3 (Suites adjacentes) *les suites (u_n) et (v_n) sont dites* **adjacentes** *si*
(i) la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante
(ii) la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0

Théorème 1.2.4 *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.*

Démonstration : à faire. En reprenant les notations de la définition des suites adjacentes, on pourra commencer par montrer que pour tout entier n, $u_n \leq v_n$ puis conclure grâce au théorème 1.2.2.

Exercice 3
Le fait que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure nous a permis d'établir le théorème de Limite monotone puis celui de convergence des suites adjacentes. Montrer que si l'on admet le résultat de convergence des suites adjacentes alors on peut en déduire que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (penser à la dichotomie).
Exercice 4
On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Montrer que ces suites sont adjacentes puis en déduire une démonstration de l'irrationalité de e.

Théorème 1.2.5 (Segments emboités) *Soit (S_n) une suite de segments $S_n = [a_n, b_n]$ que l'on suppose emboités ($S_{n+1} \subset S_n$).*
Alors leur intersection $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ est non vide.
De plus si la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0, l'intersection S est réduite à un point.

Démonstration : à faire en s'inspirant de la démonstration du résultat sur les suites adjacentes.

Théorème 1.2.6 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : On note $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite.
Si E est fini montrer que l'on peut construire une sous-suite de (u_n) qui est constante.
Si E est infini construire une suite de segments emboités contenant une infinité d'éléments de E (penser à la dichotomie).
Exercice 5
Ce résultat a t-il un analogue pour les suites complexes ?

1.3 Exemples de référence

1.3.1 Comparaison

Proposition 1.3.1 *Soit (u_n) une suite de réels* **strictement positifs**, *s'il existe $r \in]0,1[$ tel que pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$ alors la suite (u_n) converge vers 0.*

Démonstration : A faire, pour cela comparer la suite (u_n) avec la suite géométrique (r^n).
Exercice 6
Toujours avec une suite (u_n) de réels strictement positifs, a-t-on la même conclusion si la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers $l \in [0,1[$?
Se servir de ce résultat pour comparer les suites de références (a^n), (n^α), $(n!)$, (n^n), $((\ln n)^\beta)$.

1.3.2 Suites arithmético-géométrique

Proposition 1.3.2 *Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b,$$

a et b étant des complexes arbitraires fixés, $(a,b) \neq (0,0)$.
Alors si

1. *$a = 1$, la suite est arithmétique de raison b et $u_n = u_0 + nb$.*
2. *$b = 0$, la suite est géométrique de raison a et $u_n = u_0 a^n$.*
3. *$(a,b) \neq (1,0)$, la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.*

Démonstration : à faire.
Que représente le complexe $l = \frac{b}{1-a}$ pour la fonction f définie par $f(x) = ax + b$?

1.3.3 Suites homographiques

Proposition 1.3.3 *Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ et (u_n) la suite homographique définie par*

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

avec u_0 choisi de sorte la suite soit bien définie. Alors si l'équation $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ admet
– deux solutions distinctes α et β, la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est géométrique,
– une unique solution α, la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$ est arithmétique.

Démonstration : à faire.
Exercice 7
Si $c = 0$ quel type de suite a t-on ?
Si $c \neq 0$ et $ad - bc = 0$ quel type de suite a t-on ?
Déterminer les conditions sur u_0 pour que la suite (u_n) soit bien définie, on distinguera les mêmes deux cas que dans la proposition ci-dessus (ind. si $u_k = -\frac{d}{c}$ que vaut alors v_k ?).

1.3.4 Suites récurrentes réelles

Proposition 1.3.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et telle que $f(I) \subset I$, soit $a \in I$. La suite (u_n) définie par*

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & = & a \end{cases}$$

est définie par récurrence.
Si f est croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone, croissante si $f(u_0) \geq u_0$, décroissante si $f(u_0) \leq u_0$.
Si f est décroissante sur I alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une est croissante et l'autre est décroissante.
De plus si f est continue sur I et si (u_n) converge vers $l \in I$ alors $f(l) = l$.

Démonstration : à faire, par récurrence.
Exercice 8 (Suite de Héron d'Alexandrie, 1e siècle av JC)
f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ et (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Justifier que la suite est bien définie par récurrence puis l'étudier (monotonie et limite éventuelle).

1.3.5 Méthode de Newton

Proposition 1.3.5 *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$ et vérifiant :*

1. *$f(a)f(b) < 0$,*
2. *f' ne s'annule pas sur $[a, b]$,*
3. *f'' ne s'annule pas sur $[a, b]$.*

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r sur $[a, b]$ et de plus r est la limite de la suite récurrente définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et
$x_0 = a$ si f est décroissante et convexe ou si f est croissante et concave,
$x_0 = b$ si f est croissante et convexe ou si f est décroissante et concave.

Isaac Newton, 1642-1727.
Démonstration : Justifier que l'on ne peut avoir que l'un des 4 cas :
f est décroissante et convexe ou f est croissante et concave ou f est croissante et convexe ou f est décroissante et concave.
Justifier l'existence et l'unicité de la racine.
Pour le reste de la démonstration se placer dans le cas f croissante et convexe et $x_0 = b$. On note g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, avec ces notations $x_{n+1} = g(x_n)$.
Pour comprendre le principe de construction de la suite (x_n), commencer par déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(x_n, f(x_n))$ puis en déduire une construction géométrique du point de coordonnées $(x_{n+1}, 0)$.
Montrer que $g([r, b]) \subset [r, b]$ puis que la suite (x_n) est décroissante et minorée par r.
Conclure.
Exercice 9
On peut compléter ce résultat et s'intéresser à la vitesse de convergence de la suite construite par la méthode de Newton.
a) Montrer que $\lim\limits_{n} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|} = 0$.
b) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[r, x_n]$ puis en déduire que $\lim\limits_{n} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = \frac{1}{2} \frac{f^{(2)}(r)}{f'(r)}$.
Exercice 10
Quelle suite obtenez-vous si vous appliquez la méthode de Newton pour le calcul approché de la solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $x^2 - 2 = 0$?

1.3.6 Suites récurrentes linéaires

Proposition 1.3.6 *Soit p un entier non nul et $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des complexes. L'ensemble E_p des suites complexes (u_n) telles que pour tout entier n*

$$u_{n+p} + a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension p.

On dit que (u_n) est récurrente linéaire d'ordre p.
Cas $p = 2$: une base de E_2 est
– dans le cas où $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ admet deux racines distinctes α et β, $\{(\alpha^n), (\beta^n)\}$,
– dans le cas où $x^2 + a_1x + a_0 = 0$ admet une racine double α, $\{(\alpha^n), (n\alpha^{n-1})\}$.

Démonstration : à faire, on pourra commencer par considérer l'application φ définie de $\mathbb{C}^p$ dans E_p par $\varphi(u_0, \dots, u_{p-1}) = (u_n)$ (est-elle bien définie, nature de cette application ?). Pour trouver une base on pourra trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (a^n) soit élément de E_p.
Exercice 11 (Suite de Fibonacci XII-XIII ième)
Expression en fonction de n du terme général de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = u_1 = 1$.

1.4 Premiers résultats sur les séries numériques

Définition 1.4.1 *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série de terme général u_n est la suite des sommes partielles (s_n) avec $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On note la série $\sum u_n$.*

La série $\sum u_n$ est dite **convergente** *si la suite des sommes partielles (s_n) converge, on note alors la limite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ et le* **reste d'ordre** *p $r_p := \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$. La limite est appelée* **somme** *de la série.*
Sinon elle est dite divergente.

Proposition 1.4.2 *L'ensemble des séries est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 1.4.3 (Condition nécessaire de convergence) *Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.*

Démonstration : à faire. Avec la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, montrer que cette condition n'est pas suffisante.

Définition 1.4.4 *La série réelle $\sum u_n$ est dite* **alternée** *si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.*

Théorème 1.4.5 (Séries alternées) *Soit (a_n) une suite décroissant vers 0, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente et de plus $|r_n| \leq a_{n+1}$.*

Démonstration : Montrer que les suites des sommes partielles d'ordre pair (s_{2n}) et des sommes partielles d'ordre impair (s_{2n+1}) sont adjacentes.
Exemple : La série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geq1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. On peut montrer de plus que sa somme vaut $\ln 2$, pour cela considérer $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \, dt$.

Théorème 1.4.6 (Séries absolument convergentes) *Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe, si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
La série $\sum u_n$ est alors dite **absolument convergente***.*

Démonstration : Utiliser que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munis respectivement de la valeur absolue ou du module sont complets. Vérifier que la suite des sommes partielles d'une série absolument convergente est de Cauchy puis conclure.

Définition 1.4.7 *Une série $\sum u_n$ convergente mais non absolument convergente est dite* **semi-convergente***.*

Exemple : La série harmonique alternée est semi-convergente.

1.5 Séries de nombres réels positifs

Théorème 1.5.1 *On suppose que la suite (u_n) est à termes positifs alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (s_n) est majorée.*

Démonstration : Avec l'hypothèse $u_n \geq 0$ pour tout entier n, on a que la suite des sommes partielles est une suite croissante.

Proposition 1.5.2 (Séries de références) *1. $q \geq 0$ et $u_n = q^n$, $\sum q^n$ converge si et seulement si $0 \leq q < 1$.*
2. $\alpha > 0$ et $u_n = 1/n^\alpha$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : à faire.

Théorème 1.5.3 (Comparaison) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors*
– si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
– si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : conséquence du théorème 1.5.1.
Exercice 12
Déduire du résultat précédent une démonstration élémentaire que toute série absolument convergente de $\mathbb{R}$ est convergente. On pourra considérer la suite auxiliaire de terme général $v_n = |u_n| - u_n$, que peut-on alors dire de la série $\sum v_n$?

Corrolaire 1.5.4 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs.*
Si $u_n = o(v_n)$ ou si $u_n = O(v_n)$ alors
– si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
– si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : à faire.

Proposition 1.5.5 (Sommation des relations de comparaison) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs.*
Si $u_n = o(v_n)$ (resp. si $u_n = O(v_n)$) alors
– si $\sum v_n$ converge $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k = o(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k)$ (resp. $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k = O(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k)$),
– si $\sum u_n$ diverge alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k)$ (resp. $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = O(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k)$).
Si $u_n \sim v_n$ alors
– lorsque les deux séries convergent $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$
– lorsque les deux séries divergent $\sum\limits_{k=0}^{n} u_n \sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$

Démonstration : Revenir aux définitions et sommez les inégalités. Dans le cas de la divergence pensez de plus que l'on a $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ car ce sont des séries à termes positifs.

Théorème 1.5.6 (Comparaison d'une série à une intégrale) *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, positive et décroissante, alors la série de terme général $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ est convergente.*
En particulier la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Démonstration : Montrer que la série $\sum u_n$ est à termes positifs et majorée puis conclure.
Exercice 13
Nature des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, nature des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$?

Théorème 1.5.7 (Comparaison logarithmique) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs, on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors*
– si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
– si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : Utiliser encore qu'une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

Corrolaire 1.5.8 (Règle de d'Alembert) *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Alors*
– s'il existe $q \in]0, 1[$ et un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ alors la série $\sum u_n$ converge.
Ceci est vérifié en particulier si $\lim\limits_{n} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, 1[$.
– s'il existe $q > 1$ et un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
Ceci est vérifié en particulier si $\lim\limits_{n} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in]1, +\infty[$.

Démonstration : à faire en utilisant le théorème de comparaison logarithmique, pour la suite (v_n) prendre la suite géométrique.

Corrolaire 1.5.9 (Règle de Raabe-Duhamel) *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs et telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$$

alors si $\beta > 1$ *la série* $\sum u_n$ *converge, si* $\beta < 1$ *la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration : à faire en utilisant le théorème de comparaison logarithmique, pour la suite (v_n) prendre la suite de Riemann, $v_n = n^{-\alpha}$.

Exercice 14

Nature de la série de terme général $u_n = \binom{2n}{n}/(n4^n)$?

1.6 Produit de Cauchy

Définition 1.6.1 *On appelle* **produit de Cauchy** *de deux séries réelles ou complexes* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$*, la série* $\sum w_n$ *de terme général* $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 1.6.2 *Le produit de Cauchy* $\sum w_n$ *de deux séries absolument convergentes* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *est une série absolument convergente et de plus*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n).$$

Démonstration : On note $T_n := \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq k \leq n,\ 0 \leq l \leq n-k\}$ et $I_n := \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq n\}$, ainsi $T_n \subset I_n^2 \subset T_{2n}$ (faire un dessin). Avec les notations précédentes, on pose $w'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}|$ et on a $\sum\limits_{j=0}^{n} w'_j = \sum\limits_{(k,l)\in T_n} |u_k|\,|v_l|$, de plus en notant $U_n := \sum\limits_{j=0}^{n} |u_j|$, $V_n := \sum\limits_{j=0}^{n} |v_j|$ et $W'_n := \sum\limits_{j=0}^{n} w'_j$, nous avons

$$W'_n \leq U_n V_n \leq W'_{2n}.$$

De l'absolue convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ on déduit que la série à termes positifs $\sum w'_n$ est convergente puis en passant à la limite que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} w'_j = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_j|\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |v_j|\right).$$

Comme $|w_n| \leq w'_n$ la série $\sum w_n$ étant absolument convergente, elle est convergente et de plus

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=0}^{n} w_j - (\sum_{j=0}^{n} u_j)(\sum_{j=0}^{n} v_j)\right| &= \left|\sum_{(k,l)\in I_n^2\setminus T_n} u_k v_l\right| \\ &\leq U_n V_n - W'_n \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)$.

Exercice 15

a) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ pour tout complexe z, on note $e(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ la somme de la série. Montrer que $e(z)e(z') = e(z+z')$.

b) Montrer que la série de terme général $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Qu'en est-il de son carré de Cauchy ?

1.7 Exercices

Exercice 16

1) Les affirmations suivantes (portant sur une suite $(u_n)_n$) sont-elles exactes ?

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $u_n > a$ pour tout n, et si $(u_n)_n$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $l > a$.

(b) Si $u_n > 0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.

(c) $(u_n)_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

(d) Si $u_n > 0$ et si $(u_n)_n$ n'est pas majorée alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

(e) Si $(u_n)_n$ décroît et si $u_n \sim v_n$ alors $(v_n)_n$ décroît.

(f) Si une suite réelle a une limite strictement positive, tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

(g) Une suite qui prend un nombre fini de valeurs converge si et seulement si elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

2) Montrer que la suite $a_n = 1/n + (-1)^n$ ne converge pas (en utilisant la définition de la convergence).
3) Quels sont les liens entre la convergence de $(u_n)_n$ et celle de $(|u_n|)_n$?
4) Donner des exemples de suites de rationnels (resp. irrationnels) convergeant vers un irrationnel (resp. vers un rationnel).
5) Si les 3 sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent, montrer que $(u_n)_n$ converge.
6) Si la suite $(x_{2n})_n$ tend vers le réel α et si la suite $(x_{2n+1})_n$ tend vers le réel β, $\beta \neq \alpha$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ est l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$.
7) Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites convergentes de limites respectives u et v. Montrer que la suite $(\min(u_n, v_n))_n$ converge vers $\min(u, v)$. (Cas général ?)

Exercice 17

Etudier la nature et déterminer la limite éventuelle des suites $(u_n)_n$ de terme général :

a) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, b) $u_n = \dfrac{n^\alpha}{\beta^n}$, c) $u_n = \dfrac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta}$, d) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$, e) $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$,

f) $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$,

Exercice 18- Moyenne de Cesaro

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels, on définit la suite $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1) Montrer que si $(u_n)_n$ admet une limite finie l, alors $(v_n)_n$ converge également vers l. La réciproque est-elle vraie ? On pose pour $k \geq 1$, $a_k = u_{k+1} - u_k$. Montrer que $u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k a_k$. En déduire que la réciproque est vraie si de plus on suppose $\lim_{k\to\infty} k a_k = 0$.
2) Que peut-on dire si $u_n \to +\infty$?
3) On suppose que $(u_{n+1} - u_n)_n$ admet une limite (finie ou infinie). Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \to l$.
4) On suppose que $u_n > 0$ pour tout n et que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ admet une limite l ; montrer qu'il en est de même pour $(\sqrt[n]{u_n})_n$.

Exercice 19- Théorème(s) du point fixe.

1. Soient E un espace métrique complet (pour simplifier on peut aussi prendre $(\mathbb{R}, \ |\cdot|)$ ou $(\mathbb{C}, \ |\cdot|)$) et $f : E \to E$ une application contractante :
$$\exists k \in [0,1[, \forall (x,y) \in E \times E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y).$$
Soient E et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_n$ est de Cauchy, que f admet un unique point fixe (un élément α de E tel que $f(\alpha) = \alpha$) et que $\forall n \geq 0, d(u_n, \alpha) \leq k^n \dfrac{d(u_1, u_0)}{1-k}$.
2. (Sans les suites de Cauchy.) Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires). Si de plus f est contractante montrer que f admet un unique point fixe (on obtient alors la même estimation pour $|u_n - \alpha|$).
3. (Knaster) Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ croissante. Montrer que f possède au moins un point fixe. Pour cela on pourra considérer l'ensemble $E := \{x \in [a,b] \mid x \leq f(x)\}$, que peut-on dire de $x_0 = \sup E$?
4. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue, dérivable sur $]a,b[$, de dérivée f' bornée par une constante k, $0 \leq k < 1$. Montrer que f est contractante. Etudier la suite définie par $u_0 \neq 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 20- Développement décimal.

1. Etant donné un nombre réel $x \in [0,1[$, montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de nombres entiers, $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tels que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 10^{-n}$.

2. Y a-t-il unicité du développement ?
3. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si le développement décimale de x est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 21
Déterminer la nature des séries suivantes données par leur terme général, en fonction des paramètres éventuels.
a) $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; b) $u_n = \dfrac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{n^n}$; c) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; d) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, $n \geq 1$;
e) $u_n = \left(n^{1/n}-1\right)^n$; f) $u_n = \dfrac{1}{1+z^n}$, $z \in \mathbb{C}$ et $|z| \neq 1$; g) $u_n = \left(n^6+3\right)^a - \left(n^2+2\right)^{3a}$, $a \in \mathbb{R}$; h) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ $\alpha > 0$; g) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

Exercice 22
Soient α un réel strictement positif et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.
a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\, dt$; préciser cette somme pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$,

Exercice 23
Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Montrer que $u_n \sim v_n$ et déterminer la nature des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$.

Exercice 24
a) Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{2n-1}{n^3-4n}$, $n \geq 3$.
b) Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$.
c) Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente et déterminer sa somme avec i) $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$, $a, b \in \mathbb{R}$; ii) $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 25
Soit P et Q deux polynômes de degrés respectifs p et q avec $Q \neq 0$. Soit n_0 le plus petit entier tel que, pour tout $n \geq n_0$, $Q(n) \neq 0$ (pourquoi existe t-il ?). Montrer que
1. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ converge si et seulement si $q \geq p+2$.
2. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ converge si et seulement si $q \geq p+1$.

Exercice 26
a) Soit a, b deux réels. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{a}{\sqrt{n}} - \frac{b}{\sqrt{n+1}}$ converge si et seulement si $a = b$.
b) Soit (u_n) une suite de nombres positifs. Montrer que les séries de termes général u_n et v_n, où $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice 27
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive décroissante.
a) On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$, montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont même nature.
b) Nature en fonction de α de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?
c) Nature en fonction de α et β de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$?

Exercice 28
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$.
a) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ diverge. On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes les deux convergentes.
b) Montrer au moyen de deux exemples que, lorsque $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ peut converger ou diverger selon les cas.

Exercice 29- Transformation d'Abel
a) Soient $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante qui converge vers 0 et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M.$$

On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k a_k$. Montrer que pour tous entiers $p < q$,

$$S_q - S_p = \epsilon_q A_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} \left(\epsilon_k - \epsilon_{k+1}\right) A_k - \epsilon_{p+1} A_p.$$

En déduire que $\sum \epsilon_n a_n$ est une série convergente sur $\mathbb{K}$.

b) Quel type particulier de séries vérifient ces hypothèses ?
c) Appliquer ce résultat aux séries $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ avec $(\alpha,\theta) \in]0,1] \times (\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z})$.
Etudier la convergence absolue de ces séries (on pourra utiliser l'inégalité $\frac{|\cos n\theta|}{n^\alpha} \geq \frac{1+\cos 2n\theta}{2n^\alpha}$).

Exercice 30

1) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\sum n\,|u_n|$ converge. On note $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ (bien défini ?).
a) Montrer que la suite $(nv_n)_n$ converge vers 0.
b) Montrer que la série de terme général v_n converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n$.
2) Appliquer ceci au calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$ lorsque ceci a un sens.

Exercice 31

a) Soit f une fonction décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$ et soit g une primitive de f sur cet intervalle. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$

$$0 \leq f(k) - (g(k+1) - g(k)) \leq f(k) - f(k+1).$$

b) En déduire qu'il existe une constante C et une suite $(\alpha_n)_n$ convergeant vers 0 tels que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n+1) + C + \alpha_n.$$

c) Justifier la convergence de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, on note γ sa limite (constante d'Euler $\simeq 0,57$).
d) On pose pour tout entier $n \geq 2$ $u_n := S_n - S_{n-1}$ et $u_1 := S_1$. Trouver un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n puis montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim -\frac{1}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
e) En déduire que $S_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
f) Comment faire pour avoir le développement à l'ordre 2 ?

Exercice 32 (commutativité dans la somme d'une série).

a) Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs ou nuls et σ une bijection de $\mathbb{N}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et qu'elles ont même somme dans le cas où elles convergent.

b) Montrer que le résultat du a) est encore vrai si l'on suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

c) On regarde maintenant l'effet d'un changement de l'ordre des termes dans une série dont les termes ne sont pas des réels de signe constant.
c1) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$, et donner sa somme.
c2) On réordonne les termes de la façon suivante, on prend le premier terme d'indice impair, puis les deux premiers termes consécutifs d'indice pair, et on recommence. Cela donne

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots$$

Montrer que la nouvelle série est convergente et calculer sa somme. Que remarquez-vous ?
c3) Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, est convergente.
c4) Soit σ la permutation des entiers naturels définie par

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sigma(3p) = 2p\ ;\ \sigma(3p+1) = 4p+1\ ;\ \sigma(3p+2) = 4p+3.$$

Montrer que la série $\sum v_{\sigma(n)}$ diverge.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

2.1 Généralités

Soit D une partie d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, on notera $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on notera E^D l'ensemble des fonctions de D dans E.
Sauf précision explicite les fonctions considérées dans la suite seront des éléments de $\mathbb{R}^D$.

Définition 2.1.1 *f est dite*
– **majorée**, *s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$,*
– **minorée**, *s'il existe un réel m tel que pour tout x de D, $f(x) \geq m$,*
– **bornée**, *lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.*
$f \in \mathbb{C}^I$ est dite **bornée** *si $|f|$ l'est.*

Définition 2.1.2 *f est dite*
– **croissante sur** *D (resp.* **strictement croissante sur** *D) si*

$$\forall (x,x') \in D^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \text{ (resp. } f(x) < f(x')\text{)}$$

– **décroissante sur** *D (resp.* **strictement décroissante sur** *D) si*

$$\forall (x,x') \in D^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \text{ (resp. } f(x) > f(x')\text{)}$$

– **monotone sur** *D (resp.* **strictement monotone sur** *D) si elle est croissante ou décroissante sur D (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur D).*

Exercice 1 : rappeler les résultats sur les sommes, produits, composition de fonctions monotones ou strictement monotones.

Définition 2.1.3 (Parité) *Soit D une partie symétrique par rapport à 0, f est dite*
– **paire** *si pour tout x de D, $f(-x) = f(x)$,*
– **impaire** *si pour tout x de D, $f(-x) = -f(x)$.*

Exercice 2 : D est toujours une partie centrée en 0 et f une fonction définie sur D, exprimer f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Que peut-on dire de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires ?

Définition 2.1.4 (Périodicité) *Le réel $T \in \mathbb{R}^*$ est dit* **période** *de la fonction f dans $\mathbb{R}^D$ lorsque*

$$\forall x \in D,\ x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Exercice 3 : Il est clair que la somme de deux fonctions T-périodiques est une fonction T-périodique. Dans cet exercice nous nous demandons ce que l'on peut dire sur la somme pour deux fonctions de périodes différentes.
1) Résultat préliminaire : les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ ou sont denses dans $\mathbb{R}$.
Démonstration de ce résultat :
On note G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et $A = \{x \in G : x > 0\}$.

(i) Si $a = \inf A > 0$, montrer que $a \in A$ et $G = a\mathbb{Z}$.

(ii) Si $\inf A = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Application aux fonctions périodiques :

(i) Soit f une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$, montrer que si f est non constante, f admet une plus petite période positive non nulle.

(ii) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodiques de périodes respectives $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On cherche à savoir si $f+g$ est aussi périodique.

– Cas où $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}$, montrer que $f+g$ est périodique (considérer $\alpha\mathbb{Z} \cap \beta\mathbb{Z}$).

– Cas où $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, que peut-on dire de $\alpha\mathbb{Z} \cap \beta\mathbb{Z}$ et de $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$?
On suppose que $f+g$ est périodique de période $\gamma > 0$. Montrer alors que la fonction h définie par $h(x) = f(x+\gamma) - f(x)$ admet α et β pour périodes. En déduire que h est constante ainsi que k définie par $k(x) = g(x+\gamma) - g(x)$, puis que h et k sont nulles et enfin que $\gamma = 0$, ce qui permet d'affirmer que $f+g$ n'est pas périodique.

Définition 2.1.5 (Limite) *I est un intervalle, a un point ou une extrémité de I, f une fonction de $\mathbb{R}^I$.*
f admet le réel b pour limite en a (noté $\lim_a f = b$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = b$) lorsque
– *a réel :* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$
– $a = +\infty$: $\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$
– $a = -\infty$: $\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$
f admet $+\infty$ pour limite en a (noté $\lim_a f = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$) lorsque
– *a réel :* $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq B$
– $a = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$
– $a = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A \Rightarrow f(x) \geq B$
f admet $-\infty$ pour limite en a (noté $\lim_a f = -\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) lorsque
– *a réel :* $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq B$
– $a = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B$
– $a = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A \Rightarrow f(x) \leq B$
Pour les limites à droite (noté $\lim_{a^+} f$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x)$), remplacer $x \in I$ par $x \in I \cap [a, +\infty[$.
Pour les limites à gauche (noté $\lim_{a^-} f$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$), remplacer $x \in I$ par $x \in I \cap]-\infty, a]$.

Exercice 4 : Retrouvez que lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Remarque 2.1.6 *Bien noter qu'avec la définition adoptée pour la limite, si a est dans I alors la limite éventuelle de f en a ne peut-être que $f(a)$.*

Exercice 5 :
1) Montrer que toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
2) Montrer que toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée au voisinage de ce point par un nombre réel strictement positif.
3) Retrouver les rêgles sur les opérations algébriques sur les limites, sur les compositions.

Proposition 2.1.7 (Caractérisation séquentielle) *$\lim_a f = b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de D convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers b.*

Preuve : à faire.

Théorème 2.1.8 (Limite monotone) *$I = (\alpha, \beta)$ intervalle et f monotone sur I alors f admet en tout point de $]\alpha, \beta[$ une limite à droite et une limite à gauche, une limite à droite en α, une limite à gauche en β.*

Preuve : à faire, pour a dans $\mathring{I}$ on pourra considérer les ensembles $\{f(x) \mid x < a\}$ et $\{f(x) \mid x > a\}$ et, selon la monotonie de f, les bornes supérieures ou inférieures de ces ensembles.

2.2 Continuité

Définition 2.2.1 *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et a un point de D alors f est dite* **continue en** *a si elle admet une limite en a.*
f est dite **continue sur** *D si elle est continue en tout point de D.*

Remarque 2.2.2 *On rappelle qu'avec la définition adoptée pour la limite, cette limite ne peut-être que $f(a)$.*

Exercice 6 : Rappeler la caractérisation séquentielle de la continuité.
Rappeler les résultats sur la continuité et opérations algébriques, continuité et composition.

Proposition 2.2.3 *Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a.*
Si f et g sont continues en a alors $\sup(f,g)$ *est continue en a.*

Preuve : à faire. Pour la continuité de $\sup(f,g)$ on pourra commencer par montrer que $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$.

Exercice 7 : Etudier la continuité de $\sup(f_1,\dots,f_n)$ où $\{f_1,\dots,f_n\}$ est une famille de fonctions continues sur un intervalle I. Donner une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues sur I telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ n'est pas continue.

Théorème 2.2.4 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux points de I. Alors pour tout réel r compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe c dans I tel que $f(c) = r$.*

Preuve : à faire. Commencer par justifier que l'on peut se ramener au cas où $a < b$ et $f(a) < r < f(b)$ puis par exemple considérer $E = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq r\}$, que dire alors de $\sup E$? On peut aussi construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que pour tout n, $f(a_n) \leq r \leq f(b_n)$, que dire alors de la limite de ces suites ?

Corrolaire 2.2.5 *Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Exercice 8 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2.6 *Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve : à faire.
f bornée : supposer par exemple que f n'est pas bornée et en déduire une contradiction à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass et de la continuité.
f atteint ses bornes : utiliser encore le théorème de Bolzano-Weierstrass et la continuité.

Définition 2.2.7 (Continuité uniforme) *Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite* **uniformément continue** *si*
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \epsilon.$$

Exercice 9 : Où se trouve la différence avec la définition de f continue sur I ? Donner un exemple de fonction continue mais non uniformément continue sur $]0,1[$.

Théorème 2.2.8 (Continuité uniforme) *Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Preuve : à faire, par l'absurde et la clé est encore avec le théorème de Bolzano-Weierstrass et la continuité.
Exercice 10 : Montrer qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue. La conclusion reste t-elle valable si l'on suppose seulement f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et bornée ?

Théorème 2.2.9 (Continuité et stricte monotonie) *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors f est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et de plus f^{-1} est continue de J sur I.*
On dit alors que f est un **homéomorphisme** *de I sur $f(I)$.*

Preuve :
J intervalle résulte de la continuité de f et du théorème des valeurs intermédiaires.
f bijective de I sur $f(I)$ résulte de la stricte monotonie de f puisque ceci permet de montrer l'injectivité de f.
Le seul point restant à montrer est la continuité de f^{-1} et cela revient à montrer que f est ouverte, c'est-à-dire que pour tous $a < b$ de $\overline{I}$, $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert (à faire).
Exercice 11 : Montrer que si f est continue et injective sur $[a,b]$ alors elle est strictement monotone.

2.3 Dérivabilité

Définition 2.3.1 *Soit D une union d'intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et a un point de D alors f est dite* **dérivable en** *a (resp. dérivable à droite, resp. à gauche) si l'application définie sur $D \setminus \{a\}$ par $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a (resp. limite finie à droite, resp. à gauche).*
Cette limite est notée $f'(a)$ (resp. $f'_d(a)$, resp. $f'_g(a)$).
f est dite **dérivable sur** *D si elle est dérivable en tout point de D.*

Proposition 2.3.2 *f dérivable en a et $f'(a) = A$ équivaut à l'existence d'une fonction ϵ définie sur D, nulle en a et continue en a telle que*

$$\forall x \in D, \quad f(x) = f(a) + (x-a)A + (x-a)\epsilon(x).$$

Proposition 2.3.3 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Preuve : à faire.
Exercice 12 : Retrouver les résultats sur les opérations sur les fonctions dérivables en a.

Théorème 2.3.4 (Composition) *Soit f dérivable en $a \in I$ et g définie sur $J \supset f(I)$ dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g(f(a)) \times f'(a)$.*

Preuve : à faire

Théorème 2.3.5 (Application réciproque) *Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Preuve : à faire.
Exercice 13 : retrouver les dérivées des fonctions arccos, arcsin, arctan, argch, argsh, argth.

Théorème 2.3.6 (Dérivée et extremum local) *Si f est définie et dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et admet un extremum en un point c de $]a,b[$ alors $f'(c) = 0$.*

Preuve : à faire.
Exercice 14 : Montrer que ce résultat n'est plus vrai sur $[a,b]$. Donner une exemple de fonction dérivable sur $]-1,1[$ dont la dérivée s'annule en 0 mais qui n'admet pas d'extremum en 0.

Théorème 2.3.7 (Rolle) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve : à faire, un dessin pourra être utile.
Exercice 15 : Montrer que si P est un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2, alors le polynôme dérivé P' est aussi scindé.
Exercice 16 : Montrer à l'aide d'un contre-exemple que le théorème de Rolle n'est pas vrai pour une fonction à valeurs complexes.

Théorème 2.3.8 (Egalité des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Preuve : A faire, appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.

Théorème 2.3.9 (Monotonie et signe de la dérivée) *Soit f une fonction continue sur un* **intervalle** *I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors*

(i) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$,

(ii) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$,

(iii) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

De plus dans les cas (i) et (ii) f est strictement monotone si et seulement si l'ensemble des valeurs d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle d'intérieur non vide.

Preuve : à faire.

Théorème 2.3.10 (Inégalité des accroissements finis - cas réel) *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que $|f'| \leq g'$ sur $]a,b[$.*
Alors $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Preuve : à faire en remarquant que $|f'| \leq g'$ implique $-g' \leq f' \leq g'$.
Exercice 17 : Montrer que si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que f' admette une limite l en a alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$ (ind. revenir à la définition de la limite et utiliser l'inégalité des accroissements finis).

Théorème 2.3.11 (Inégalité des accroissements finis - cas vectoriel) *Soit f une fonction à valeurs dans E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et g une fonction à valeurs réelles, f et g continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Si $N_2(f') \leq g'$ alors $N_2(f(b)-f(a)) \leq g(b)-g(a)$.*

Remarque 2.3.12 *N_2 désigne ici la norme euclidienne ($N_2(x) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$). On peut voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, on voit donc en particulier que l'inégalité des accroissements finis est vraie pour les fonctions à valeurs complexes bien que l'égalité ne le soit pas.*
On a l'inégalité des accroissements finis pour tout espace vectoriel normé mais la preuve est moins immédiate aussi nous nous contenterons de ce cas.

Preuve : On note $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire associé à la norme N_2 et on introduit la fonction auxiliaire φ définie sur $[a,b]$ par $\varphi(t) = (f(t)-f(a), f(b)-f(a))$. Vérifier que φ est à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et que sur $]a,b[$ $|\varphi'| \leq N_2(f(b)-f(a)) \times g'$.
Conclure en utilisant l'inégalité des accroissements finis - cas réel.

2.4 Formules de Taylor

Définition 2.4.1 *Soit D un intervalle ou réunion d'intervalles non réduits à un point, on définit par récurrence la* **dérivée** *n^{ieme}* **de** *f par $f^{(0)} = f$ et $f^{(n-1)}$ étant définie et dérivable sur D, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. On dit que f est n fois dérivable sur D.*
f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur D lorsque qu'elle est n fois dérivable sur D et que sa dérivée n^{ieme} est continue.

Proposition 2.4.2 (Formule de Leibniz) *f et g étant n fois dérivable sur l'intervalle I alors le produit fg l'est aussi et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve : à faire par récurrence.
Exercice 18 : Soient deux réels a et b, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire une autre expression de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Théorème 2.4.3 (Formule de Taylor-Lagrange) *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a,b]$ non réduit à un point et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors il existe c dans $]a,b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remarque 2.4.4 *La formule de Taylor-Lagrange est le prolongement de la formule des accroissements finis (faire $n = 0$ pour en être convaincu).*
On a de même pour $b < a$ l'existence de c entre a et b tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

voir la preuve ci-dessous.

Preuve : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie sur $[a,b]$ par

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

où A sera choisi de sorte que $g(b) = g(a)$, puis conclure.

Théorème 2.4.5 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,b]$ non réduit à un point alors*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Preuve : c'est une conséquence directe de la formule de Taylor-Lagrange puisque avec l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$ compact donc est bornée sur cet intervalle.

Remarque 2.4.6 *On a un résultat analogue en remplaçant la valeur absolue par la norme si f est à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.*

Théorème 2.4.7 (Formule de Taylor-Young) *Si f est n fois dérivable sur un intervalle I non réduit à un point alors pour tout a de I il existe une fonction ϵ définie et continue sur I, $\epsilon(a) = 0$ et*

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x).$$

Définition 2.4.8 (Développement limité) *On dit que f admet un* **développement limité à l'ordre** n *en a s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ϵ définie et continue sur un voisinage I de a , $\epsilon(a) = 0$ tels que*

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad f(x) = P_n(x) + (x-a)^n \epsilon(x).$$

Ceci s'écrit aussi $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$ et P_n est appelé **partie régulière d'ordre** n **en** a *de f.*

Remarque 2.4.9 *La formule de Taylor-Young est le prolongement de la définition de la dérivation à l'ordre 1 (faire $n = 1$).*
Une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young est que si f est n fois dérivable sur I alors elle admet un développement limité d'ordre n. Il y a équivalence pour $n = 1$ (cf. proposition 2.3.2). Attention l'équivalence n'est plus vraie pour $n \geq 2$, un contre-exemple classique, considérer la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$.

Preuve : Par récurrence, on note (H_n) l'hypothèse de récurrence
"Si h est une fonction n fois dérivable sur un intervalle I non réduit à un point alors pour tout a de I il existe une fonction ϵ définie et continue sur I, $\epsilon(a) = 0$ et

$$\forall x \in I \quad h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x).$$

(H_1) est la définition de la dérivée, montrons que pour tout $n \geq 1$, $[(H_n)$ implique $(H_{n+1})]$.
Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et $h = f'$ est n fois dérivable sur I, avec l'hypothèse (H_n) nous avons l'existence d'une fonction ϵ définie et continue sur I, $\epsilon(a) = 0$ et

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x).$$

Par continuité de ϵ en a, nous avons aussi

$$\forall \alpha > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |\epsilon(x)| < \alpha.$$

Ainsi grâce à l'inégalité des accroissements finis nous avons

$$\forall \alpha > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \Rightarrow \left| f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \right| \leq \alpha \frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}.$$

Ce qui permet de dire en posant $\theta(a) = 0$ et pour x dans $I \setminus \{a\}$,

$$\theta(x) = \frac{f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}}{(x-a)^{n+1}}$$

que la fonction θ est continue sur I et que l'on a donc bien (H_{n+1}). Nous avons (H_1) vérifiée, pour tout $n \geq 1$, (H_n) implique (H_{n+1}) donc (H_n) est vérifiée pour tout $n \geq 1$.

Théorème 2.4.10 (Résultats sur les développements limités) *P_n et Q_n désignent des éléments de $\mathbb{R}[X]$.*

1. *Si $f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$ alors $P_n = Q_n$*
2. *Si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et f paire (resp. impaire) alors P_n est pair (resp. impair).*
3. *Si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$ alors pour tout réel c, $f(x) + cg(x) = P_n(x) + cQ_n(x) + o(x^n)$ et $(fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$ avec $R_n = \overline{P_n Q_n}^{[n]}$.*
4. *Si f admet une développement limité d'ordre n en 0 et si $\lim_0 f \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n en 0.*

5. *Si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$, $f(0) = 0$ et s'il existe des intervalles I et J sur lesquels sont définis respectivement f et g et tels que $f(I\backslash\{0\}) \subset J\backslash\{0\}$ alors $g \circ f(x) = R_n(x) + o(x^n)$ avec $R_n = \overline{Q_n \circ P_n}^{[n]}$.*
6. *Si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ et F est une primitive de f au voisinage de 0, alors $F(x) = P_{n+1}(x) + o(x^{n+1})$ avec P_{n+1} la primitive de P_n valant $F(0)$ en 0.*

La notation $\overline{P}^{[n]}$ signifie que le polynôme P a été tronqué à l'ordre n (on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n).
Preuve : à faire.
Exercice 19 : retrouver des développements limités usuels, en 0, $\cos x$, $\sin x$, $\exp x$, $\cosh x$, $\sinh x$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$, etc ...

2.5 Fonctions convexes

Définition 2.5.1 *Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite* **convexe** *si pour tous points a et b de A, le segment $[a, b]$ est contenu dans A.*
Une fonction f définie sur un intervalle I d'intérieur non vide est dite **convexe** *si l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$ (***épigraphe** *de f) est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

Nous allons retrouver les propriétés des fonctions convexes sous forme d'exercice.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Vérifier que ceci correspond bien à la définition déjà donnée.

1. Montrer que si f est convexe sur I et si $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$ alors on a (*Inégalités des trois pentes*) :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$
2. Déduire des inégalités précédentes qu'une fonction convexe est continue sur $\overset{\circ}{I}$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f possède des dérivées à gauche et à droite en tout point $x \in \overset{\circ}{I}$ et établir que pour tout $(x, y) \in \overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I}$ avec $x < y$ on a $f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$. Donner un exemple d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et convexe, et qui ne possède pas de dérivées latérales en au moins une des extrémités de $[a, b]$.
4. Montrer que pour tout point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ il existe une fonction affine $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x_0) = f(x_0)$ et pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $\varphi(x) \leq f(x)$.
5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, I ouvert. Montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante. Si f est deux fois dérivable sur I alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, I ouvert. Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alors
$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$
7. Montrer que pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ on a $\prod_{i=1}^n t_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i$. On vient de montrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique.
8. Soit f une fonction convexe croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante ou admet une limite infinie en $+\infty$.
9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer que si c est un point d'annulation de la dérivée de f, alors $f(c)$ est le minimum absolu de f.

2.6 Exercices

Exercice 20
Montrer qu'une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ uniformément continue admet une limite en a. Supposons maintenant f dérivable sur $]a, b[$. Que peut-on dire si $\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| < \infty$? La fonction $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$, est-elle uniformément continue ?
Exercice 21

Montrer qu'une fonction $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ n'est pas injective.

Exercice 22

Soient f,g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)<g(x)$. Montrer qu'il existe $m>0$ tel que pour tout $x\in[0,1]$ on a $f(x)+m<g(x)$.

Exercice 23

Un mobile parcourt à vitesse continue une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $\frac{d}{2}$.

Exercice 24

Soient a,b des réels strictement positifs. $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{a}E(\frac{b}{x})=\frac{b}{a},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{b}{x}E(\frac{x}{a})=0.$$

Exercice 25

Donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ non lipschitzienne, puis de fonction continue en un seul point. Une fonction telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x-h))=0$, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 26

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes ainsi que le cas échéant la continuité de la dérivée.

a) $f_1(x)=x^2\cos(1/x)$ si $x\neq 0$ et $f_1(0)=0$,
b) $f_2(x)=\sin x\sin(1/x)$ si $x\neq 0$ et $f_2(0)=0$,
c) $f_3(x)=\dfrac{\ln(x)\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ si $x\neq 1$ et $f_3(1)=0$,
d) $f_4(x)=\dfrac{x}{\sin(x/2)}$ si $x\in]0,\pi]$ et $f_4(0)=2$,
e) $f_5(x)=x|x|$,
f) $f_6(x)=\cos\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 27

Déterminer $a,b,c\in\mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$ si $0\le x\le 1$ et $f(x)=ax^2+bx+c$ sinon soit deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Exercice 28 (Théorème de Darboux)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si $[a,b]\subset I$ et $f'(a)<0<f'(b)$, montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f'(c)=0$ (on pourra utiliser les bornes de f sur [a,b]). En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 29

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 30

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable et $f(a)<f(b)$. Montrer qu'il existe $l\in[a,b[$ tel que $f(l)=f(a)$ et $f'(l)\ge 0$.

Exercice 31

Soit f une fonction réelle n fois dérivable sur un intervalle I. Si f s'annule en $n+1$ points différents de I, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 32

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes. a) $f_1(x)=\sin^2 x$, b) $f_2(x)=\ln(1+x)$,
c) $f_3(x)=-\dfrac{x+2}{2x^2-7x+3}$.

Exercice 33

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ préciser le nombre $\theta\in]\alpha,\beta[$. Interprétation géométrique ?

Exercice 34

Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))f'(c)=(f(b)-f(a))g'(c)$. En déduire la version suivante de la règle de l'Hospital : *Si f et g sont continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables dans $]a,b[$. Alors $\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{f(x)-f(a)}=\lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ lorsque ces limites existent.*
Exemples : étudier les limites $\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$ et $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^m-1}$. Que peut-on dire de $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$?

Exercice 35

Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$x\mapsto\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra en particulier montrer que pour tout entier n et tout $x\neq 0$, $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}e^{-\frac{1}{x^2}}$ avec P_n et Q_n des polynômes et que $f^{(n)}(0)=0$.

Exercice 36

Démontrer que :

1. $\forall x > 0$, $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$, en déduire que pour $k \in [0,1)$ la suite de terme général $u_n = (1+k)(1+k^2)\cdots(1+k^n)$ est convergente.
3. il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $0 \leq \cos x - \sqrt{1-x^2} \leq Mx^4$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Exercice 37

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées. On désigne par $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. Montrer que $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ existe et vérifie $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$. (On pourra écrire une formule de Taylor sur chacun des intervalles $(x, x+a)$, $(x-a, x)$ où x et a sont des réels quelconques puis en déduire une majoration de $|f'(x)|$ en fonction de M_0, M_2, a et conclure.)

Exercice 38

a) Soit $I = [a, b]$, $a \neq b$, et f de classe $C^2([a, b])$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

b) Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f''(x) \leq (f'(x))^2$. (*Indication* : On pourra écrire le développement de Taylor-Young pour $f(x+y)$ et pour $f(x-y)$.)

Exercice 39

On pose $f(t) = \sqrt{1+t^2+t^3}$. Montrer que $f(t) = t^{3/2} + \frac{1}{2}t^{1/2} - \frac{1}{8}t^{-1/2} + \frac{9}{16}t^{-3/2} + o(t^{-3/2})$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 40

Recalculer les limites de l'exercice 34 à l'aide d'un développement limité. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$ et $\lim_{x\to 1^-} (\ln(x)\ln(1-x))$.

Exercice 41

Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x}{\ln(1+x)} + \dfrac{a}{x} + b \right) = 0$, donner un équivalent de l'expression lorsque x tend vers 0.

Chapitre 3

Intégration

3.1 Intégration sur un segment

3.1.1 Fonction continue par morceaux

Dans ce qui suit $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.
Les fonctions considérées, sauf précision contraire, sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *On appelle* **subdivision** *de $[a, b]$, une famille finie strictement croissante $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ telle que*

$$a = c_0 < \cdots < c_n = b$$

et $\delta(\sigma) := \sup\limits_{1 \leq j \leq n} (c_j - c_{j-1})$ est **le pas** *de la subdivision.*
Une autre subdivision $\sigma' = (c'_j)_{0 \leq j \leq n'}$ de $[a, b]$ est dite **plus fine** *que σ si*

$$\{c_j \mid 0 \leq j \leq n\} \subset \{c'_j \mid 0 \leq j \leq n'\}.$$

Etant donné deux subdivisions σ et σ' de $[a, b]$, on note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision construite à partir de l'ensemble $\{c_j \mid 0 \leq j \leq n\} \cup \{c'_j \mid 0 \leq j \leq n'\}$.

Remarque 3.1.2 *$\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision plus fine que σ et σ'.*

Définition 3.1.3 (Fonction en escalier) *Une fonction φ définie sur $[a, b]$ est dite* **en escalier** *s'il existe une subdivision $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout j de $[\![1, n]\!]$ on a φ constante sur $]c_{j-1}, c_j[$.*

Définition 3.1.4 (Fonction continue par morceaux) *Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite* **continue par morceaux** *sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout j de $[\![1, n]\!]$ on a*
– *f continue sur $]c_{j-1}, c_j[$*
– *f admet une limite à droite en c_{j-1} et une limite à gauche en c_j.*
Une telle subdivision σ est dite **adaptée** *à f.*

Proposition 3.1.5 *L'ensemble $\mathcal{C}_m([a, b])$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des fonctions bornées sur $[a, b]$.*
L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Démonstration : à faire.

Théorème 3.1.6 (Approximation des fonctions continues par morceaux) *Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$ alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que*

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \epsilon.$$

Démonstration : il suffit de le montrer pour une fonction continue sur $[a, b]$ puisque si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma = (c_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une subdivision adaptée à f alors $f_{|]c_{j-1}, c_j[}$ est prolongeable par continuité sur $[c_{j-1}, c_j]$ et on a l'existence de fonctions en escalier φ_j et ψ_j sur $[c_{j-1}, c_j]$ telles que

$$\forall x \in]c_{j-1}, c_j[, \ \varphi_j(x) \leq f(x) \leq \psi_j(x) \quad \text{et} \quad \psi_j(x) - \varphi_j(x) \leq \epsilon.$$

Les fonctions φ et ψ attendues peuvent alors être construites en posant

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ \forall x \in]c_{j-1},c_j[,\quad \varphi(x)=\varphi_j(x),\ \psi(x)=\psi_j(x)$$
$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad \varphi(c_j)=\psi(c_j)=f(c_j).$$

Pour une fonction f continue sur $[a,b]$ ce résultat d'approximation découle directement du théorème d'uniforme continuité de f sur $[a,b]$ (f continue sur $[a,b]$ compact de $\mathbb{R}$). En effet de

$$\forall \epsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall (x,y)\in[a,b]^2,\quad |x-y|\le\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\epsilon$$

on déduit l'approximation souhaitée en prenant pour n un entier supérieur ou égal à $\frac{b-a}{\eta}$, pour subdivision la subdivision régulière $\sigma=(c_j)_{0\le j\le n}$ avec $c_j=a+j\frac{b-a}{n}$ et pour φ et ψ les fonctions en escalier définies par

$$\forall j\in[\![1,n]\!]\ \forall x\in[c_j,c_{j+1}[,\ \varphi(x)=\min_{[c_j,c_{j+1}]} f,\quad \psi(x)=\max_{[c_j,c_{j+1}]} f,\quad \varphi(b)=\psi(b)=f(b).$$

3.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Proposition 3.1.7 *Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma=(c_j)_{0\le j\le n}$ une subdivision adaptée à φ, on pose*

$$I(\sigma,\varphi):=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(c_j-c_{j-1})\quad \text{où } \lambda_j \text{ est la valeur de } \varphi \text{ sur }]c_{j-1},c_j[.$$

Alors $I(\sigma,\varphi)$ est indépendant de la subdivision adaptée choisie et ce nombre est appelé **intégrale** *de φ sur $[a,b]$, on le note $\int_{[a,b]}\varphi$ ou $\int_{[a,b]}\varphi(x)\,dx$.*

Démonstration : Résulte du fait que si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées alors $I(\sigma,\varphi)=I(\sigma\cup\sigma',\varphi)=I(\sigma',\varphi)$.

Proposition 3.1.8 *1. L'application $\varphi\mapsto\int_{[a,b]}\varphi$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{E}([a,b])$.*

2. Pour tout φ de $\mathcal{E}([a,b])$ et tout c de $]a,b[$

$$\int_{[a,b]}\varphi=\int_{[a,c]}\varphi+\int_{[c,b]}\varphi.$$

Démonstration : à faire.

Théorème 3.1.9 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors les ensembles*

$$\begin{aligned}E^-(f) &= \left\{\int_{[a,b]}\varphi \mid \varphi\in\mathcal{E}([a,b]),\ \varphi\le f\right\}\\ E^+(f) &= \left\{\int_{[a,b]}\psi \mid \psi\in\mathcal{E}([a,b]),\ f\le \psi\right\}\end{aligned}$$

sont non vides et respectivement majoré et minoré. De plus

$$\sup E^-(f)=\inf E^+(f)$$

et ce nombre est appelé **intégrale** *de f sur $[a,b]$, on le note $\int_{[a,b]}f$ ou $\int_{[a,b]}f(x)\,dx$.*

Démonstration : les grandes lignes,
- $E^-(f)$ et $E^+(f)$ respectivement majoré et minoré résulte du fait que toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée.
- $\sup E^-(f)\le\inf E^+(f)$ résulte de $\int_{[a,b]}\varphi\le\int_{[a,b]}\psi$ pour toutes fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi\le f\le\psi$.
- $\inf E^+(f)\le\sup E^-(f)$ résulte du théorème d'approximation 3.1.6 puisque l'on a alors pour tout réel strictement positif ϵ, l'existence de deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi\le f\le\psi$ et $\psi-\varphi\le\epsilon$. Ce qui permet d'en déduire que $\inf E^+(f)-\sup E^-(f)\le\epsilon(b-a)$ pour tout réel strictement positif ϵ.

Corrolaire 3.1.10 *Soit f dans $\mathcal{C}_m([a,b])$, (ϵ_p) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 et (φ_p) une suite de $\mathcal{E}([a,b])$ tels que $\sup_{[a,b]}|f-\varphi_p|\le\epsilon_p$ alors*

$$\int_{[a,b]}f=\lim_{p\to+\infty}\int_{[a,b]}\varphi_p$$

Démonstration : découle du fait que pour tout p

$$\int_{[a,b]} (\varphi_p - \epsilon_p) \leq \sup E^-(f) \leq \inf E^+(f) \leq \int_{[a,b]} (\varphi_p + \epsilon_p).$$

Remarque 3.1.11 (Interprétation graphique) *Si l'on suppose le plan muni d'un repère $(0, U, V)$ et que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs positives alors $\int_{[a,b]} f$ est l'aire du domaine $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$ en unité d'aire, c'est-à-dire le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Une unité d'aire est l'aire du parallélogramme de côtés $[O, U]$ et $[O, V]$.*

Proposition 3.1.12 *1. L'application $f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_m([a, b])$.*

2. Pour tout f de $\mathcal{C}_m([a, b])$ et tout c de $]a, b[$

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration : découle de la proposition 3.1.8 et du corollaire 3.1.10.

Définition 3.1.13 *On dit que f est continue par morceaux sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ contenu dans I.*
Si f est continue par morceaux sur I et a et b deux éléments de I, on pose

$$\bullet \text{ si } a < b,\ \int_a^b f := \int_{[a,b]} f \quad \bullet \text{ si } a = b,\ \int_a^b f := 0 \quad \bullet \text{ si } a > b,\ \int_a^b f := -\int_{[a,b]} f.$$

Proposition 3.1.14 *I désigne un intervalle, a et b des éléments de I alors*

1. *L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m(I)$.*
2. *Si c est dans I et f dans $\mathcal{C}_m(I)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*
3. *Si f et g sont dans $\mathcal{C}_m(I)$ alors*

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\,dx \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \left| \int_a^b |g(x)|\,dx \right|.$$

3.1.3 Cas des fonctions continues sur un segment

Proposition 3.1.15 *Une fonction continue, à valeurs positives sur un segment est nulle si et seulement si son intégrale sur ce segment est nulle.*

Démonstration : à faire. L'implication f nulle implique $\int_I f = 0$ est immédiate, pour la réciproque supposez f non nulle et déduisez en que $\int_I f > 0$.

Théorème 3.1.16 (Produit scalaire) *Soit I un segment de $\mathbb{R}$, l'application $(f, g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I.*

Démonstration :
– à valeurs dans $\mathbb{R}$
– bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale
– symétrique par définition
– définie positive : $(f, f) \geq 0$ et $(f, f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ conséquences de la proposition 3.1.15

Corrolaire 3.1.17 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient f et g des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ alors*

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \left(\int_{[a,b]} f^2 \right)^{1/2} \left(\int_{[a,b]} g^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration : Considérez le polynôme de degré au plus 2

$$P(X) := \int_{[a,b]} (f + gX)^2$$

et traduisez le fait qu'il est toujours positif ou nul.

Exercice 1
Retrouvez l'inégalité de Minkowski

$$\left(\int_{[a,b]}(f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2} + \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{1/2}.$$

Ainsi l'application $f \mapsto \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{C}(I)$, c'est la norme associée au produit scalaire.

Théorème 3.1.18 (Sommes de Riemann) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, on note*

$$R_n(f) := \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \quad \text{et} \quad R_n'(f) := \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

alors les suites $(R_n(f))$ et $(R_n'(f))$ convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} R_n'(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration : conséquence du corollaire 3.1.10 et de l'uniforme continuité de f sur $[a,b]$.
Exercice 2 Déterminer la limite des suites de terme général :
a) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{\sqrt{n^2-k^2}}$; b) $w_n = \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$; c) $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})^k\right)^{1/n^2}$; d) $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{k+1}{n})$ avec f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

3.1.4 Calcul des valeurs approchées d'une intégrale.

Les méthodes du milieux, des trapèzes et de Simpson sont présentées sous forme d'exercice.
Méthode du milieu ou des tangentes
1) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifier que l'aire (algébrique) du domaine défini par les droites d'équation $y=0$, $x=a$, $x=b$ et la tangente à la courbe représentative de f au point d'abcisse $\frac{a+b}{2}$ est $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Cela correspond à l'aire de quel rectangle ?
2) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on note $M_2 = \sup\{|f''(t)|,\ t\in[a,b]\}$, $I = \int_a^b f(t)\,dt$ et $R = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, montrer que $|I-R| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{24}$ (pensez à l'inégalité de Taylor-Lagrange). En déduire que si l'on note $I_k = \frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}(k+\frac{1}{2})\right)$ et $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} I_k$ alors $|I-R_n| \leq M_2\dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$.
3) Que peut-on dire si l'on suppose seulement f continue sur $[a,b]$?
Méthode des trapèzes
4) Déterminer la fonction affine h prenant les mêmes valeurs que f en a et b. Vérifier que son intégrale sur $[a,b]$ est $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ soit l'aire du trapèze (lorsque cela a un sens) défini par les droites d'équation $y=0$, $x=a$, $x=b$ et la droite passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. Si P est un polynôme de degré 1, que vaut $\int_a^b P(t)\,dt$?
5) On reprend les hypothèses du 2) et l'on note $T=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$. A l'aide de deux intégrations par parties montrer que $\int_a^b (f(x)-h(x))\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx$ puis montrer que $|I-T| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12}$.
6) En déduire que si l'on note $J_k = \frac{b-a}{2n}\left(f(a+k\frac{b-a}{n}) + f(a+(k+1)\frac{b-a}{n})\right)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} J_k$ alors $|I-T_n| \leq M_2\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.
7) Dans le cas où f est convexe, montrer que pour tout entier strictement positif n, $R_n \leq I \leq T_n$.
Méthode de Simpson
8) Déterminer le polynôme de degré au plus 2 prenant les mêmes valeurs que f en a, b et $\frac{a+b}{2}$. Vérifier que son intégrale sur $[a,b]$ est $\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$.
9) Vérifier que l'on a pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, $\int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{6}\left(P(a)+4P(\frac{a+b}{2})+P(b)\right)$.
10) On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^4$ et on note $M_4 = \sup\{\left|f^{(4)}(t)\right|,\ t\in[a,b]\}$ et $S = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$. On note $c=\frac{a+b}{2}$ et on pose $\phi(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\,dt - \frac{x}{3}\left(f(c-x)+4f(c)+f(c+x)\right)$. Vérifier que la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,\frac{b-a}{2}]$ et que $\phi(0)=\phi'(0)=\phi^{(2)}(0)=0$, $\phi(\frac{b-a}{2}) = I-S$, $\left|\phi^{(3)}(x)\right| \leq \frac{2}{3}M_4x^2$.
En déduire que $|I-S| \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5$.
11) En déduire que si l'on note $L_k = \frac{b-a}{6n}\left(f(a+k\frac{b-a}{n}) + 4f(a+(k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}) + f(a+(k+1)\frac{b-a}{n})\right)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} L_k$ alors $|I-S_n| \leq M_4\dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}$.

3.1.5 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 3.1.19 *Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite* **continue par morceaux** *si pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$. On note $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions.*
On définit alors

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \Re e f(x)\,dx + i\int_a^b \Im m f(x)\,dx.$$

Remarque 3.1.20 *Conséquences de cette définition*

$$\begin{aligned} \Re e\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) &= \left(\int_a^b \Re e f(x)\,dx\right) \\ \Im m\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) &= \left(\int_a^b \Im m f(x)\,dx\right) \\ \overline{\int_a^b f(x)\,dx} &= \int_a^b \overline{f(x)}\,dx. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.21 *Soit f dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$, a et b deux éléments de I.*

1. *L'application $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$.*
2. *Si c est un point de I, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*
3. $\left|\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right| \leq \int_{[a,b]} |f|(x)\,dx$.

Démonstration : La seule assertion qui ne soit pas immédiate est la troisième.
Si $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = 0$ alors il n'y a rien à montrer, sinon il existe un réel θ tel que $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = e^{i\theta}\left|\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right|$.
D'où

$$\int_{[a,b]} e^{-i\theta} f(x)\,dx = \left|\int_{[a,b]} f(x)\,dx\right| \in \mathbb{R}$$

et de ce fait

$$\int_{[a,b]} e^{-i\theta} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} \Re e\left(e^{-i\theta} f(x)\right)\,dx \leq \int_{[a,b]} \left|e^{-i\theta} f(x)\right|\,dx$$

ce qui est le résultat attendu.

3.2 Intégration et dérivation

3.2.1 Théorème fondamental

Définition 3.2.1 *Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I, on dit que F est une* **primitive** *de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.*

Théorème 3.2.2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I alors la fonction définie sur I par*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et c'est **la** *primitive de f sur I qui s'annule en a.*
De plus si F est une primitive de f sur I alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration : à faire, pensez à utiliser l'uniforme continuité de f sur tout segment de I. Donner une autre démonstration (niveau terminale) lorsque f est de plus supposée croissante sur I.

Corrolaire 3.2.3 – *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*
– *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I alors*

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

3.2.2 Calcul de primitives

Théorème 3.2.4 (Intégration par parties) *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Démonstration : $(fg)' = f'g + fg'$.

Théorème 3.2.5 (Changement de variables) *Soit f continue sur un intervalle I, φ une fonction à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Démonstration : f continue sur I donc admet sur I une primitive F, $F\circ\varphi$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $(F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\times\varphi'$.

Exercice 3

Lorsqu'on veut par exemple calculer $\int_1^2 \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,dx$, on peut faire le changement de variable $u = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ puis $du = -\frac{(u^2+1)^2}{4u}dx$ et remplacer. Traduire ceci dans les termes du théorème, en particulier quelle est la fonction φ ici, quels sont a et b ? Terminer le calcul de l'intégrale.

Exercice 4

a) Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Montrer que pour tout réel a

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt.$$

b) Soit f une fonction paire (resp. impaire), continue par morceaux sur un intervalle I et $a \in I$, que peut-on dire de $\int_{-a}^a f(t)\,dt$?

Exercice 5

Calculer les primitives des fonctions suivantes (en précisant leur domaine de définition) :

a) $x \mapsto e^x(x^2 + x + 1)$; b) $x \mapsto \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; c) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$; d) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Théorème 3.2.6 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, a et b deux points distincts de I alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Remarque 3.2.7 *Revoir les hypothèses et conclusions des formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange, la formule de Taylor avec reste intégral est celle qui demande dans ses hypothèses le plus de régularité à la fonction mais aussi la seule qui donne un reste exact.*
Pour $n = 0$ la formule de Taylor avec reste intégral n'est autre que le corolaire 5.2.9.

Démonstration : Par récurrence avec une intégration par parties.

3.3 Intégration sur un intervalle quelconque

3.3.1 Intégrale généralisée

Définition 3.3.1 *(i) Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et a un réel, on note $I = [a, b[$ si $a < b$ et $I =]b, a]$ si $b < a$. Soit f continue par morceaux sur I et F la fonction définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Si F admet une limite finie lorsque x tend vers b alors on note $\int_a^b f(t)\,dt$ cette limite et on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est* **une intégrale impropre (ou généralisée) convergente**.

(ii) Lorsque a et b sont dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $I =]a, b[$ si $a < b$ et $I =]b, a[$ si $b < a$, f continue par morceaux sur I. On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est **une intégrale impropre (ou généralisée) convergente** *si $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ le sont pour c point quelconque de I. On a alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.*

Remarque 3.3.2 *La définition (ii) ne dépend pas du choix de c puisque f est continue par morceaux sur I.*
Chercher l'erreur *$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$ car pour tout réel X $\int_{-X}^{X} x\,dx = 0$.*

Théorème 3.3.3 (Intégrale de Riemann) *$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : revenez à la définition et utilisez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

Remarque 3.3.4 *$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est* **toujours divergente**.

Remarque 3.3.5 *Il y a des résultats d'intégration par parties ou de changement de variable pour les intégrales généralisées mais lorsque l'on a besoin de les utiliser, la prudence est de plutôt de se ramener à la définition et donc de travailler avec l'intégrale sur un segment, de faire les changements ad-hoc puis de passer à la limite.*

Exercice 6
Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge. Pour la convergence "à l'infini" penser à une intégration par parties.

Proposition 3.3.6 *Soient f et g des fonctions* **positives** *continues par morceaux sur $[a, b[$ alors*

1. *S'il existe x_0 dans I tel que pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \leq g(x)$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\, dt$ converge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ converge.*
2. *S'il existe x_0 dans I tel que pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \leq g(x)$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge.*
3. *Si $f \sim_b g$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ convergent ou divergent simultanément.*

Démonstration : De la même façon que pour les séries, pensez qu'avec la positivité de f et g, les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ et $x \mapsto \int_a^x g(t)\, dt$ sont croissantes sur $[a, b[$.

Remarque 3.3.7 *Les cas 1. et 2. incluent le cas où $f \ll_b g$.*

Exercice 7 Retrouvez dans le cas de l'équivalence, comme pour les séries, des résultats sur l'équivalence de $\int_a^x f(t)\, dt$ et $\int_a^x g(t)\, dt$ dans le cas de la divergence ; sur l'équivalence de $\int_x^b f(t)\, dt$ et $\int_x^b g(t)\, dt$ dans le cas de la convergence.
Exercice 8
Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$ converge. Montrer que l'on a l'équivalence à l'infini, $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \sim \frac{e^{-x^2/2}}{2x}$, on pourra penser à utiliser que la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.

3.3.2 Fonctions intégrables à valeurs positives

Définition 3.3.8 *Une fonction f à valeurs réelles positives continue par morceaux sur un intervalle I est dite* **intégrable (ou sommable)** *sur I s'il existe un réel positif M tel que, pour tout* **segment** *J contenu dans I, $\int_J f \leq M$. On pose alors*
$$\int_I f = \sup_J \int_J f.$$

Proposition 3.3.9 *Soit f continue par morceaux et positive sur l'intervalle I, intégrable sur I, soit l'intervalle I' inclus dans I alors f est intégrable sur I' et $\int_{I'} f \leq \int_I f$.*

Démonstration : Idée, tout segment contenu dans I' est contenu dans I, si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$.

Proposition 3.3.10 *Si f est positive et continue par morceaux sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$, sur $[a, b[$, sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$ et de plus les intégrales correspondantes sur ces 4 intervalles sont égales, on les note aussi $\int_a^b f(t)\, dt$.*

Proposition 3.3.11 *Soit f une fonction continue par morceaux, positive sur l'intervalle I et (J_n) une suite croissante de segments contenus dans I tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$ alors les propositions suivantes sont équivalentes*

- *f est intégrable sur I*
- *la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est majorée*
- *la suite suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est convergente*

De plus dans le cas où f est intégrable sur I on a $\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_{J_n} f$.

Démonstration : idées, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est croissante ; de plus par hypothèse sur (J_n), pour tout segment $[a, b]$ contenu dans I il existe p et q tels que $a \in J_p$, $b \in J_q$ et alors puisque l'on travaille avec des intervalles $[a, b] \subset J_{\max\{p,q\}}$.

Corrolaire 3.3.12 *Soit f continue par morceaux et positive sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si la fonction définie sur $[a,b[$ par $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite lorsque x tend vers b.*
De même, si f continue par morceaux et positive sur $]a,b]$ alors f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si la fonction définie sur $]a,b]$ par $x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite lorsque x tend vers a.

Remarque 3.3.13 *Pour les fonctions continues par morceaux et* **positives** *il y a équivalence entre intégrabilité sur $[a,b[$ et convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que ce n'est plus le cas pour les fonctions de signe quelconque.*

Démonstration : Supposons f intégrable sur $[a,b[$, par positivité de f la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante, majorée car le segment $[a,x]$ est inclus dans l'intervalle $[a,b[$ pour tout x de $[a,b[$, elle admet donc une limite finie lorsque x tend vers b, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Réciproquement si cette intégrale converge alors en prenant $J_n = [a, b - \frac{1}{n}]$ pour $n \geq n_0$ de sorte que ces segments soient bien définis, $J_n \subset [a,b[$, nous avons que (J_n) est une suite croissante de segments, $\bigcup_{n \geq n_0} J_n = [a,b[$ et la suite $(\int_{J_n} f)$ converge vers la limite finie $\int_a^b f(t)\,dt$ donc avec la proposition 3.3.11, f est intégrable sur $[a,b[$.

Proposition 3.3.14 (Domination) *Soit f et g continues par morceaux et positives sur l'intervalle I, telles que $0 \leq f \leq g$. Alors g est intégrable sur I implique f est intégrable sur I.*

Proposition 3.3.15 *Si f et g sont continues par morceaux et positives sur l'intervalle I, intégrables sur I alors pour tout scalaire positif λ, $f + \lambda g$ est intégrable sur I et $\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$.*
Soit I un intervalle, a un point de I et f une fonction continue par morceaux et positive sur I, alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $I_1 = I \cap [a, +\infty[$ et sur $I_2 = I \cap]-\infty, a]$, de plus dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Démonstration : le premier point est une conséquence immédiate du résultat analogue sur les intégrales de Riemann. Le deuxième se démontre à l'aide de la proposition 3.3.11.

3.3.3 Fonctions intégrables à valeurs complexes

Définition 3.3.16 *Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur un intervalle I, est dite* **intégrable ou sommable** *sur I si $|f|$ est intégrable sur I.*

Proposition 3.3.17 (Domination) *Soit f et g continues par morceaux sur l'intervalle I, telles que $|f| \leq g$. Alors g est intégrable sur I implique f est intégrable sur I.*

Proposition 3.3.18 *f continue par morceaux et à valeurs réelles sur I alors f intégrable sur I si et seulement si $f^+ := \sup(f, 0)$ et $f^- := \sup(-f, 0)$ sont intégrables sur I. Dans ce cas on pose*

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

f continue par morceaux et à valeurs complexes sur I alors f intégrable sur I si et seulement si $\Re e f$ et $\Im m f$ sont intégrables sur I. Dans ce cas on pose

$$\int_I f = \int_I \Re e f + i \int_I \Im m f.$$

Proposition 3.3.19 – *On a encore la linéarité de l'intégrale, l'additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.*
- *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, alors f est intégrable sur $[a,b]$, sur $[a,b[$, sur $]a,b]$ et sur $]a,b[$ et de plus les intégrales correspondantes sur ces 4 intervalles sont égales, on les note aussi $\int_a^b f(t)\,dt$.*
- *Si f continue par morceaux sur l'intervalle I, à valeurs réelles ou complexes, et (J_n) une suite croissante de segments contenus dans I tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$ alors si f est intégrable sur I on a $\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_{J_n} f$.*
- *Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs réelles ou complexes, intégrable sur $[a,b[$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et est égale à $\int_{[a,b[} f$, on dit aussi dans ce cas que l'intégrale généralisée est* **absolument convergente**. *Résultat analogue avec l'intervalle $]a,b]$.*
- *Si f est continue par morceaux et intégrable sur I alors $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.*

– *Si f est continue par morceaux et intégrable sur I, si $I' \subset I$ alors f est intégrable sur I' et $\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f$, où $\chi_{I'}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I'.*

Exercice 9
Montrer que la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$ et qu'elle n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
Exercice 10
Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. **Cette fonction nous donne un exemple de fonction dont l'intégrale généralisée sur** $]0,+\infty[$ **converge mais qui n'est pas intégrable sur cet intervalle**.

3.4 Intégration et suites de fonctions

3.4.1 Cas de l'intégration sur un segment

Théorème 3.4.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions, à valeurs réelles ou complexes, continues sur $[a,b]$, qui converge* **uniformément** *sur $[a,b]$ vers f alors f est continue sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Démonstration :
Continuité de f : Soit x_0 un point de $[a,b]$ et ϵ un réel strictement positif, alors par convergence uniforme il existe n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$

$$\sup_{[a,b]} |f - f_n| \leq \epsilon$$

et par continuité de f_{n_ϵ}

$$\exists r > 0,\ x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap [a,b] \Rightarrow |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \leq \epsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| + |f_{n_\epsilon}(x_0) - f(x_0)|$$

on a alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists r > 0,\ x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 3\epsilon.$$

f continue en x_0 pour tout x_0 de $[a,b]$, soit f continue sur $[a,b]$.
Permutation limite et intégrale : En reprenant les notations ci-dessus, pour tout $n \geq n_\epsilon$

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt \right| \leq |b-a|\epsilon$$

d'où la convergence.

Théorème 3.4.2 *Soit (u_n) une suite de fonctions, à valeurs réelles ou complexes, continues sur $[a,b]$, telle que la série $\sum u_n$ converge* **uniformément** *sur $[a,b]$ vers f alors f est continue sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt.$$

Démonstration : appliquer le résultat précédent à la suite des sommes partielles.

3.4.2 Convergence dominée

Théorème 3.4.3 (Convergence dominée) *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur l'intervalle I. On suppose que*

1. *la suite (f_n) converge simplement vers f continue par morceaux sur I,*
2. *il existe φ positive, continue par morceaux sur I et intégrable sur I telle que pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$.*

Alors les fonction f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Ce résultat est admis, il se résume en “on peut permuter intégrale et limite”.

Corrolaire 3.4.4 *Soit (u_n) une suite de fonctions positives, continues par morceaux sur l'intervalle I. Si la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux et intégrable sur I alors la série de terme général $\int_I u_n$ est convergente et*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

Démonstration : appliquer le théorème 3.4.3 à la suite de fonctions de terme général $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Théorème 3.4.5 (Convergence dominée pour les séries) *Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur l'intervalle I et intégrables sur I. Si la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et si la série $\sum \int_I |u_n|$ converge alors f est intégrable sur I et*

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

Ce résultat est admis, il se résume en “on peut permuter intégrale et somme”.

3.5 Intégrales à paramètre

3.5.1 Cas des intégrales sur un segment

Théorème 3.5.1 (Continuité) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur $A \times [a, b]$ où A est un compact de $\mathbb{R}^m$, alors l'application*

$$x \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est continue sur A.

Démonstration : il suffit de montrer que pour tout x fixé dans A et toute suite (x_n) de points de A qui converge vers x alors la suite $(\int_a^b f(x_n, t)\, dt)_n$ converge vers $\int_a^b f(x, t)\, dt$. C'est une conséquence du théorème 5.1.8 avec $f_n = f(x_n, \cdot)$ puisque la continuité de f sur le compact $A \times [a, b]$ implique la continuité uniforme de f et donc la convergence uniforme sur $[a, b]$ de la suite (f_n) vers $f(x, \cdot)$.

Théorème 3.5.2 (Dérivation) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times [a, b]$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors l'application g définie sur I par*

$$g(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

Démonstration : Dans le même esprit que celle de 3.5.5, en n'oubliant pas que la dérivabilité est une propriété locale.

3.5.2 Cas des intégrales sur un intervalle quelconque

Théorème 3.5.3 (Continuité d'une intégrale à paramètre) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$ où A est une partie de $\mathbb{R}^m$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose que*

1. *pour tout t de I, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A,*
2. *pour tout x de A, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I,*
3. *il existe φ continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I telle que pour tout x de A, $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$.*

Alors pour tout x de A, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I et l'application

$$x \mapsto \int_I f(x, t)\, dt$$

est continue sur A.

Démonstration : L'intégrabilité de $f(x,\cdot)$ est immédiate avec les hypothèses 2. et 3. Pour la continuité, il suffit de montrer que pour tout x fixé dans A et toute suite (x_n) de points de A qui converge vers x alors la suite $(\int_I f(x_n,t)\,dt)_n$ converge vers $\int_I f(x,t)\,dt$. C'est une conséquence du théorème 3.4.3 avec $f_n = f(x_n,\cdot)$.

Remarque 3.5.4 *On peut réduire l'hypothèse 3. en n'ayant la domination que sur toute partie compacte K de A (la fonction qui domine dépend alors du compact K) puisque la continuité est une propriété locale.*

Théorème 3.5.5 (Dérivabilité d'une intégrale à paramètre) *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$ où A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose que*

1. *pour tout x de A, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I,*
2. *pour tout t de I, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continument dérivable sur A,*
3. *pour tout x de A, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I*
4. *il existe φ continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I telle que pour tout x de A, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)| \leq \varphi$.*

Alors l'application g définie sur A par

$$g(x) = \int_I f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Démonstration : Pour a fixé arbitraire dans A, on va montrer que pour toute suite de points (a_n) qui converge vers a alors la suite $\left(\frac{g(a_n)-g(a)}{a_n-a}\right)$ converge vers $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt$ ce qui permettra de dire que g est dérivable en a et que $g'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt$.

$$\frac{g(a_n)-g(a)}{a_n-a} = \int_I \frac{f(a_n,t)-f(a,t)}{a_n-a}\,dt.$$

On pose $g_n(t) = \frac{f(a_n,t)-f(a,t)}{a_n-a}$, avec le théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto f(x,t)$, il existe c_n compris entre a_n et a tel que

$$g_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_n,t).$$

On applique alors le théorème 3.4.3 à la suite de fonctions (g_n) pour g_n définie ci-dessus. La suite (g_n) converge simplement vers $\frac{\partial f}{\partial x}(a,\cdot)$ par continuité de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et elle est dominée grâce à l'hypothèse 4.

Remarque 3.5.6 *On peut encore se contenter de dominer sur tout compact de A.*

Exercice 11
a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ converge pour tout x strictement positif. On note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x strictement positif

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour n dans $\mathbb{N}$.
c*) Montrer par récurrence que Γ est dans $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ et que

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

3.6 Exercices

Exercice 12 (lemme de Lebesgue).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, on rappelle qu'il existe une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0$ (ind. : commencer par supposer f en escaliers).
b) Donner une autre démonstration du résultat précédent si l'on suppose que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Exercice 13
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier n, $\int_a^b f(t)t^n\,dt = 0$.
a) Montrer que pour toute fonction polynômiale P, $\int_a^b f(t)P(t)\,dt = 0$ puis que $\int_a^b f^2(t)\,dt \leq \int_a^b (f-P)^2(t)\,dt$.
b) En déduire que $f = 0$.
Exercice 14 (Inégalité de Jensen)
Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et ϕ une fonction convexe et continue sur $f([a,b])$. En utilisant les sommes de Riemann, montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))\,dt.$$

Quelle inégalité retrouvez-vous lorsque ϕ est la fonction valeur absolue ?
Exercice 15 (formules de la moyenne).
a) Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continue par morceaux et de signe constant sur $[a,b]$, g continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt.$$

Qu'obtient-on comme relation lorsque $f = 1$?
b) f est maintenant suposée de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est de signe constant sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt.$$

(ind. considérer la fonction auxiliaire $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$.)
Exercice 16
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continument dérivable. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.
a) En faisant le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2 calculer I_2 en fonction de I_1. Interprétation géométrique ?
b) Retrouvez ce résultat si f est continue et strictement croissante en utilisant les sommes de Riemann pour une subdivision bien choisie.
Exercice 17 (Intégrale de Wallis)
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ (on sera amené à distinguer n pair et n impair).
b) En considérant la suite $(nI_nI_{n-1})_n$, trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
c) Si on suppose connue l'équivalence

$$n! \sim C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

déduire de ce qui précède la valeur de C. (Pour mémoire ce résultat admis peut s'obtenir à l'aide d'un développement asymptotique de $\ln(n!)$).
Exercice 18
En calculant $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$ de deux façons différentes, montrer que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}$.
Exercice 19
Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^p(1-t/n)^n dt$.
Exercice 20
Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ telle que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que si f admet une limite l en $+\infty$ alors $l = 0$. A-t-on en général $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
Exercice 21
Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :
a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\,dt$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ (on pourra par exemple faire une intégration par parties) c) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$; d) $\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}$; e) $\int_0^1 \ln t\,dt$ (la calculer) ; f) $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ (la calculer) ; g) $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$; h) $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$; i) $\int_1^{+\infty} \frac{(t+1)^{1/3}-t^{1/3}}{\sqrt{t}}\,dt$; j) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$; k) $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$.
Exercice 22
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$.
1) Montrer que pour tout n, I_n est bien définie et trouver pour $n \geq 2$ une relation entre I_n et I_{n-2}.

2) On admet que $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Trouver I_n en fonction de n.
Exercice 23
1) Démontrer que toute intégrale absolument convergente est convergente.
2) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles et telles que les intégrales $\int_a^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |g(t)|^2 \, dt$ convergent. Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) \, dt$ converge.
3) On note $L^2([a, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles et telles que $\int_a^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$ converge, montrer que $L^2([a, +\infty[)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application définie de $\left(L^2([a, +\infty[)\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ par $(f \mid g) := \int_a^{+\infty} f(t)g(t) \, dt$ est un produit scalaire.
4) Y-a-t'il un lien entre la convergence de $\int_a^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$ et celle de $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$?
Exercice 24
1) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$.
2) Montrer que si f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ alors l'intégrale

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx = 0.$$

(On pourra faire une intégration par parties.)
3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \, dx.$$

a) Justifier la convergence de l'intégrale I_n.
b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_n = I_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n, $n \geq 0$.
On pourra utiliser l'égalité $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$.
4) Soit f l'application définie de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \text{ si } 0 < x \leq \pi \text{ et } f(0) = 0.$$

a) Donner le développement limité de $\frac{2 \sin(\frac{x}{2})}{x}$ en 0, à l'ordre 2.
b) Montrer que f est de classe C^1.
5) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$.
Exercice 25
Soient F et G définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt\right)^2 \text{ et } G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} \, dt.$$

a) Montrer que ces fonctions sont dérivables, calculer leur dérivées et en déduire que $F' + G' = 0$.
b) Calculer $F(0) + G(0)$.
c) Montrer que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} G(x) = 0$.
d) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Exercice 26 (Transformée de Fourier)
Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de f est définie par : $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$.
1) Montrer que $\hat{f}$ est continue.
2) On suppose que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)| dt < +\infty$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.
3) On pose $g_n(x) = \int_{-n}^{n} f(t) e^{-ixt} dt$. Montrer que $\lim_{|x| \to +\infty} g_n(x) = 0$.
(On pourra montrer d'abord ce résultat pour une une fonction de classe C^1 et approcher ensuite f par des polynômes.)
4) Montrer que g_n converge uniformément vers $\hat{f}$ et en déduire ensuite que $\lim_{|x| \to +\infty} \hat{f}(x) = 0$.
Exercice 27
Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha |x|}$. Calculer la transformée de Fourier de f.
Exercice 28
Soit $f(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $\hat{f}$ satisfait une équation différentielle du premier ordre.
3) Déterminer $\hat{f}$.

Exercice 29 (Transformée de Laplace)

On suppose que $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Soit $F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\,dt - \lim_{y\to+\infty}\int_{[0,y]} f(t)\,dt$ et soit $\lambda > 0$. Montrer que $\int_{[0,x]} f(t)e^{-\lambda t}\,dt = \left[F(t)e^{-\lambda t}\right]_0^x + \lambda\int_{[0,x]} F(t)e^{-\lambda t}\,dt$. En déduire que, pour tout $\lambda > 0$, $L_f(\lambda) = \lim_{x\to\infty}\int_{[0,x]} f(t)e^{-\lambda t}\,dt$ existe.

Montrer que $\lambda\int_{[0,+\infty[} F(t)e^{-\lambda t}\,dt = \int_{[0,+\infty[} F(u/\lambda)e^{-u}\,du \to 0$ quand $\lambda\to 0$, et en déduire que $L_f(\lambda)\to\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ quand $\lambda\to 0$.

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

4.1 Généralités

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1.1 *On appelle* ***norme*** *sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant*

(i) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Exemple 4.1.2

1. *La valeur absolue, notée $|\cdot|$, est une norme sur $\mathbb{R}$.*
2. *Le module, noté $|\cdot|$, est une norme sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*
3. *On note $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ alors les applications N_1, N_2 et N_∞ définies sur $\mathbb{K}^n$ par*
$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad N_2(x) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}, \quad N_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.
4. *On note $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors les applications définies par*
$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\, dt, \quad N_2(f) = (\int_a^b |f(t)|^2\, dt)^{1/2}, \quad N_\infty(f) = \sup_{[a,b]} |f|$$
sont des normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
5. *On note $l^1 = \{u = (u_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sum_i |u_i| < +\infty\}$, $l^2 = \{u = (u_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sum_i |u_i|^2 < +\infty\}$ et $l^\infty = \{u = (u_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sup_i |u_i| < +\infty\}$ ainsi que*
$$N_1(u) = \sum_i |u_i|, \quad N_2(u) = (\sum_i |u_i|^2)^{1/2}, \quad N_\infty(u) = \sup_i |u_i|.$$
Alors N_1 est une norme sur l^1, N_2 sur l^2 et N_∞ sur l^∞.
6. *Si E est un espace préhilbertien réel ou complexe, en notant $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire ou hermitien sur E^2 alors l'application N définie sur E par $N(x) = (x|x)^{1/2}$ est une norme sur E, de plus $N(x) = \sup_{N(y) \leq 1} |(x|y)|$.*
7. *Soit (E_i, N_i), pour i compris entre 1 et n, des espaces vectoriels normés alors (E, N) est un espace vectoriel normé avec $E = E_1 \times \cdots E_n$ et $N = \sup_{1 \leq i \leq n} N_i$. On dira alors que l'espace produit est muni de sa* ***norme produit usuelle****.*

Proposition 4.1.3 (Inégalité triangulaire) *Soit (E, N) un espace vectoriel normé alors*
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Corrolaire 4.1.4 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé alors*
$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad |N(x - y) - N(x - z)| \leq N(y - z).$$
Pour tout x de E fixé, la fonction définie sur E par $y \mapsto N(x - y)$ est continue et lipschitzienne.

Démonstration : à faire.

Définition 4.1.5 (Normes équivalentes) *On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont* ***équivalentes*** *s'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que*

$$\forall x \in E, \quad mN_2(x) \leq N_1(x) \leq MN_2(x).$$

Exercice 1 : Dans les exemples de normes ci-dessus montrer que les normes du *(3)* sont équivalentes, que les normes du *(4)* ne sont pas équivalentes (on pourra prendre $[a,b] = [0,1]$ et $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1/n}}$).

Définition 4.1.6 (Distance associée) *Soit (E,N) un espace vectoriel normé, l'application d définie sur E^2 par*

$$d(x,y) = N(x-y)$$

est appelée ***distance associée*** *à N.*

Exercice 2 : Montrer que d est bien une distance sur E^2.

Définition 4.1.7 (Boules et sphères) *Soit (E,N) un espace vectoriel normé, on appelle*
- ***boule ouverte*** *de centre $a \in E$ et rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E,\ N(x-a) < r\}$,*
- ***boule fermée*** *de centre $a \in E$ et rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble $B_f(a,r) = \{x \in E,\ N(x-a) \leq r\}$,*
- ***sphère*** *de centre $a \in E$ et rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E,\ N(x-a) = r\}$.*

Définition 4.1.8 (Parties bornées) *Soit (E,N) un espace vectoriel normé.*
Une partie F de E est dite ***bornée*** *s'il existe $M > 0$ tel que $F \subset B_f(0,M)$.*
Une application $f\ :\ A \to E$ est dite ***bornée*** *si $f(A)$ est une partie bornée de E.*

Définition 4.1.9 (Distance à une partie) *Soit (E,N) un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. On note*
$d(x,A) = \inf\{N(x-y),\ y \in A\}$
$d(A,B) = \inf\{N(x-y),\ x \in A,\ y \in B\}$

Exercice 3 : Montrer que l'application définie sur E par $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq N(x-y)$.

4.2 Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition 4.2.1 – *Une partie V de E est un* ***voisinage*** *de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$.*
- *Une partie O de E est un* ***ouvert*** *si elle est un voisinage de chacun de ses points.*
- *Une partie F de E est un* ***fermé*** *si $E \setminus F$ est un ouvert de E.*
- *a est un* ***point intérieur*** *de A si A est un voisinage de a. L'ensemble des points intérieurs d'une partie A est noté $\mathring{A}$.*
- *a est un point* ***adhérent*** *à A si pour tout $r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents d'une partie A est noté $\overline{A}$.*
- *On appelle* ***frontière*** *de A l'ensemble des points adhérents à A et qui ne sont pas dans l'intérieur de A, soit $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Proposition 4.2.2 – *E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.*
- *La boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert.*
- *La boule fermée $B_f(a,r)$ est un fermé.*
- *La sphère $S(a,r) = Fr(B(a,r)) = Fr(B_f(a,r))$.*
- *Une union quelconque d'ouverts est ouverte.*
- *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*
- *Une intersection finie d'ouverts est ouverte.*
- *Une réunion finie de fermés est fermée.*
- *L'intérieur $\mathring{A}$ d'une partie A est la réunion de tous les ouverts inclus dans A, ou encore le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans A.*
- *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A est l'intersection de tous les fermés contenant A, ou encore le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A.*
- *Une partie A est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$.*
- *Une partie A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration : à faire.
Exercice 4 : Ecrire l'intervalle $]0,1[$ comme une réunion dénombrable d'intervalles fermés.

4.3 Etude locale d'une application, continuité

Dans cette partie (E, N) et (F, N') sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Définition 4.3.1 (Limite en un point) *Soit f une application d'une partie A de E dans F et $a \in \overline{A}$. On dit que f* **admet une limite** *en a s'il existe b dans F tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ N(x-a) \leq \delta \Rightarrow N'(f(x)-b) \leq \varepsilon.$$

On note $b = \lim_{a} f$ ou $b = \lim_{x \to a} f(x)$.
Si $a \in A$ alors f est dite **continue** *en a et dans ce cas $b = f(a)$.*
Soit P une partie de A et $a \in \overline{P}$ on dit que f **admet une limite en** a **suivant** P *si, $f_{|P}$, la restriction de f à P admet une limite en a.*

Remarque 4.3.2 *Lorsqu'elle existe la limite b est unique.*

Proposition 4.3.3 (Traduction en termes de voisinages) *Soit f une application d'une partie A de E dans F et $a \in \overline{A}$. Alors $b = \lim_{a} f$ si et seulement si pour tout voisinage W de b il existe un voisinage V de a tel que $f(A \cap V) \subset W$.*

Exercice 5 : Rappelez les résultats concernant la limite d'une application composée, les opérations algébriques sur les limites.

Définition 4.3.4 *Soit f une application d'une partie A de E dans F, on dit que f est* **continue sur** *A si elle est continue en tout point de A.*

Proposition 4.3.5 *Soit f une application d'une partie A de E dans F, les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) f est continue sur A.
(ii) Pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A.
(iii) Pour tout fermé C de F, $f^{-1}(C)$ est un fermé de A.

Démonstration : à faire, il suffit de revenir aux définitions.
Exercice 6 : Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces normés, f et g deux applications continues de E_1 dans E_2.
a) Montrer que $F := \{x \in E_1 \ : \ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E_1.
b) Montrer que si $f = g$ sur un ensemble A dense dans E_1 alors $f = g$ sur E_1.

4.4 Suites dans un espace vectoriel normé

Définition 4.4.1 *Une suite $u = (u_i) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite* ***convergente dans*** *(E, N) s'il existe un élément $l \in E$ tel que* $\lim_{n \to +\infty} N(u_n - l) = 0$.

Exercice 7 : Montrer que si une suite converge alors sa limite est unique.
Montrer que toute suite convergente est bornée.
Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

Proposition 4.4.2 *Soit E un espace vectoriel, muni des normes N_1 et N_2. Il y a équivalence entre la convergence dans (E, N_1) et dans (E, N_2) si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.*

Démonstration : à faire. Dans le cas où les normes ne sont pas équivalentes on pourra construire une suite qui converge vers 0 pour l'une des normes et qui ne converge pas pour l'autre.

Proposition 4.4.3 *Soit A une partie de E.*
Si une suite de points de A converge dans E vers l alors $l \in \overline{A}$.
Si $l \in \overline{A}$ alors il existe une suite de points de A qui converge vers l.

Définition 4.4.4 *l est dite* ***valeur d'adhérence*** *de la suite $u = (u_i)$ s'il existe une suite extraite de u qui converge vers l. C'est-à-dire s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(i)})$ converge vers l.*

Proposition 4.4.5 (Caractérisation séquentielle de la limite) *Soit f une application d'une partie A de E dans F et $a \in \overline{A}$. Alors f admet une limite en a si et seulement si pour tout suite (a_n) de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ de F est convergente.*

Démonstration : à faire. La condition nécessaire découle des définitions, pour la condition suffisante on pourra commencer par monter que si $(f(a_n))$ converge vers b et $(f(a'_n))$ converge vers b' alors $b = b'$.

4.5 Complétude

Définition 4.5.1 (Suite de Cauchy) *Une suite $u = (u_i)$ de E est dite **de Cauchy** si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad N(u_{n+p} - u_n) < \varepsilon.$$

Remarque 4.5.2 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 4.5.3 *Un espace vectoriel normé (E, N) est dit de **Banach** si toute suite de Cauchy converge. Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite **complète** si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.*

Remarque 4.5.4 *Un espace préhilbertien complet est appelé **espace de Hilbert**.*

Exemple 4.5.5

1. *$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.*
2. *$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet.*
3. *Soit (E_i, N_i), pour i compris entre 1 et n, des espaces de Banach alors (E, N) est un espace de Banach avec $E = E_1 \times \cdots E_n$ et $N = \sup_{1 \leq i \leq n} N_i$.*
4. *$\mathbb{K}^n$ muni des normes N_1 ou N_2 ou N_∞ (cf. exemple 4.1.2) est un espace de Banach.*
5. *$(\mathcal{C}([a, b]), N_\infty)$ est un espace de Banach (cf. exemple 4.1.2). La convergence pour cette norme correspond à la convergence uniforme sur $[a, b]$.*
6. *$(\mathcal{C}([a, b]), N_i)$ pour $i = 1,\ 2$ n'est pas complet (considérer par exemple $\mathcal{C}([0, 1])$ et la suite (f_n) de fonctions affines par morceaux telles que $f_n(x) = 1$ pour $x \in [0, 1/2]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \in [1/2 + 1/n, 1]$).*
7. *(l^1, N_1), (l^2, N_2) et (l^∞, N_∞) sont des espaces de Banach. Lequel est un espace de Hilbert ?*

Proposition 4.5.6

(i) Toute partie fermée A d'un espace de Banach est complète.

(ii) Toute partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.

Démonstration : à faire en revenant aux définitions et penser que toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition 4.5.7 (Fermés emboités) *Soit (E, N) un espace de Banach et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de E de diamètre $\delta(F_n) := \sup\{N(a - b),\ (a, b) \in F_n^2\}$ tendant vers 0. Alors l'intersection $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est réduite à un point.*

Démonstration : Considérer une suite (x_n) avec $x_n \in F_n$ et montrer qu'elle est de Cauchy.

Théorème 4.5.8 (Théorème du point fixe) *Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé (E, N) et f une application contractante de A dans A. Alors f admet un unique point fixe dans A.*

Démonstration : f contractante de A dans A signifie que $f(A) \subset A$ et il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad N(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y).$$

Pour l'existence construire la suite (x_n) définie par $x_0 \in A$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifier qu'elle est de Cauchy et conclure. L'unicité découle directement de f contractante.

4.6 Compacité

Définition 4.6.1 (séquentielle) *Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite **compacte** si elle est vide ou si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A.*

Proposition 4.6.2

(i) Une partie compacte est fermée.

(ii) Un fermé dans une partie compacte est compact.

(iii) Une union finie de compacts est compacte.

(iv) Une intersection quelconque de compacts est compacte.

(v) Si F_n est une suite décroissante de compacts non vides alors $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un compact non vide.

Démonstration : à faire.

Proposition 4.6.3 *Dans un espace vectoriel normé, tout compact est borné.*

Démonstration : sinon construire une suite (x_i) telle que pour tout $i \neq j$, $N(x_i - x_j) \geq 1$ et en déduire une contradiction.

Proposition 4.6.4 – *Soit E un espace vectoriel muni des normes équivalentes N_1 et N_2, alors les compacts de (E, N_1) sont les compacts de (E, N_2).*
– *Un produit fini de parties compactes est compact.*

Proposition 4.6.5 *Une partie compacte est complète.*

Démonstration : Que penser d'une suite de Cauchy qui a au moins une valeur d'adhérence ?

Remarque 4.6.6 *La réciproque est fausse, on peut considérer par exemple $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Théorème 4.6.7 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Démonstration : On sait déjà que les compacts sont fermés et bornés. Il reste à montrer que dans $\mathbb{R}$ tous les fermés bornés sont compacts, c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weiestrass.

Corrolaire 4.6.8 *Les compacts de $\mathbb{K}^N$ sont les fermés bornés.*

Démonstration : Conséquence de la proposition 4.6.4 et du théorème 4.6.7.

Théorème 4.6.9 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie compacte de E et une application f continue de A dans F alors*

1. *f est uniformément continue sur A. (Th. de Heine)*
2. *$f(A)$ est une partie compacte de F.*
3. *f est bornée et atteint ses bornes.*
4. *Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, f est majorée et minorée et il existe a et b dans A tels que $f(a) = \min_{x \in A} f(x)$, $f(b) = \max_{x \in A} f(x)$.*
5. *Si de plus f est injective alors elle réalise un homéomorphisme de A sur $f(A)$.*

Démonstration : A faire. Pour le *(1)* supposer le contraire et en déduire une contradiction. Pour *(2)* revenir aux définitions, *(3)* et *(4)* s'obtiennent en utilisant la définition du sup et inf et en utilisant la continuité de f. Pour *(5)*, f est donc une bijection de A sur $f(A)$, il reste à montrer la continuité de f^{-1}, qui s'obtient en montrant que pour tout fermé F de A (fermé dans un compact donc compact) alors $f(F)$ est un fermé de $f(A)$ (compact comme image de compact par une application continue).
Exercice 8 : Soit (x_n) une suite d'un espace normé E, convergeant dans E vers x. Montrer que l'ensemble $\{x_n\} \cup \{x\}$ est compact dans E. Quelle autre démonstration peut-on donner si E est de dimension finie ?
Exercice 9 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\pi |f(t)|^2 dt}$. Posons $f_n(t) = \sin(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \pi]$. Calculer $\|f_n\|_2$ et $\|f_p - f_q\|_2$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que la boule fermé $B(0, \sqrt{\pi/2})$ n'est pas compacte et en déduire qu'aucune boule fermée de E n'est compacte. Quelle propriété de E explique cette situation ?

4.7 Connexité

Définition 4.7.1 *Une partie A de E est dite* **connexe par arcs** *si, pour tout couple (x, y) de points de A, il existe une application f continue de $[0, 1]$ dans A telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.*

Proposition 4.7.2

1. *Une partie étoilée est connexe par arcs.*
2. *Un convexe est connexe par arcs.*
3. *Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*
4. *Soit A une partie connexe par arcs de E et une application g continue de A dans F alors $g(A)$ est connexe par arcs.*
5. *Soit A une partie connexe par arcs de E et une application g continue de A dans $\{0, 1\}$, alors g est constante.*

Démonstration : *(3)* est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
Pour *(5)*, considérer deux points x et y de A, f l'application continue de $[0, 1]$ dans A telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Par composition $g \circ f$ est continue de $[0, 1]$ dans $\{0, 1\}$ donc constante et $g(x) = g \circ f(0) = g \circ f(1) = g(y)$.
Exercice 10 : Redémontrer à l'aide de la connexité par arcs que toute fonction f continue et injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone. Pour cela on pourra considérer l'application F définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $F(x, y) = f(x) - f(y)$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > y\}$, que dire de $F(C)$?

4.8 Applications linéaires continues

Définition 4.8.1 (Application linéaire) *Soit E et F deux espaces vectoriels, une application f de E dans F est dite **linéaire** si*

$$\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2 \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F sera noté $L(E, F)$.

Remarque 4.8.2 *$L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Proposition 4.8.3 (Caractérisation des applications linéaires continues) *Soit (E, N) et (F, N') des espaces vectoriels normés et f une application **linéaire** de E dans F alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue sur E.

(ii) f est continue en 0.

(iii) f est bornée sur la boule unité fermée $B_f(0, 1)$.

(iv) f est bornée sur la sphère unité $S(0, 1)$.

(v) f est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe k tel que pour tout x de E, $N'(f(x)) \leq kN(x)$.

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F sera noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration : à faire.

Remarque 4.8.4 *$\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$.*
Lorsque $E = F$ nous noterons l'espace des applications linéaires continues de E dans E : $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 11 : Montrer que les normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si l'application linéaire identité de (E, N_1) dans (E, N_2) est bi-continue.

Théorème 4.8.5 (Norme subordonnée) *Soit (E, N) et (F, N') des espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors*

$$\|f\|_{N,N'} := \sup_{N(x)\leq 1} N'(f(x)) = \sup_{N(x)=1} N'(f(x)) = \sup_{x\neq 0} \frac{N'(f(x))}{N(x)}$$

et $\|\cdot\|_{N,N'}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ appelée norme subordonnée.

Démonstration : à faire.

Remarque 4.8.6 *Afin d'alléger les notations nous noterons en général $\|\cdot\|$ mais il ne faut pas oublier que cette norme dépend des normes de E et F.*

Proposition 4.8.7

1. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|f\| \, \|g\|$.*
2. *La norme subordonnée est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration : à faire.

Théorème 4.8.8 *Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Démonstration : prendre une suite de Cauchy (f_n) dans $\mathcal{L}(E, F)$, en déduire que pour tout $x \in E$ $(f_n(x))$ est de Cauchy dans F complet et ainsi que la limite $f(x)$ existe. Bien faire attention que l'on n'a pas fini, reste à montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que la convergence a lieu **pour la norme** $\|\cdot\|$.
La linéarité résulte de celle des fonctions f_n et d'un passage à la limite ponctuelle.
Pour la convergence au sens de $\|\cdot\|$, il résulte de la définition de la norme subordonnée et du fait que la suite (f_n) est de Cauchy pour cette norme que

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, p \geq n_0 \quad \forall x \in S_E(0, 1) \quad N_F(f_n(x) - f_p(x)) \leq \epsilon$$

Puis en faisant tendre p vers $+\infty$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in S_E(0, 1) \quad N_F(f_n(x) - f(x)) \leq \epsilon$$

soit $\|f_n - f\| \leq \epsilon$. On a ainsi que f est bornée sur $S_E(0, 1)$ donc continue et que la convergence a lieu pour la norme subordonnée.

Définition 4.8.9 (Application bilinéaire) *Soient (E_i, N_i) $(i = 1, 2)$ et (F, N') des espaces vectoriels normés alors l'application $u \ : \ E_1 \times E_2 \to F$ est dite **bilinéaire** si pour tout (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$ les applications partielles $x \mapsto u(x, x_2)$ et $x \mapsto u(x_1, x)$ sont linéaires.*

Proposition 4.8.10 (Caractérisation des applications bilinéaires continues) *Soient (E_i, N_i) $(i = 1, 2)$ et (F, N') des espaces vectoriels normés et u une application **bilinéaire** de $E_1 \times E_2$ dans F alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est continue sur $E_1 \times E_2$.

(ii) u est continue en $(0, 0)$.

(iii) Il existe k tel que pour tout (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$, $N'(u(x_1, x_2)) \leq kN_1(x_1)N_2(x_2)$.

L'ensemble des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans F sera noté $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$.

Exemple 4.8.11 *– L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E est bilinéaire continue.*
– Si E est un espace préhilbertien de norme, la norme associée au produit scalaire, alors l'application $(x_1, x_2) \mapsto (x_1|x_2)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire continue.
– L'application $(f, g) \mapsto f \circ g$ de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ est bilinéaire continue.

4.9 Cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 4.9.1 (Equivalence des normes) *Sur un espace vectoriel E de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration : On note $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E alors l'application définie par $N(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ est une norme sur E et (E, N) est isomorphe à $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$, via l'application définie par $\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Une conséquence importante de cet isomorphisme est que les fermés bornés de (E, N) sont des compacts.
On prend une autre norme N' sur E et on montre que N et N' sont équivalentes.
L'inégalité $N' \leq \alpha N$ est facile à obtenir et permet aussi d'en déduire que l'application N' de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue (à faire).
Pour l'inégalité $N \leq \beta N'$ on utilisera que N' est bornée et atteint ses bornes sur le compact $S(0, 1)$ de (E, N) (c'est ici que l'on a besoin de savoir que les fermés bornés de (E, N) sont compacts).
Terminer avec l'équivalence de deux normes quelconques.

Théorème 4.9.2 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Démonstration : A faire.

Théorème 4.9.3 (de Riesz) *Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si les compacts sont les fermés bornés.*

Démonstration : La condition nécessaire a déjà été vue.
Pour la condition suffisante on suppose que l'espace n'est pas de dimension finie et on construit alors par récurrence une suite (x_n) de la sphère unité $S(0, 1)$ telle que pour tout $i \neq j$, $N(x_i - x_j) \geq 1$ ce qui permet de dire que le fermé borné $S(0, 1)$ n'est pas compact.
Montrons l'hérédité, on suppose $x_1, \ldots, x_n$ construits comme ci-dessus et on pose $F = \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$. E n'étant pas de dimension finie, la sphère unité de E n'est pas incluse dans F (sinon puisque F est un espace vectoriel E serait inclus dans F), on note y un point de $S(0, 1) \setminus F$.
F est un espace vectoriel de dimension finie donc complet (toutes les normes sont équivalentes), en conséquence il existe x dans F tel que $\mathrm{dist}(y, F) = N(y - x) > 0$. Le point $x_{n+1} := \frac{y-x}{N(y-x)}$ convient.

Proposition 4.9.4 (Continuité des applications linéaires, bilinéaires) .
(i) Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et (F, N') un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire de (E, N) dans (F, N') est continue.
(ii) Soit (E_1, N_1) et (E_2, N_2) des espaces vectoriels normés de dimension finie et (F, N') un espace vectoriel normé, alors toute application bilinéaire de $(E_1 \times E_2, N)$ dans (F, N') est continue.

Démonstration : à faire.

4.10 Exercices

Exercice 12 : Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$, on note N une norme sur $\mathbb{R}^n$.
a) Soit x un point de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe y dans F tel que $N(x-y) = \mathrm{dist}(x,F)$.
b) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe a dans K et b dans F tels que $N(a-b) = \mathrm{dist}(K,F)$.
Exercice 13 : Soit $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni des applications $N_1 : X \to \mathbb{R}^+$, $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $N_\infty : X \to \mathbb{R}^+$, $f \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Vérifier que ces deux applications définissent bien des normes sur $C([0,1])$. On définit une suite de fonctions $(f_n)_n$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - n(t - \frac{1}{2}) & t \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & t \in]\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

a) Calculer $N_1(f_n - f_{n+p})$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Est-ce que la suite $(f_n)_n$ converge dans l'espace $C([0,1])$ muni de la norme N_1 (notons cet espace $(C([0,1]), N_1)$) ? Est-ce que $(C([0,1]), N_1)$ est un espace complet ?
b) Est-ce que la suite $(f_n)_n$ converge dans $(C([0,1]), N_\infty)$?
c) Les normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes sur $C([0,1])$?
d) Soit $(g_n)_n$ la suite définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$. Converge-t-elle dans $(C([0,1]), N_1)$? Le cas échéant, quelle est sa limite ?
Exercice 14 : Soit $X = \mathcal{C}^1([0,1])$.
1) X est-il complet si on le munit de la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$?
2) Pour $f \in X$, on pose $\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. L'espace $(X, \|.\|_1)$ est-il complet ?
Exercice 15 :
Soit l l'espace des suites $\{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (n+1)|x_n|^2} < \infty\}$. On admet que l muni de $\|\cdot\|$ est un espace vectoriel normé.
1) Soit $(x^{(n)})_n$ une suite de Cauchy dans $(l, \|\cdot\|)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x_k^{(n)})_n$ admet une limite, on note x_k cette limite. Soit $\epsilon > 0$, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $\sum_{k=1}^m (k+1)|x_k^{(n)} - x_k|^2 < \epsilon$. En déduire que $x = (x_k)_k \in l$ (on pourra utiliser le fait qu'une suite de Cauchy est bornée), puis que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ dans $(l, \|\cdot\|)$. Conclusion ?
2) Soit $S : l \to l$, $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$. Montrer que S est une application linéaire et continue. Calculer sa norme.
3) Soit $T : l \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n x_n$ avec $a \in l$. Montrer que S est une application linéaire et continue. Calculer sa norme.
Exercice 16 : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure d'espace vectoriel euclidien. Calculer les normes induites par la norme de $\mathbb{R}^n$ des applications suivantes.
1. $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (a, x)$, où $a \in \mathbb{R}^n$ est fixé.
2. $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \wedge x$, où $a \in \mathbb{R}^3$ est fixé.
3. Soit $n = 2$, et soient D_1, D_2 deux droites de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ non-confondues et non-orthogonales. Si P est la projection oblique de $\mathbb{R}^2$ sur D_1 parallèlement à D_2 calculer $\|P\|$.
Exercice 17 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$. Déterminer la norme induite de f_A si on muni $\mathbb{R}^n$ de
a) $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ (réponse $\|f_A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} (\sum\limits_{k=1}^n |a_{kj}|)$).
b) $\|X\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|$ (réponse $\|f_A\|_\infty = \max\limits_{1\leq k\leq n} (\sum\limits_{j=1}^n |a_{kj}|)$).
Exercice 18 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels. On considère sur E l'application

$$N \;\; P \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}.$$

1) Montrer que c'est une norme sur E.
2) Soit $D : E \to E$, $P \mapsto P'$. En calculant $N(e_k)$ et $N(De_k)$ pour $e_k = X^k/k$, montrer que D n'est pas continue en 0. En déduire que D n'est continue en aucun point.
Exercice 19 : On munit $C([0,1])$ de la norme sup et $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. a) Montrer que $T_1 : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 tf(t)\,dt$ est linéaire et continue. Quelle est sa norme induite ?
b) Soit $T_2 : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$. Après avoir vérifié que T_2 est linéaire et continue, calculer sa norme induite.
Exercice 20 : Soit $X = \mathcal{C}([0,1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que la forme linéaire L définie sur X par $L(f) = f(0)$ n'est pas continue.
Exercice 21 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$, muni de la norme sup. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$ et $T_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1) Vérifier que T et T_n sont des applications linéaires. Calculer $\|T\|$ et $\|T_n\|$.
2) Montrer que pour tout $f \in E$, $T_n(f) \to T(f)$. A-t-on $\|T_n - T\| \to 0$?
Exercice 22 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$ ($\|.\|_\infty$) et soit $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $Tf = g$ où g est définie par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,1]$.
1) Montrer que T est une application linéaire continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(F, \|.\|_\infty)$ et calculer sa norme.
2) Soit $T^n = T \circ T \circ ... \circ T$ n–fois. Montrer que $(T^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!})f(t)dt$.
3) Calculer $\|T^n\|$.
4) Montrer que la série de terme général T^n converge dans $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa limite $S = \sum_{n=1}^\infty T^n$.
5) Soit $g \in E$. Montrer qu'il existe $f \in E$ unique tel que $(Id_E - T)f = g$.
Exercice 23 : Soit $X = \{f \in C(\mathbb{R}) : x \mapsto (1+x^2)|f(x)|$ soit bornée$\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que c'est une norme, puis montrer que la forme linéaire $L : X \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est continue et calculer sa norme.
Exercice 24 : Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $f \in E$. Pour $f \in E$, soit $\varphi(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{1 + |f(t)|}\,dt$. Montrer que φ admet un unique point fixe $f_0 \in E$ (on pourra montrer que φ est contractante). Déterminer f_0 (se ramener à une équation différentielle).
Exercice 25 (Fonction exponentielle sur un espace de Banach.) : Soit $A \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. On suppose que la norme vérifie la condition de sous-multiplicativité $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
1. $\exp(A) := \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!} A^n$ converge normalement et que $\|\exp(A)\| \le \exp \|A\|$. En déduire que $\exp(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = I$ et $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si $AB = BA$.
3. (Bonus) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \to \exp(tA)$ est différentiable et calculer sa dérivée.
4. si λ est valeur propre de A alors $\exp(\lambda)$ est valeur propre de $\exp(A)$.
5. Calculer $\exp(A)$ pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Exercice 26 : (extrait du CAPES 1990) Soit l^2 l'espace des suites complexes $z = (z_n)_n$ telles que $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^\infty |z_n|^2}$ converge. Soit $\psi : l^2 \to l^2$, $(u_n)_n \mapsto (\frac{n+1}{n+2} u_n)_n$.
a) Démontrer que ψ est un endomorphisme de l^2. Calculer sa norme.
b) Déterminer les nombres complexes λ tels que $\psi - \lambda I$ soit non injectif (où I est l'identité sur l^2).
c) Montrer que $\psi - I$ n'est pas surjectif, puis que, si λ n'appartient pas à $\{(n+1)/(n+2) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, alors $\psi - \lambda I$ est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}(l^2)$ des opérateurs linéaires continus sur l^2. En déduire le spectre $\sigma(\psi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \psi - \lambda I$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(l^2)\}$.
d) Calculer $\|\psi^{-1}\|$ (où $\|\cdot\|$ est la norme induite par $\|\cdot\|_2$). Vérifier enfin que $\sigma(\psi) \subset [\|\psi^{-1}\|^{-1}, \|\psi\|]$.
Exercice 27 : Polynômes de Legendre) Nous munissons $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n (où n est un entier naturel fixé) de la norme $\|p\|_2 = (\int_{-1}^1 |p(t)|^2\,dt)^{1/2}$. Justifiez rapidement que l'on obtient ainsi un espace de Hilbert. Soit $P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dt^j}(t^2-1)^j$. Calculer P_0, P_1, P_2.
a) Après avoir justifié que $P_j \in \mathbb{R}_n[X]$ pour $0 \le j \le n$, montrer que la famille $\{P_j\}_{k=0}^n$ forme une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], \|\cdot\|_2)$. Soit $K_j = P_j/\|P_j\|_2$, $0 \le j \le n$. Existe-t-il un autre moyen de retrouver les fonctions K_j sans utiliser la dérivation ?
b) Montrer que P_j possède exactement j zéros dans l'intervalle $]-1,1[$ (par l'absurde on pourra supposer que P_j change de signe en $l \le j-1$ points de $]-1,1[$, il existe alors un polynôme $g(t) = (t-t_1)\cdots(t-t_l)$ tel que $P_j g$ est de signe constant sur $]-1,1[$, conclure en se rappelant que la famille $\{P_j\}_{k=0}^n$ forme une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], \|\cdot\|_2)$).
c) Soient $t_1 < \cdots < t_j$ les j zéros différents de P_j. Soit $L_k(x) = \prod_{i=1, i\ne k}^j \frac{t-t_i}{t_k-t_i}$, $1 \le k \le j$, les polynômes de Lagrange associés à $\{t_1, \cdots, t_j\}$ et $\lambda_k = \int_{-1}^1 L_k(t)\,dt$. Exprimer p en fonction des polynômes de Lagrange puis montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$, $\int_{-1}^1 p(x)dx = \sum_{k=1}^j \lambda_k p(t_k)$.
d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}_{2j-1}[X]$, $\int_{-1}^1 p(x)dx = \int_{-1}^1 r(x)dx$, ou r est le reste de la division euclidienne de p par P_j. En déduire que $\int_{-1}^1 p(t)\,dt = \sum_{k=1}^j \lambda_k p(t_k)$ (c'est la formule composite de Gauss-Legendre pour le calcul approché d'intégrales, on observe que l'on "double" le degré des polynômes qui sont exactement intégrables).
(*Remarque* : Pour plus de renseignements, consulter J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.* On y trouvera aussi que la méthode ne donne en général plus l'intégrale exacte quand f est un polynôme de degré supérieur à $2j-1$.)

Suite (extraite du CAPES 2000) :
Nous considérons $\mathbb{R}_n[X]$ comme sous-espace vectoriel de $C([-1,1])$. Ce sous-espace étant de dimension finie, on note π_n le projecteur orthogonal de $C([-1,1])$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

e) A l'aide du Théorème de Stone-Weierstrass, montrer que, quelle que soit la fonction $f \in C([-1,1])$, la suite $(\pi_n(f))_n$ converge vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.
On rappelle (voir a)) que $(K_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
f) Montrer que pour tout entier naturel n et tout élément $f \in C([-1,1])$

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle K_j \quad \text{et} \quad \|\pi_n(f)\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle^2.$$

g) Montrer que quelle que soit la fonction $f \in C([-1,1])$, la série de terme général $\langle f, K_j\rangle^2$ converge et que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n\rangle^2 = \|f\|_2^2.$$

Quelle est la limite quand $n \to +\infty$ de $\int_{-1}^{1} f(t)K_n(t)\,dt$?
Exercice 28 : Polynômes de hermite)
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction H_n sur $\mathbb{R}$ par

$$H_n(y) = (-1)^n y^{y^2/2} \frac{d^n}{dy^n}\left(e^{-y^2/2}\right).$$

a) Rappeler la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}$.
b) Calculer H_0, H_1 et H_2.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est une fonction polynomiale et en préciser le degré et le coefficient dominant.
On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $x \mapsto f^2(x)e^{-x^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour deux fonctions f et g de E on note

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

d) Vérifier que l'application $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$ est un produit scalaire dans E.
e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est dans E.
f) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.
g) Calculer la norme de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions - Séries entières - Séries de Fourier

5.1 Suites et séries de fonctions

Dans tout ce qui suit A désigne une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1.1 Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Définition 5.1.1 (Suites) *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs réelles ou complexes.*
On dit que la suite (f_n) converge **simplement** *vers f sur A, si pour tout x de A la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.*
On dit que la suite (f_n) converge **uniformément** *vers f sur A, si $\lim_n \left(\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.*

Remarque 5.1.2 *On dit que $\| \cdot \|_\infty := \sup_A | \cdot |$ est la* **norme de la convergence uniforme** *sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$.*

Définition 5.1.3 (Séries) *Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs réelles ou complexes.*
On dit que la série $\sum u_k$ converge **simplement** *vers S sur A, si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_n$ converge simplement vers S sur A.*
On dit que la série $\sum u_k$ converge **uniformément** *vers S sur A, si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_n$ converge uniformément vers S sur A.*
On dit que la série $\sum u_k$ converge **normalement** *sur A si la série numérique $\sum \|u_k\|_\infty$ converge.*

Proposition 5.1.4 *Si une série est normalement convergente sur A alors elle est absolument et uniformément convergente sur A.*

Preuve : A faire.

Remarque 5.1.5 *La convergence uniforme des séries étant un cas particulier de celle des fonctions nous n'énoncerons les propositions suivantes que dans le cadre des suites de fonctions. Ne pas oublier qu'elles s'appliquent aussi aux séries uniformément convergentes et donc en particulier aux séries normalement convergentes.*

Théorème 5.1.6 (Interversion des limites) *Soit une suite de fonctions (f_n) qui converge uniformément vers f sur A et $a \in \overline{A}$. On suppose pour tout entier n, $\lim_{x \to a} f_n(x) = b_n$ alors*
- *la suite (b_n) converge vers b,*
- *$\lim_{x \to a} f(x) = b$.*

Ce qui se traduit encore par

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_n f_n(x) \right) = \lim_n \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$$

Preuve : à faire, on pourra commencer par montrer que la suite (b_n) est de Cauchy dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 5.1.7 (Continuité) *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur A qui converge uniformément vers f sur A. Alors f est continue sur A.*

Preuve : c'est une conséquence immédiate du théorème d'inversion des limites.

5.1.2 Lien avec l'intégration et la dérivation

Théorème 5.1.8 (Intégration) *Soit (f_n) une suite de fonctions, à valeurs réelles ou complexes, continues sur $[a,b]$, qui converge* **uniformément** *sur $[a,b]$ vers f alors f est continue sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Preuve : faite dans le chapitre intégration.

Théorème 5.1.9 (Primitivation) *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a un point de I. Pour tout entier n, on note h_n la primitive de f_n sur I qui s'annule en a. Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f alors la suite (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive h de f qui s'annule en a.*

Preuve : c'est en partie une conséquence du théorème 5.1.8 en remarquant que pour tout x de I, $h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$. On a ainsi la convergence ponctuelle de (h_n) vers h. Pour $[\alpha,\beta]$ segment inclus dans I, quitte à prendre un segment plus grand on peut supposer que $a \in [\alpha,\beta]$ et on a

$$\sup_{[\alpha,\beta]} |h_n - h| \leq (\beta-\alpha) \sup_{[\alpha,\beta]} |f_n - f|$$

et le terme majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par hypothèse de convergence uniforme de la suite (f_n) vers f sur tout segment de I.

Théorème 5.1.10 (Dérivation) *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I convergeant simplement sur I vers f et telle que la suite des* **dérivées** *(f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers h. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.*

Preuve : découle du théorème d'intégration en remarquant que $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$.

5.2 Séries entières

5.2.1 Rayon de convergence

Définition 5.2.1 *Soit (a_n) une suite complexe, la* **série entière** *de la variable complexe (resp. variable réelle), notée $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum a_n x^n$) est une série de fonctions $\sum u_n$ telles que pour tout n, $u_n(z) = a_n z^n$ (resp. $u_n(x) = a_n x^n$). L'ensemble $I = \{r \geq 0 \mid \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. R la borne supérieure de I dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé* **rayon de convergence** *de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Proposition 5.2.2 *La série entière $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum a_n x^n$) est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence $D(0,R)$ (resp. $]-R,R[$).*

Preuve : pour tout z tel que $|z| < R$, $|z| \in I$.

Lemme 5.2.3 (Lemme d'Abel) *S'il existe $r_0 > 0$ tel que la suite $(|a_n| r_0^n)$ soit bornée alors alors $\sum |a_n| r^n$ converge pour tout r satisfaisant $0 \leq r < r_0$.*

Preuve : comparer la suite $(|a_n| r^n)$ avec la suite géométrique $\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right)$ puis conclure.

Corrolaire 5.2.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R alors pour tout complexe z tel que $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ diverge.*

Preuve : la divergence est grossière puisque l'on déduit du lemme d'Abel que pour $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ est non bornée (et ne peut donc en particulier tendre vers 0).

Corrolaire 5.2.5 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, son rayon de convergence R est donné par l'une des définitions équivalente suivante :*

1. $R = \sup\{|z|,\ z \in \mathbb{C} \mid \sum |a_n||z|^n \text{ converge}\}$
2. $R = \sup\{|z|,\ z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\}$
3. $R = \sup\{|z|,\ z \in \mathbb{C} \mid (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$
4. $R = \sup\{|z|,\ z \in \mathbb{C} \mid \lim_n a_n z^n = 0\}$

Preuve : conséquence de la définition et du lemme d'Abel.

Théorème 5.2.6 *Une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence non nul, est normalement convergente sur tout compact inclus dans son disque de convergence. De plus sa somme f est une fonction continue sur son disque de convergence.*

Preuve : la continuité de f est une conséquence de la normale convergence (donc de l'uniforme convergence) sur tout compact du disque de convergence puisque les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues sur $\mathbb{C}$.
Soit K un compact inclus dans le disque ouvert $D(0,R)$, alors

$$\exists r_0 \in [0,R[: \ K \subset \overline{D}(0,r_0).$$

En effet $\mathrm{dist}(K, D(0,R)^c) = \alpha > 0$ (elle est atteinte voir chapitre sur les espaces vectoriels normés) et $r_0 = R - \alpha$ convient.
La convergence de $\sum |a_n| r_0^n$ implique la normale convergence de $\sum a_n z^n$ sur K.

Proposition 5.2.7 (Calcul du rayon de convergence dans un cas particulier) *Si la suite (a_n) est telle qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n \neq 0$ et $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors*

$$\frac{1}{R} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Preuve : penser au critère de d'Alembert.

Théorème 5.2.8 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 alors*
i La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min\{R_1, R_2\}$ si $R_1 \neq R_2$, $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ si $R_1 = R_2$. De plus pour tout z, $|z| < \min\{R_1, R_2\}$, $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$.
ii Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_1 et de plus pour tout z, $|z| < R_1$, $\sum \lambda a_n z^n = \lambda \sum a_n z^n$.
iii On pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, alors la série entière produit $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ et de plus pour tout z, $|z| < \min\{R_1, R_2\}$, $\sum c_n z^n = \left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right)$.

Preuve : revenir à la définition du rayon de convergence et penser au produit de Cauchy pour le *iii*.

5.2.2 Série entière d'une variable réelle

Théorème 5.2.9 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x et de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme f admet une primitive sur $]-R,R[$. La série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ obtenue en intégrant terme à terme $\sum a_n x^n$ est une primitive de f, elle a même rayon de convergence R.*

Preuve : l'existence et l'expression d'une primitive de f est une conséquence immédiate du théorème de primitivation des suites de fonctions uniformément convergentes (on travaille sur $[-r,r]$ avec $0 < r < R$).
Commençons par remarquer que pour montrer que les deux séries entières ont même rayon de convergence on ne peut pas utiliser le critère de d'Alembert puisque l'on ne sait pas en général si le rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est bien défini et le cas échéant, s'il converge.
Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\left|\frac{a_n}{n+1}\right| \leq |a_n|$ donc $R' \geq R$.
Pour montrer l'inégalité contraire, prenons $r < R'$ alors la suite $\left(|a_n| \frac{r^{n+1}}{n+1}\right)$ converge vers 0 ce qui implique que pour tout $\epsilon > 0$ la suite $(|a_n|(r-\epsilon)^n)$ converge aussi vers 0. D'où $r - \epsilon \leq R$ pour tout $\epsilon > 0$ soit $r \leq R$. On a obtenu que pour tout $r < R'$, $r \leq R$ donc $R' \leq R$.

Théorème 5.2.10 *La somme f d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et*
– $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$,
– $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

Preuve : c'est une relecture du théorème 5.2.9 puisque la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence $R > 0$ et sa somme a pour primitive $\sum a_n x^n$. Le deuxième point s'obtient par récurrence.

Corrolaire 5.2.11 (Unicité) *Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2 strictement positifs.*
S'il existe $0 < r < \min\{R_1, R_2\}$ tel que

$$\forall x \in]-r,r[, \quad \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$$

alors pour tout entier n, $a_n = b_n$.

5.3 Séries de Fourier

Joseph Fourier (1768-1830)

5.3.1 Coefficients de Fourier

Définition 5.3.1 *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux et 2π périodique. On appelle* **coefficients de Fourier exponentiels** *de f les nombres complexes*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \widehat{f}(n) = c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

On appelle **coefficients trigonométriques** *de f les nombres complexes*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Exercice 1
a) Exprimer les coefficients trigonométriques à l'aide des coefficients exponentiels et réciproquement.
b) Lien entre $c_n(f)$ et $c_n(\overline{f})$?
c) On note g l'application définie par $g\ :\ x \mapsto f(x+a)$, exprimer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.
d) On note h l'application définie par $h\ :\ x \mapsto f(-x)$, exprimer $c_n(h)$ en fonction de $c_n(f)$.

Définition 5.3.2 *Soit f une fonction continue par morceaux et 2π périodique. On considère pour tout p de $\mathbb{N}$, les sommes partielles*

$$S_p(f)(x) := \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx}$$

Lorsque en un point x de $\mathbb{R}$ la suite des sommes partielles $\left(S_p(f)(x)\right)_p$ converge on dit que **la série de Fourier de f est convergente au point** *x et*

$$\mathcal{F}(f)(x) := \lim_p S_p(f)(x).$$

Exercice 2
Exprimer $S_p(f)(x)$ à l'aide des coefficients trigonométriques.

Proposition 5.3.3 *1. (Lemme de Lebesgue) Les suites (c_n), (c_{-n}), (a_n) et (b_n) convergent vers 0.*

2. Si f est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors pour tout n de $\mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

3. Si f est 2π périodique, de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^p$ par morceaux alors pour tout n de $\mathbb{Z}$, $c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n(f)$.

Preuve : Le premier point a été vu dans le chapitre intégration (exercice 12). Le deuxième point s'obtient par intégration par parties et le troisième par récurrence.

5.3.2 Convergence en moyenne quadratique

On a vu lors de l'étude des espaces vectoriels normés que l'ensemble $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π périodiques est un espace préhilbertien lorsqu'on le muni du produit scalaire

$$(f|g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx.$$

Si on note pour tout n, e_n la fonction définie par $e_n(x) = e^{inx}$, la famille $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire.

Proposition 5.3.4 (Inégalité de Bessel) *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors pour tout entier p, $S_p(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par $\{e_n,\ |n| \leq p\}$. De plus*

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Preuve : la clé : pour tout entier relatif n, $c_n(f) = (e_n|f)$.

Théorème 5.3.5 (Convergence en moyenne quadratique) *Pour tout f de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$*

$$\lim_p \|f - S_p(f)\|_2 = 0.$$

Preuve : pour $\epsilon > 0$ fixé arbitraire, on sait avec le théorème de Weierstrass (on peut aussi utiliser le théorème de Fejer, voir les exercices) qu'il existe P polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_\infty < \epsilon$. Soit p_0 tel que $P \in \mathcal{P}_{p_0}$ alors pour tout $p \geq p_0$

$$\|f - S_p(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty$$

d'où le résultat.

Théorème 5.3.6 (Formule de Parseval) *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ alors les séries $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes et*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Preuve : c'est une conséquence du théorème de convergence et de l'orthogonalité.

Remarque 5.3.7 *Ces résultats sont encore vrai si l'on suppose seulement f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique. Nous en aurons besoin pour la suite.*

5.3.3 Convergence ponctuelle

Définition 5.3.8 *Lorsqu'elle existe, on note $f(x+0) := \lim_{h\to 0^+} f(x+h)$ et $f(x-0) := \lim_{h\to 0^+} f(x-h)$.*

Théorème 5.3.9 (Théorème de Dirichlet) *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π périodique alors la série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$ et*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

En particulier **en tout point x où f est continue** $\mathcal{F}(f)(x) = f(x)$.

Preuve : elle est complexe. Les étapes sont les suivantes
calcul du noyau de Dirichlet

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \quad \sum_{n=-p}^{p} e^{inx} = \frac{\sin \frac{2p+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$$

dont on déduit que

$$S_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin \frac{2p+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}(f(x+t) + f(x-t))\, dt$$

On a que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin \frac{2p+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}\, dt = 1$ (repenser à la somme qui a donné le noyau de Dirichlet) ce qui permet d'écrire que

$$S_p(x) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin \frac{2p+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}[f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)]\, dt$$

Puis on déduit du fait que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux que la fonction

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)}{\sin \frac{t}{2}}$$

est prolongeable en 0 par une fonction continue par morceaux et on conclut avec le lemme de Lebesgue.

Théorème 5.3.10 (Convergence normale) *Si f est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors les séries $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ sont absolument convergentes.*
De plus la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Preuve : l'absolue convergence de $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ est une conséquence de la convergence en moyenne quadratique de $\sum c_n(f')$ et $\sum c_{-n}(f')$ (f' est continue par morceaux et 2π périodique). En effet avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k(f)| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{c_k(f')}{ik}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k(f')|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$$

et les séries majorantes convergent. On procède de même pour $\sum_{k=1}^n c_{-k}(f)$.
Nous avons donc la normale convergence de $\sum c_n(f)e^{inx}$ et $\sum c_{-n}(f)e^{-inx}$ sur $\mathbb{R}$ donc l'uniforme convergence des sommes partielles $(S_p(f))$ sur $\mathbb{R}$. La limite est f grâce au théorème de Dirichlet.

5.4 Exercices

Exercice 3
a) Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Déterminer, si elle existe, la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
b) Est-ce que $(f_n)_n$ converge uniformément ?
c) Que dire de $(\int_0^1 f_n(t)dt)_n$?
d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue pour que la suite $(g_n)_n$ définie par $g_n = hf_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Exercice 4
a) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, convergeant uniformément sur I vers une fonction f, et soit $(x_n)_n$ une suite de points de I convergeant vers $a \in \overset{\circ}{I}$. Que peut-on dire de la suite $(f_n(x_n))_n$?
b) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant uniformément sur $]a,b[$. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a,b]$.
c) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant simplement sur $[a,b]$ et non uniformément sur $[a,b]$. Peut-elle converger uniformément sur $]a,b[$?
d) Montrer que toute fonction limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes est un polynôme (on pourra utiliser le fait que $(P_n)_n$ est de Cauchy et que penser d'une fonction polynome bornée sur $\mathbb{R}$?).
e) Montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions en escaliers.
Exercice 5
Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^{-(1+1/n)}$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer, mais que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Exercice 6
a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+\frac{x}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f à déterminer. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,b]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (n+1)\sin x(\cos x)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une limite, laquelle ? Est-ce que la convergence est uniforme ?
Exercice 7
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n^2}xe^{-x^2/n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$. Après avoir justifié que l'intégrale $I_n = \int_0^\infty f_n(t)dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la suite $(I_n)_n$. Conclusion ?
Exercice 8
a) Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\sin(x/n)$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f à déterminer. Montrer que $(f_n')_n$ converge uniformément vers f' sur $[a,b]$. Soit $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Montrer que $(g_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g à déterminer. Que peut-on dire de $(g_n')_n$?
b) Soit $f_n : [0,+\infty[$, $x \mapsto \arctan(x/n)$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$. Faire de même pour $(f_n')_n$. Commentaire ?
c) Soit $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1/n}$. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une limite à déterminer. Commentaire ?
Exercice 9 (Unité approchée)
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues positives sur $\mathbb{R}$, telle que $I_n(x) = 0$ pour $|x| > \frac{1}{n}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(x)dx = 1$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(h_n)_n$ définie par $h_n(x) = I_n * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_n(t)f(x-t)dt$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact.
Exercice 10 (Polynômes de Bernstein)
On considère f une fonction continue sur $[0,1]$ et x un réel arbitraire fixé de $[0,1]$. $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre x.
a) Montrer que

$$E\left(f(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})\right) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

on note $P_n(f)(x)$ le polynôme ainsi obtenu.
b) Justifier que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x_1,x_2) \in [0,1]^2\ |x_1-x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \epsilon$$

c) Montrer que

$$|f(x) - P_n(f)(x)| \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k,\ |x-k/n|\geq\eta} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

puis en déduire que

$$|f(x) - P_n(f)(x)| \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - x\right| \geq \eta\right)$$

d) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que les polynômes $P_n(f)$ convergent uniformément vers f sur $[0,1]$

Exercice 11

1) Soit $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x/n) - x/n$. Etudier la convergence simple et uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $[0,1]$.

2) Montrer que la fonction $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est dérivable sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée. Calculer $u'(1)$.

Exercice 12

a) Montrer que φ, définie pour $x \in]0,1]$ par $\varphi(x) = x\ln x$ et $\varphi(0) = 0$, est continue et bornée sur $[0,1]$.

b) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\varphi(x))^n}{n!}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c) Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, montrer que $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$. (*Indication : poser* $I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^m\,dx$ *et trouver une relation entre* $I_{m,n}$ *et* $I_{m-1,n}$ *pour* $m \geq 1$ *et* $n \geq 0$.)

Exercice 13

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} z^n$, que se passe-t-il au bord de l'intervalle de convergence en fonction de α ?

b) $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$, c) $\sum \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} z^n$, d) $\sum \sin\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) z^n$, e) $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$, e) $\sum \frac{z^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 14

a) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2 respectivement. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \geq n_0$. Comparer R_1 et R_2.

b) Montrer que si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul, la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

c) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2 respectivement. On définit c_n par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum c_n z^n$?

d) Si R est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ quel est celui de la série $\sum a_n n^\alpha z^n$, où α est un réel ?

e) Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = 3$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$?

Exercice 15

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$, on note $e(z)$ sa somme.

1)Montrer que $e(z+w) = e(z)e(w)$.

2) Montrer que e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $e' = e$.

3) Montrer que pour tout réel x, $e(x) > 0$.

4) Montrer que pour tout entier n, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^n e(-x) = 0$.

Exercice 16

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le domaine maximal de convergence $(a, b \neq 0)$:

(i) $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$, (ii) $g(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}$, (iii) $h(z) = \frac{z\sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}$.

Exercice 17

Calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{2^n (n+1)(n-2)}$.

Exercice 18 (Théorème Taubérien)

1) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

1.1) Exprimer $\sum_{i=n}^{n+p} a_i x^i$ en utilisant la méthode de sommation d'Abel associée aux sommes $A_k(n) = \sum_{i=n}^{n+k} a_i$.

1.2) En déduire que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

1.3) On note $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1]$. Montrer que f est continue sur $]-1,1]$.

1.4) Donner un exemple de série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence 1 pour laquelle $\sum a_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ admette une limite lorsque x tend vers 1.

2) Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes et $\sum c_n$ la série produit de Cauchy. Montrer que si $\sum c_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} c_n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{n\geq 0} b_n$.

Exercice 19

Pour tout entier $j \geq 1$, on pose $\lambda_j = \int_0^1 N_j(u)\,du$ avec $N_j(X) = X(1-X)(2-X)\cdots(j-1-X)$. On se propose de calculer les nombres λ_n par emploi d'une série génératrice.

1) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{(n-1)!}{6} \leq \lambda_{n+1} \leq \frac{n!}{6}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\lambda_n}{n!} x^n$. Soit $G(x)$ la somme de cette série.

2) Ecrire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^u$ où u est un réel strictement positif, et où $|x| < 1$. Prouver que, x étant fixé, on peut intégrer terme à terme par rapport à u sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que, si $x \neq 0$, $G(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$.

3) Expliciter un système linéaire triangulaire permettant de calculer les nombres λ_n par récurrence.

4) Calculer λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.

Exercice 20

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n. f est-elle développable en série entière ?

2) A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'une condition suffisante pour qu'une fonction réelle f soit développable en série entière au voisinage du point $a \in \mathbb{R}$ est qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et tel qu'il existe $M > 0$ et $t > 0$ tels que, pour tout $x \in I$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)\right| \leq M t^p$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \frac{\text{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$. En déterminant une équation différentielle dont la fonction f est solution, trouver son développement en série entière.

Exercice 22 (extrait capes 1996).

On cherche à déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = \text{arctan} t$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

1) On suppose qu'une solution y de l'équation différentielle est, sur un intervalle $]-R, R[$, somme d'une série entière $\sum_{p \geq 0} a_p t^p$. Montrer que $a_{2k} = 0$ et exprimer a_{2k+1} en fonction de k.

2) Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ? Conclure sur l'existence d'une solution développable en série entière au voisinage de 0.

3) La série est-elle uniformément convergente sur $[-1, 1]$? Les fonctions dérivées y' et y'' sont-elles sommes des séries dérivées sur $[-1, 1]$?

Exercice 23

Soit f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$. Montrer que $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Exercice 24

Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique $f(x) = \sin^3 x$.

Exercice 25

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence $R > 0$, montrer que pour tout $r \in]0, R[$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Exercice 26

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, déterminer la série de Fourier de la fonction f de période 2π telle que $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour $x \in]-\pi, \pi]$; étudier sa convergence.

b) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

c) Pour α réel, déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{p=-n}^{n} \frac{1}{(\alpha - p)^2}$.

Exercice 27

1) Soit f une fonction 2π-périodique, continue, telle que la restriction de f à $[0, 2\pi]$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer le coefficient de Fourier de f', $c_n(f')$, en fonction de celui de f, $c_n(f)$.

2) En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

3) Soit f une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$. Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 28

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de période 2π et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ sa série de Fourier. On pose pour tout réel x, $F(x) = -c_0 x + \int_0^x f(t)\, dt$.

1) Montrer que F est périodique de période 2π et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer les coefficients de Fourier de F.

2) Montrer que la série de Fourier $\sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} e^{inx}$converge uniformément sur $\mathbb{R}$, quelle est sa limite ?

3) Montrer que $\sum_{|n| \geq 1} \frac{c_n}{n} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - \pi) f(t)\, dt$. En déduire que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\text{sin} nx}{\text{ln} n}$ ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29 (extrait capes 1997)

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, on considère la fonction 2π-périodique f telle que pour $t \in]-\pi, \pi]$ on ait $f(t) = \text{ch}(xt)$.

1) Montrer que la fonction f est paire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

3) Justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. En écrivant cette égalité pour $t = \pi$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\pi\text{coth}(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}.$$

Exercice 30 (extrait capes 1986)

Approximation par la méthode de Fejer. On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques à valeurs complexes, et on munit $\mathcal{C}$ de la norme N_∞ : $f \mapsto N_\infty(f) = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$.

Pour tout entier relatif p, on note e_p la fonction $t \mapsto e^{ipt}$. Pour tout entier n, on note $s_n = \sum_{|p| \leq n} e_p$.
1) Montrer que pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{C}$, la fonction $f * g$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\, dt$ appartient encore à $\mathcal{C}$. Vérifier que $f * g = g * f$.
Pour tout entier naturel n, on pose $k_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} s_p$ et, pour tout élément f de $\mathcal{C}$, $K_n(f) = f * k_n$.
2) Montrer que si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ $s_n(t) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$ puis que $k_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\left((n+1)\dfrac{t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right)^2$.
3) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)\, dt = 1$.
4.1) Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Montrer pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x, $f(x) - (f * k_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))k_n(t)\, dt$.
4.2) Etablir que, pour tout élément α de $]0, \pi]$, $N_\infty(f - K_n(f)) \leq \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi} N_\infty(f) \int_{\alpha}^{\pi} k_n(t)\, dt$, où $\omega_f(\alpha) = \sup_{|x-x'| \leq \alpha} |f(x) - f(x')|$.
4.3) Prouver que, pour tout élément α de $]0, \pi]$, $\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\pi} k_n(t)\, dt = 0$.
4.4) Montrer enfin que $\lim_{n \longrightarrow \infty} N_\infty(f - K_n(f)) = 0$. Conclusion ?

Chapitre 6

Equations différentielles

6.1 Equations linéaires - cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1.1 Equations linéaires du premier ordre

Définition 6.1.1 *Soient a et b deux fonctions continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, l'équation fonctionnelle*

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{E}$$

est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.
L'équation

$$y' = a(t)y \tag{H}$$

est l'équation homogène associée.

Résoudre (E) ou (H) revient à trouver l'ensemble des fonctions dérivables sur I solutions de ces équations.

Théorème 6.1.2 *L'ensemble des solutions de* (H)*, noté $S_{(H)}$, est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 1.*

$$S_{(H)} = \mathbb{K}exp(A)$$

avec A une primitive de a sur I.

Preuve : Vérifiez que $y_0 = exp(A)$ est bien solution puis pour y solution de (H), considérez la fonction $t \mapsto y(t)e^{-A(t)}$.

Théorème 6.1.3 *L'ensemble des solutions de* (E)*, noté $S_{(E)}$ est un espace affine de dimension 1, d'espace vectoriel associé $S_{(H)}$.*

Preuve :
$S_{(E)}$ n'est pas vide, vérifier que la fonction y_1 définie sur I par

$$y_1(t) = e^{A(t)}exp\left(\int b(u)e^{-A(u)}\,du\right)$$

où $\int b(u)e^{-A(u)}\,du$ désigne une primitive sur I de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ est une solution de (E).
La structure d'espace affine se déduit du fait que y solution de (E) équivaut à $y - y_1$ solution de (H).

Remarque 6.1.4 *La solution y_1 peut se retrouver à partir d'une solution de l'équation homogène avec la méthode dite de "variation de la constante".*
En pratique ce théorème se traduit par : la solution générale de l'équation (E) *est somme d'une solution particulière de* (E) *et de la solution générale de l'équation homogène associée* (H).

Proposition 6.1.5 (Principe de superposition) *Soient a, b_1 et b_2 des fonctions continues sur I, pour $i = 1, 2$, y_i solution de $y' = a(t)y + b_i(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de $y' = a(t)y + b_1(t) + b_2(t)$.*

Théorème 6.1.6 (Unicité) *Soient a, b deux fonctions continues sur I, t_0 un point de I et α un élément de $\mathbb{K}$ alors il existe une unique solution de*

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

La condition $y(t_0) = \alpha$ est appelée **condition initiale**.

Preuve : A faire.

Remarque 6.1.7 *Une conséquence importante de ce résultat est que si y_1 et y_2 sont deux solutions différentes de* (E) *alors leurs courbes représentatives sont disjointes.*

Exercice 1 Retrouver l'expression de y_0 et y_1 lorsque a et b sont des constantes.
Exercice 2 Montrer que les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2 \quad f(t + u) = f(t)f(u)$$

sont la fonction nulle et les solutions de

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{K}$.

6.1.2 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 6.1.8 *Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$, $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, l'équation fonctionnelle*

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{E}$$

est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**.
L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{H}$$

est l'équation homogène associée.

Résoudre (E) (resp. (H)) revient à trouver l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur I (resp. $\mathbb{R}$) et solutions de ces équations.

Théorème 6.1.9 *L'ensemble des solutions de* (H)*, noté $S_{(H)}$, est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 2.*
L'équation (C) $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique associée** *et une base de $S_{(H)}$ est donnée par :*

1. *dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*
   - *si (C) a deux racines distinctes r_1 et r_2, $\{t \mapsto e^{r_1 t},\ t \mapsto e^{r_2 t}\}$*
   - *si (C) a une racine double r, $\{t \mapsto e^{rt},\ t \mapsto te^{rt}\}$*
2. *dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*
   - *si (C) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $\{t \mapsto e^{r_1 t},\ t \mapsto e^{r_2 t}\}$*
   - *si (C) a une racine réelle double r, $\{t \mapsto e^{rt},\ t \mapsto te^{rt}\}$*
   - *si (C) a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ (α et β réels, $\beta \neq 0$), $\{t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$*

Preuve : Il est immédiat que l'ensemble des solutions a une structure d'espace vectoriel.
Vérifier que ces solutions conviennent et que dans chaque cas on a bien une famille libre. Les résultats pour le cas coefficients réels se déduisent des résultats pour le cas coefficients complexes.
Montrons que toutes les solutions sont combinaisons linéaires des vecteurs de ces familles libres (et ainsi que l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2).
Soit g une solution de (H) et considérons h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-rt}g(t)$ avec r solution de l'équation caractéristique. On obtient (faire le calcul) que h solution de

$$ah'' + (2ar + b)h' = 0$$

puis on termine connaissant les solutions d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, pour cela on sera amené à distinguer r racine simple ou double de (C).

Théorème 6.1.10 *L'ensemble des solutions de* (E)*, noté $S_{(E)}$ est un espace affine de dimension 2, d'espace vectoriel associé $S_{(H)}$.*

Proposition 6.1.11 *Dans le cas particulier où $f(t) = e^{\lambda t}P(t)$ avec λ dans $\mathbb{K}$ et P polynôme alors une solution particulière de (E) : $ay'' + by' + cy = f$, est*
- *si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $t \mapsto e^{\lambda t}Q(t)$ avec Q polynôme, $deg(Q) = deg(P)$,*
- *si λ est racine simple de l'équation caractéristique, $t \mapsto te^{\lambda t}Q(t)$ avec Q polynôme, $deg(Q) = deg(P)$,*
- *si λ est racine double de l'équation caractéristique, $t \mapsto t^2e^{\lambda t}Q(t)$ avec Q polynôme, $deg(Q) = deg(P)$.*

Preuve : à faire.

Proposition 6.1.12 *On a encore le principe de superposition des solutions.*

Proposition 6.1.13 (Variation des constantes) *Soit f une fonction continue sur I et $\{y_1, y_2\}$ une base de l'ensemble des solutions de*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{H}$$

Alors une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{E}$$

est de la forme $t \mapsto \varphi_1(t)y_1(t) + \varphi_2(t)y_2(t)$ avec φ_1 et φ_2 dérivables sur I et solutions du système

$$\begin{cases} \varphi_1'(t)y_1(t) + \varphi_2'(t)y_2(t) = 0 \\ \varphi_1'(t)y_1'(t) + \varphi_2'(t)y_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Preuve : Vérifier que $\{y_1, y_2\}$ base de l'ensemble des solutions de (H) implique que $w(y_1(t), y_2(t))$ le déterminant du système ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$ (on appelle ce déterminant **le Wronskien**). Ainsi le système admet toujours une solution puis vérifier qu'une telle solution convient.

Théorème 6.1.14 (Unicité) *Soient $a \neq 0$, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$, f une fonction continue sur I, t_0 un point de I et α, β deux éléments de $\mathbb{K}$ alors il existe une unique solution de*

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = \alpha, \ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

La condition $y(t_0) = \alpha, \ y'(t_0) = \beta$ est appelée **condition initiale**.

Preuve : à faire.

6.2 Equations différentielles linéaires - cas des fonctions à valeurs vectorielles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.2.1 Equations linéaires d'ordre 1

Théorème 6.2.1 (Existence et Unicité) *Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I, A à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées $M_n(\mathbb{K})$, B à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Soit t_0 un point de I et V_0 un élément de $\mathbb{K}^n$ alors il existe une unique solution définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ de*

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = V_0 \end{cases}$$

La condition $Y(t_0) = V_0$ est appelée **condition initiale** *et la recherche de solutions au système ci-dessus est appelé* **problème de Cauchy**.

Preuve : admis. L'existence d'une solution locale peut se montrer à l'aide du théorème du point fixe. Dans le cas des équations linéaires toute solution locale se prolonge en une solution globale définie sur I (voir cours de L3, démonstration au-delà du programme de l'écrit du capes).

Théorème 6.2.2 *Soit A une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des solutions de*

$$Y' = A(t)Y \tag{H}$$

est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

Preuve : Il est clair que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel. Grâce au théorème d'unicité, pour t_0 un point fixé de I, l'application

$$\begin{array}{rcl} L \;:\; S_{(H)} & \to & \mathbb{K}^n \\ Y & \mapsto & Y(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel, $S_{(H)}$ est de dimension n.

Théorème 6.2.3 *Soit A et B deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, l'ensemble $S_{(E)}$ des solutions de*

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{E}$$

est un espace affine de dimension n, d'espace vectoriel associé $S_{(H)}$.

Proposition 6.2.4 *Soit $\{F_1, \dots, F_n\}$ une famille de solutions de* (H)*. On considère la fonction w définie sur I par $w(t) = \det(F_1(t), \dots, F_n(t))$, il y a équivalence entre les assertions suivantes*

1. *$\{F_1, \dots, F_n\}$ est une base de $S_{(H)}$,*
2. *il existe un point t_0 de I tel que $w(t_0) \neq 0$,*
3. *pour tout t de I, $w(t) \neq 0$.*

Preuve : conséquence du théorème d'unicité.

Définition 6.2.5 *Soit A et B deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans respectivement dans $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ et*

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{E}$$

Une base $\{F_1, \dots, F_n\}$ de $S_{(H)}$ est appelée **système fondamental de solutions** *de* (E).
La fonction w définie sur I par $w(t) = \det(F_1(t), \dots, F_n(t))$ est appelé **wronskien** *du système fondamental de solutions par rapport à une base fixée.*

Proposition 6.2.6 (Variation de la constante) *Soit A et B deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans respectivement dans $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ et*

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{E}$$

Si $\{F_1, \dots, F_n\}$ est un système fondamental de solutions alors il existe une solution de (E) *de la forme*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i F_i$$

Preuve : notons $W(t) = (F_1(t) \;\dots\; F_n(t))$ la matrice Wronskienne associée au système fondamental. Il existe n fonctions continues a_i, $1 \leq i \leq n$, telles que $B = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i$. Elles sont données par

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} = W(t)^{-1} B(t)$$

Les fonctions φ_i solutions de $\varphi_i' = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$ conviennent.

6.2.2 Equations linéaires à coefficients constants

Théorème 6.2.7 *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ alors la solution de*

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = V_0 \end{cases}$$

est donnée par $Y(t) = e^{tA} V_0$.
L'équation

$$Y' = AY \tag{H}$$

admet pour système fondamental de solutions

$$\left(\; Y_1(t) \dots Y_n(t) \; \right) = \exp(tA)$$

Preuve : Le fait que toute solution soit de la forme $t \mapsto e^{tA} V$, avec V un élément de $\mathbb{K}^n$, découle du fait que $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ et $e^{0A} = I$ la matrice identité. Nous avons un système fondamental de solutions en prenant pour V_i les vecteurs de la base canonique.

Exercice 3

Cet exercice peut se faire sans connaitre l'exponentielle d'une matrice. On suppose que la matrice A est diagonalisable, une base de vecteurs propres est $\{V_1, \dots, V_n\}$ avec pour valeurs propres associées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer qu'alors $\{e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, e^{\lambda_n t} V_n\}$ est un système fondamental de solutions.

6.2.3 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

Théorème 6.2.8 (Unicité) *Soient a, b, c et f des fonctions continues sur un intervalle I, on suppose de plus que a ne s'annule pas sur I. Soit t_0 un point de I et α, β deux éléments de $\mathbb{K}$ alors il existe une unique solution de*

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \\ y(t_0) = \alpha, \ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Preuve : on se ramène au système linéaire d'ordre 1 en posant

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a}(t) & -\frac{b}{a}(t) \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

puis on conclue avec le théorème d'unicité des systèmes linéaires d'ordre 1.
Exercice 4
Retrouvez les résultats des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Lien entre équation caractéristique et matrice A, méthode de la variation de la constante, etc ...

6.3 Equations différentielles non linéaires

Théorème 6.3.1 (Cauchy-Lipschitz) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour tout (t_0, x_0) de Ω, l'équation*

$$x' = f(t, x) \tag{E}$$

admet une unique **solution maximale** *x telle que $x(t_0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0 et ne peut être prolongée à un intervalle contenant strictement J.*

Preuve : résultat admis en grande partie. On peut montrer qu'il existe une unique solution locale avec le théorème du point fixe, puis que toute solution locale peut être prolongée en une solution maximale (voir cours de L3).
Pour montrer que J est ouvert supposons le contraire, par exemple $J = (a, b]$ on peut alors résoudre le problème de Cauchy de donnée initiale $(b, x(b))$ la solution $\tilde{x}$ est telle que $\tilde{x}(b) = x(b)$ et $\tilde{x}'(b) = f(b, \tilde{x}(b)) = x'(b)$. On pourrait ainsi prolonger la solution x à droite de b, contradiction avec la maximalité de la solution.

Remarque 6.3.2 *Ce résultat est encore vrai pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 6.3.3 (Cauchy-Lipschitz) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour tout (t_0, x_0, x_1) de Ω, l'équation*

$$x'' = f(t, x, x') \tag{E}$$

admet une unique solution x telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert J contenant t_0 et ne peut être prolongée à un intervalle contenant strictement J.

6.4 Exercices

Exercice 5 On donne le système différentiel , où y et x désignent deux fonctions de t :

$$\begin{cases} (1 + t^2)x' - tx - y = 2t^2 - 1 \\ (1 + t^2)y' + x - ty = 3t \end{cases} \tag{6.1}$$

a) Soient $\phi_1(t) = (1, -t)$, $\phi_2(t) = (t, 1)$. Montrer que ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions du système homogène. Donner leur Wronskien.
b) Soit $f(t) = (2t^2 - 1,\ 3t)$, écrire $f(t)$ dans la base $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ puis en déduire toutes les solutions de (6.1) en utilisant la méthode de la variation des constantes.

Exercice 6 Résoudre

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X.$$

Déterminer les solutions de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X + e^{2t}\mathrm{lnt} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Résoudre

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$$

Exercice 8 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$

$$X' = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 0 \\ \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (extrait capes 1996)
a) Soit c un réel strictement positif, montrer que les fonctions Y_0 et Y_1 définies par $Y_0(t) = s\mathrm{h}(ct)$ et $Y_1(t) = \mathrm{sh}(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2y = 0$.
b) Déterminer en fonction de Y_0 et Y_1 les solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2y = f(t)$ avec f continue sur $[a, b]$.
c) Déterminer $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que si z est solution sur $[\alpha, \beta]$ (avec $0 < \alpha < \beta$) de l'équation différentielle $-t^2z'' - 2tz' + z = g(t)$ avec g continue sur $[\alpha, \beta]$ alors la fonction y définie par $y(x) = e^{-\gamma x}z(e^x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme de la question b).
d) Y a-t-il unicité des solutions sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $y'' + \pi^2y = 0$ vérifiant $y(0) = \lambda$ et $y(1) = \mu$?
Exercice 10 Résoudre $xy' + xy = 1 + 2x^2$.
Exercice 11 Résoudre l'équation différentielle $t^2y' + y + y^2 = 0$ posée dans $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^*$. (ind. on pourra faire le changement de fonction $z = 1/y$)

Exercice 12 Résoudre
a) $(1 + x)y'' - 2y' + (1 - x)y = 0$ (vérifier que $x \mapsto e^x$ est solution).
b) $x(x + 1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution monome de l'équation homogène).
Exercice 13(extrait capes 2005)
a) Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel compact avec $a < b$, α, β deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et f une solution sur I non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0.$$

Montrer que l'ensemble des zéros dans I de la fonction f est fini.
b) Soient $I = [a, +\infty[$, β une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et f une solution sur I non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$y'' + \beta y = 0.$$

On désigne par r la fonction définie sur I par : $\forall x \in I,\ r(x) = \sqrt{(f(x))^2 + (f'(x))^2}$.
Montrer que la fonction r est à valeurs strictement positives et continûment dérivable sur I.
Exercice 14 Soit (I, φ) la solution maximale de l'équation différentielle $x' = x^2 - 1$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$ ($t_0 \in I,\ x_0 \in \mathbb{R}$).
a) On suppose que $x_0 \in]-1, 1[$. Montrer que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \in]-1, 1[$ et que φ est décroissante. Déterminer (I, φ).
b) Déterminer (I, φ) dans les cas $x_0 < -1$ et $x_0 > 1$.
Exercice 15* Soient $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et l'équation différentielle $x' = f(x)$ notée (E).
a) Justifier que pour toute condition initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution maximale que l'on notera dans la suite (x, I).
b) On suppose que a_1 et a_2 sont deux zéros de f avec $a_1 < a_2$ et que f ne s'annule pas sur $]a_1, a_2[$. Quelle est la solution maximale si $x_0 = a_1$ ou $x_0 = a_2$? Montrer que si $x_0 \in]a_1, a_2[$ alors $x(t) \in]a_1, a_2[$ pour tout $t \in I$. En déduire que x est monotone et que $I = \mathbb{R}$. Que vaut $\lim_{t \longrightarrow \pm\infty} x(t)$?
c) On suppose toujours que $f(a_2) = 0$ et que f est strictement positive sur $]a_2, +\infty[$, on choisit x_0 dans $]a_2, +\infty[$. Démontrer que $1/f$ admet sur $]a_2, +\infty[$ une primitive qui s'annule en x_0, notée F, et que F réalise une bijection de $]a_2, +\infty[$ sur $]-\infty, t_+[$ avec $t_+ = +\infty$ si et seulement si $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du$ diverge. En déduire qu'alors $I =]-\infty, t_0 + t_+[$ et déterminer $\lim_{t \longrightarrow t_0 + t_+} x(t)$.
d) Résolution explicite de l'équation différentielle $x' = x(x - 1)$ de condition initiale $x(0) = x_0$.

Exercice 16 Vérifier que l'équation différentielle $x^2 + xy + y^2 - x^2y' = 0$ est une équation de type homogène puis l'intégrer après avoir fait le changement de fonction $y = xz$.

Exercice 17. (Croissance de population)
On considère une population formée de N individus et évoluant en fonction du temps t.
1) Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus. On suppose N dérivable, justifier que N vérifie l'équation $N'(t) = kN(t)$ avec k constante (égale à la différence entre le taux de natalité et de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle).
a) Déterminer N si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus.
b) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?
2) Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée *équation logistique*).
a) Justifier que l'on peut faire le changement de fonction $y(t) = \frac{1}{N(t)}$, résoudre l'équation précédente.
b) En déduire que $N(t) = \dfrac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ avec K constante réelle.
c) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?
Exercice 18. (Loi de refroidissement de Newton)
Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement ...) suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité k dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu (on le considèrera constant). On note $T(t)$ la température de l'objet à l'instant t.

1. Donner l'équation différentielle dont est solution la fonction T si l'on suppose que le milieu ambiant est à température constante T_a.
2. Déterminer $T(t)$ si l'objet possède une température initiale $T(0) = T_0$.
3. On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps (par exemple cas du sol exposé aux rayons du soleil). Déterminer $T(t)$ lorsque $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$.

Exercice 19 (Masse suspendue à un ressort)
On considère un corps ponctuel M de masse m suspendu à un ressort et plongé dans un milieu ayant une certaine viscosité (air, eau, huile, ...). On repère la position de M sur un axe vertical, repéré par un vecteur $\vec{\jmath}$ orienté vers le haut, et on prend pour origine la position d'équilibre de M. On note $y(t)$ la cote de M sur cet axe à l'instant t (soit $\overrightarrow{OM} = y(t)\vec{\jmath}$).

1. En l'absence de force d'excitation agissant sur M , trois forces interviennent pour déterminer le mouvement de M, la force d'inertie proportionnelle à y'' (coefficient la masse m), la force de viscosité proportionnelle à y' (coefficient de viscosité $b > 0$) et la force de rappel proportionnelle à y (coefficient de raideur du ressort $c > 0$). Alors y vérifie l'équation
$$my'' + by' + cy = 0.$$
Résoudre cette équation en cas de
   (a) Viscosité nulle ($b = 0$).
   (b) Viscosité faible (b petit tel que $b^2 - 4mc < 0$).
   (c) Viscosité grande (b grand tel que $b^2 - 4mc > 0$).
   (d) Dans chaque cas comment se comporte $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ? (Pour avoir une idée de l'allure de la courbe lorsque $b^2-4mc < 0$ on pourra utiliser, en l'ayant vérifié, que $A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x) = C\sin(\omega x+\varphi)$ avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et φ tel que $\cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.)
2. On suppose maintenant de plus que M est soumis à une force sinusoïdale de pulsation λ, soit
$$my'' + by' + cy = k\sin\lambda t$$
où k est une constante. Résoudre cette équation dans chacun des cas précédents.
3. Que peut-on dire maintenant sur $y(t)$ lorsque t tend vers l'infini ? A quoi correspond le phénomène de résonance ?

Exercice 20 (Proie-Prédateur, modèle de Lotka-Volterra)
On pourra consulter agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/volterra.pdf ou "Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature" de G. Biau, J Droniou et M. Herzlich, EDP sciences ou "Mathematical Biology" de J. D. Murray, Springer

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ \\ y' = y(x-1) \end{cases} \tag{6.2}$$

Ce système modélise l'évolution au cours du temps d'une population de lapins (représentée par x), et d'une population de renards (représentée par y) : plus il y a de lapins, plus les renards ont à manger et plus ils se reproduisent. D'un autre coté, plus il y a de renards, plus les lapins se font manger et moins ils se reproduisent.

Soient $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy (P) pour l'équation (6.2) avec comme données initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.
1) Montrer qu'il existe une solution maximale unique à ce problème de Cauchy. On note $\big(I, (x, y)\big)$ la solution maximale de (P).
2) Montrer que pour tout $t \in I$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. Ind : supposer qu'il existe t_0 dans I tel que $x(t_0) = 0$ et trouvez alors une solution globale distincte de (x, y).
3) Pour $t \in I$, on pose $\psi(t) = \ln x(t) + \ln y(t) - x(t) - y(t)$.
Montrer que pour tout $t \in I$, la fonction ψ est constante (sa valeur dépend bien sûr de la donnée initiale). ψ est appelée intégrale première du système 6.2.
4) Soit $C \in \mathbb{R}$. On définit K_C par

$$K_C = \Big\{ (u, v) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+},\ \ \ln u + \ln v - u - v = C \Big\}$$

Montrer que K_C est borné. En déduire que les fonctions x et y sont bornées sur I puis que $I = \mathbb{R}$. (Sinon on suppose que $I = (a, b)$ avec $b < +\infty$, alors de x et y bornées on déduit que x' et y' bornées puis que x et y sont prolongeables par continuité en b, obtenir alors un prolongement à la solution maximale, contradiction).
5) On suppose que $x_0 = y_0 = 1$. Résoudre (P). Ce point est appelé point d'équilibre du système.
6) On divise le quart de plan $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ en quatre zones :

$$A = \big\{ (u, v), 0 < u < 1, 0 < v < 1 \big\},\ B = \big\{ (u, v), u > 1, 0 < v < 1 \big\}$$
$$C = \big\{ (u, v), u > 1, v > 1 \big\},\ D = \big\{ (u, v), 0 < u < 1, v > 1 \big\}$$

a) Déterminer le le signe de x' et y' dans chacune des parties A, B, C et D.
b) On suppose que $(x_0, y_0) \in A$ et que pour tout t de $[0, +\infty[$, $(x(t), y(t))$ reste dans A, en déduire alors que x et y admettent une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$, notée l et l'. En déduire que x' a alors une limite non nulle lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire une contradiction.
c) Montrer que si $(x_0, y_0) \in A$, alors la solution passe successivement de A à B à C et à D pour revenir dans A. Enoncer le cas général.
7) a)On définit f par

$$f:\ \begin{array}{l}]0,1] \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \ln u - u - 1 \end{array}$$

Montrer que f est injective.
b) On note t_1 le plus petit réel tel que $(x(t_1), y(t_1))$ entre dans B et t_5 le plus petit réel strictement plus grand que t_1 tel que $(x(t_5), y(t_5))$ entre de nouveau dans B. On a $x(t_1) = x(t_5) = 1$, déduire de ce qui précède que $y(t_1) = y(t_5)$. (ind. penser à utiliser la fonction ψ)
c) En notant $(\tilde{x}, \tilde{y})$ le couple de fonctions définies par

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(t + t_5 - t_1), y(t + t_5 - t_1))$$

montrer que $(\tilde{x}, \tilde{y})$ est solution du problème de Cauchy de donnée initiale $(x(t_1), y(t_1))$.
d) En déduire que si $(x_0, y_0) \neq (1, 1)$, la solution du problème de Cauchy (P) est périodique.
8) Tracer l'allure des courbes solutions.

Chapitre 7

Calcul différentiel et intégrales multiples

Dans ce chapitre les fonctions considérées sont des fonctions définies sur un ouvert U d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension n, et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F de dimension p. Pour des bases de E et F fixées, f s'identifie à une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Nous travaillerons avec de telles fonction dans ce qui suit, nous désignerons sans distinction $\|\cdot\|$ des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ (rappel sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes) et par e_i les vecteurs de la base canonique.

7.1 Applications continûment différentiables

Définition 7.1.1 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit a un point de U et h un vecteur de $\mathbb{R}^n$, il existe alors $\delta > 0$ tel que $a + th$ soit dans U pour tout t de $[-\delta, \delta]$. On dit que f est* **dérivable au point** a **selon le vecteur** h *si l'application partielle*

$$\begin{array}{rcll} \varphi_h & : & [-\delta,\delta] & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ & & t & \mapsto & f(a+th) \end{array}$$

est dérivable en 0. On note alors $D_h f(a) = \varphi_h'(0)$.
Lorsque $h = e_j$ pour $1 \leq j \leq n$, on note les **dérivées partielles premières** *$D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.*

Définition 7.1.2 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. f est dite de* **classe $\mathcal{C}^1$ sur** *U si les applications dérivées partielles $D_j f$, pour $1 \leq j \leq n$, sont continues sur U.*

Proposition 7.1.3 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout point a de U et tout vecteur $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans U on a*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a) + o(\|h\|).$$

En particulier, $D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a)$.

Preuve : non exigible en classes préparatoires. Une idée pour $n = 2$ et $p = 1$ (le cas général se traite de même),

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + (f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2)) + (f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2))$$

puis on applique les accroissements finis dans chaque parenthèse et enfin on utilise la continuité des dérivées partielles.

Définition 7.1.4 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire, notée $df(a)$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, telle que pour tout vecteur h tel que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans U on ait*

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|).$$

Exercice 1 Que vaut $df(a)$ lorsque $n = p = 1$?

Proposition 7.1.5 *Si f est différentiable en a alors f est continue en a et elle admet des dérivées selon tout vecteur h, de plus $D_h f(a) = df(a)(h)$.*

Preuve : à faire.

Théorème 7.1.6 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U alors f est différentiable en tout point a de U et*

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a)$$

De plus l'application $a \mapsto df(a)$ est continue sur U.

Preuve : l'expression de $df(a)(h)$ est une reformulation de la proposition 7.1.3. La continuité de $a \mapsto df(a)$ découle du fait que

$$\|df(a) - df(b)\| \lesssim \sum_{i=1}^{n} \|D_i f(a) - D_i f(b)\|$$

puis de la continuité des dérivées partielles.

Exercice 2

Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, montrer que L est différentiable en tout point a de $\mathbb{R}^n$ et que $dL(a) = L$. Que vaut $D_i L$? En déduire que L est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 7.1.7 (Composition) *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V contenant $f(U)$ de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout point a de U, tout vecteur h de $\mathbb{R}^n$*

$$d(g \circ f)(a)(h) = dg(f(a))\,(df(a)(h))$$

Preuve : revenir à la définition de la différentiabilité,

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|) \quad g(b+k) = g(b) + dg(b)(k) + o(\|k\|)$$

avec $b = f(a)$ et $k = f(a+h) - f(a)$. Pour conclure, pensez que les applications linéaires $df(a)$ et $dg(b)$ sont continues.

Remarque 7.1.8 *Ceci nous permet de voir que pour une application de E dans F, la propriété être $\mathcal{C}^1$ est indépendante du choix des bases sur E et F.*

Exercice 3 Ecrire la différentielle de la composée à l'aide des dérivées partielles dans le cas où $n = p = 2$.

Exercice 4 Rappelez les résultats sur somme, produit (cas $p = 1$), inverse (cas $p = 1$) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$. Préciser dans chaque cas l'expression de la différentielle.

Définition 7.1.9 *Soit $f = (f_1, \dots, f_p)$ une application différentiable en un point a de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on appelle* **matrice jacobienne** *de f au point a la matrice $p \times n$*

$$\mathrm{Jac}(f)(a) = \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}}$$

Lorsque $n = p$, on appelle **jacobien** *de f en a, le déterminant de la matrice jacobienne.*

Exercice 5 Exprimer à l'aide de produit de matrices faisant intervenir les matrices jacobiennes, $df(a)(h)$ et $d(g \circ f)(a)(h)$.

Exercice 6 Lorsque f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et φ une application (vectorielle) définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, exprimer $d(f \circ \varphi)(a)(h)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées des applications coordonnées de φ.

Définition 7.1.10 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on dit que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V si f est une bijection de U sur V et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Théorème 7.1.11 *Soit f une application injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si le jacobien de f en a est non nul (c'est à dire si et seulement si $df(a)$ est inversible) en tout point a de U.*

Preuve : admis.

7.2 Fonctions numériques continûment différentiables

Dans ce paragraphe les applications sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $p = 1$.

Définition 7.2.1 *On suppose $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme euclidienne, f une fonction numérique différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$,* **le gradient de** f *en a est défini par*

$$df(a)(h) = (\mathrm{grad} f(a)|h)$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire associé à la norme.

Théorème 7.2.2 (Inégalité des accroissements finis) *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout a de U, $\|df(a)\| \leq M$ alors*

$$\forall (x, y) \in U^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

Preuve : appliquer l'égalité des accroissements finis à la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = f(tx + (1 - t)y)$.

Remarque 7.2.3 *On notera que l'hypothèse de convexité sert "uniquement" à avoir le segment $[x, y]$ inclus dans U pour tous points x et y de U. On a donc une inégalité comparable pour tout ouvert U et les points x et y choisis de sorte que $[x, y] \subset U$.*

Théorème 7.2.4 *Soit U un ouvert étoilé, f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de différentielle nulle sur U alors f est constante sur U.*

Preuve : Notons a un point par rapport auquel U est étoilé, alors pour tout x de U le segment $[a, x]$ est inclus dans U et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[a, x]$ avec $M = 0$. Ainsi pour tout x de U, $f(x) = f(a)$.

Proposition 7.2.5 *Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en un point a de U alors $df(a) = 0$.*

Preuve : appliquer le résultat analogue des fonctions numériques d'une variable réelle aux applications partielles $x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Définition 7.2.6 *Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et différentiable en un point a de U. Si $df(a) = 0$, on dit que a est* **un point critique** *de f.*

7.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 7.3.1 *Soit f une application admettant une $j^{\text{ième}}$ dérivée partielle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, si $D_j f$ admet une $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle en un point a de U, on dit que f a une $(k, j)-$***dérivée partielle seconde** *en a, notée $D^2_{k,j} f(a)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$.*
*f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur U lorsque pour tout $(k, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, elle admet des $(k, j)-$***dérivée partielle seconde** *continues sur U.*

Remarque 7.3.2 *Généralisation par itération de la définition ci-dessus pour les dérivées partielles d'ordre k.*

Théorème 7.3.3 (de Schwarz) *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ alors*

$$\forall (k, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \quad D^2_{k,j} f = D^2_{j,k} f$$

Preuve : admis.

Théorème 7.3.4 *Si f admet des dérivées partielles d'ordre k continues sur un ouvert U, alors f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$ et tout k-uplet $(j_1, \ldots, j_k)$ de $\{1, \ldots, n\}$ on a sur U*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \partial x_{j_{\sigma(2)}} \cdots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$; calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$; que peut-on en déduire ?
Exercice 8 Rappeler les résultats pour la somme, produit, inverse d'applications numériques de classe $\mathcal{C}^k$, composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 7.3.5 (Formule de Taylor-Young) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors pour tout point a de U et tout vecteur h tendant vers 0*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j D_j f(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j^2 D_{j,j}^2 f(a) + 2 \sum_{1\leq j<k\leq n} h_j h_k D_{j,k}^2 f(a)\right) + o(\|h\|^2)$$

Preuve : Grandes lignes à compléter.
Pour h suffisamment petit afin que le segment $[a, a+h]$ soit contenu dans U, appliquez la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(a+th)$.

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t)\,dt$$

En calculant les dérivées secondes de g, pensez à utiliser le théorème de Schwarz.
L'égalité finale s'obtient à l'aide de

$$\int_0^1 (1-t)g''(t)\,dt = \frac{1}{2}g''(0) + \int_0^1 (1-t)(g''(t) - g''(0))\,dt$$

la dernière intégrale étant un $o(\|h\|^2)$ grâce à la continuité des dérivées partielles secondes.

Proposition 7.3.6 (Cas $n = 2$) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, on suppose que le point a de U est un* **point critique** *et on note*

$$r = D_{1,1}^2 f(a) \quad s = D_{1,2}^2 f(a) \quad t = D_{2,2}^2 f(a)$$

alors si

1. $s^2 - rt < 0$
   - *et $r > 0$ on a un minimum local*
   - *et $r < 0$ on a un maximum local*
2. $s^2 - rt > 0$, *on a un point col (ni maximum local, ni minimum local)*

Preuve : Dans le cas particulier $n = 2$ et avec a point critique la formule de Taylor-Young s'écrit

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

et on s'intéresse au signe de la forme quadratique

$$q(h_1, h_2) = rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2$$

Les différents cas de la proposition correspondent à

1. $s^2 - rt < 0$
   - et $r > 0$ q est une forme définie positive
   - et $r < 0$ q est une forme définie négative
2. $s^2 - rt > 0$, q est une forme non dégénérée, ni positive, ni négative.

Exercice 9 Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, déterminer ses points critiques et les classer.

7.4 Intégrales multiples

7.4.1 Intégrales doubles

Théorème 7.4.1 *Soit f une fonction continue sur le pavé $P = [a,b] \times [c,d]$ à valeurs réelles ou complexes. On a*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx := \iint_P f(x,y)\,dxdy$$

Preuve : Grâce aux résultats des intégrales à paramètre on sait que les fonctions A et B définies par

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \quad B(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

sont continues sur respectivement $[a,b]$ et $[c,d]$. Les intégrales doubles sont bien définies.
Notons H la primitive de A sur $[a,b]$ qui s'annule en a, ainsi

$$H(b) = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Notons K la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$K(t) = \int_c^d \left(\int_a^t f(x,y)\,dx \right) dy$$

Avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètre (vérifier que les hypothèses sont bien satisfaites) nous avons que K est dérivable sur $[a,b]$ et $K'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy = A(t)$. Comme $K(a) = H(a) = 0$, nous avons $K = H$ soit $K(b) = H(b)$ ce qui est le résultat attendu.

Définition 7.4.2 *Soient I et I' deux intervalles non vides ou non réduits à un point, f* **continue positive** *sur $I \times I'$ alors f est dite* **intégrable** *sur $I \times I'$ s'il existe $M > 0$ tel que pour tout segment $J \subset I$, tout segment $J' \subset I'$ on a $\iint_{J \times J'} f(x,y)\,dxdy \leq M$. On pose alors*

$$\iint_{I\times I'} f(x,y)\,dxdy := \sup_{J,J'} \left\{ \iint_{J\times J'} f(x,y)\,dxdy \right\}$$

On suit alors le même cheminement que pour la définition de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle quelconque. Nous en donnons les grandes lignes.

1. f continue à valeurs réelles ou complexes est dite intégrable sur $I \times I'$ si $|f|$ l'est.
2. f à valeurs réelles continue et intégrable alors f^+ et f^- sont intégrables et
$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} f^+ - \iint_{I\times I'} f^-$$
3. f à valeurs complexes continue et intégrable alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont intégrables et
$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} Re(f) + i \iint_{I\times I'} Im(f)$$

Théorème 7.4.3 (Fubini) *Soit f une fonction à valeurs complexes, continue et intégrable sur $I \times I'$. Si pour tout x de I la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I' et si l'application $g \ : \ x \mapsto \int_{I'} f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, on a*

$$\iint_{I\times I'} f = \int_I g$$

De plus, si la fonction $f(\cdot,y)$ est intégrable sur I pour tout y de I' et si l'application $h \ : \ y \mapsto \int_I f(\cdot,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur I', on a

$$\int_I g = \int_{I'} h$$

Preuve : admis.

7.4.2 Intégrale sur une partie simple du plan, notion d'aire

Définition 7.4.4 *Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si elle admet les deux définitions suivantes*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

où φ_1, φ_2 (resp. ψ_1, ψ_2) sont des fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) vérifiant $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pour tout x de $]a,b[$ (resp. vérifiant $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pour tout y de $]c,d[$).

Proposition 7.4.5 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur une partie élémentaire A du plan. On note $\hat{f}$ la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$, obtenue en prolongeant f par 0 sur le complémentaire de A. Alors les intégrales ci-dessous sont bien définies et*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x,y)\,dx \right) dy := \iint_A f$$

Lorsque $f = 1$, l'aire de la partie élémentaire A est le réel

$$v_2(A) = \iint_A 1$$

Exercice 10
Ecrire les intégrales doubles à l'aide des fonctions φ_i et ψ_i.

Proposition 7.4.6 *Ces résultats s'étendent au cas où A est une partie simple du plan, c'est à dire, la réunion de partie élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.*
On a additivité de l'aire pour une réunion finie de parties simples dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

Théorème 7.4.7 (Formule de changement de variable) *Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans V. Soit D et Δ deux compacts simples, tels que $\varphi(D) = \Delta$, f une fonction continue sur Δ, si de plus l'ensemble des points de Δ qui ont plusieurs antécédents par φ est d'aire nulle alors*

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \iint_D f \circ \varphi(u,v) |jac(\varphi(u,v)|\,dudv$$

Preuve : admis
Exercice 11
Retrouver la formule de changement de variables lors du "passage en coordonnées polaires".

7.5 Exercices

Exercice 12
a) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq 0$ $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. f est-elle continue en $(0,0)$?
b) On suppose que l'on a une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.
c) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq 0$ $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. f est-elle différentiable ?
Exercice 13
Soient f une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,dt$.
a) Soit G l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(u,v,x) = \int_u^v f(t,x)\,dt$, montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
b) En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
Exercice 14
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
(i) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^p f(x_1, \cdots, x_n)$.
(ii) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = pf(x)$.
Indication pour montrer que (ii) implique (i) : fixer $(x_1, \cdots, x_n)$ et considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = f(tx_1, \cdots, tx_n)$. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre dont g est solution puis conclure.
Exercice 15
a) Soit l'ensemble Ω des $(n-1)$-uplets vérifiant $x_1 > 0, \cdots, x_{n-1} > 0$, $\sum_{k=1}^{n-1} x_k < 1$. Justifier que Ω est ouvert et que $\overline{\Omega}$ est compact.
b) Montrer que l'application $f \ : \ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) \prod_{k=1}^{n-1} x_k$ possède un maximum sur Ω et déterminer ce maximum.
Exercice 16
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$. Déterminer les extrema locaux de f et préciser leur nature.
Exercice 17

Soit f une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout réel t, $\|f(t)\| = 1$; où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standart de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout réel t, $(\mathrm{grad} f(t) \mid f(t)) = 0$ où $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$. Interprétation géométrique ?

Exercice 18

Soient $R > 0$, $D_R = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ et $\Delta_R = [0, R] \times [0, R]$. On pose $I(R) = \int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ et $J(R) = \int_{\Delta_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$.

a) Calculer $I(R)$.

b) Montrer que $I(R) \leq J(R) \leq I(R\sqrt{2})$ et en déduire que $\lim_{R \longrightarrow +\infty} I(R) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} J(R)$.

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ converge et donner sa valeur.

Exercice 19

Calculer $\iint_D xy\, dxdy$ où D est la partie bornée du plan limitée par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.

Exercice 20

En utilisant le théorème de Fubini, calculer

$$I = \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin \frac{\pi x}{2y}\, dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \frac{\pi x}{2y}\, dy \right) dx$$

Devoir 1

A rendre au plus tard lundi 13 février

Exercice 30 du chapitre "Suites et Séries numériques"

Problème

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) de réels strictement positifs par les relations de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} & = & \sqrt{b_n a_{n+1}} \end{cases}$$

et la donnée des premiers termes a_0 et b_0 tels que $0 < a_0 < b_0$.
a) Montrer que la suite (a_n) est croissante, que la suite (b_n) est décroissante et que pour tout entier n, $a_n < b_n$.
b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent. Que peut-on dire de leur limite ?
c) Montrer que pour tout entier n

$$b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = \frac{a_{n+1}}{2}(b_n - a_n).$$

En déduire que

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n) \quad \text{puis que} \quad b_n - a_n \leq \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0).$$

2. On pose pour tout entier n, $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Montrer que pour tout entier n, $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$ et que $b_{n+1} = b_n c_{n+1}$.

3.
a) Justifier qu'il existe un réel α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $c_0 = \cos\alpha$. Montrer que

$$c_1 = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = b_0 \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

b) Donner les expressions en fonction de n, α et b_0 de c_n, b_n et a_n.
c) Montrer que la limite commune aux suites (a_n) et (b_n) est $b_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

4. On prend $a_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $b_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, on pose pour tout entier n

$$p_n = \frac{1}{b_n} \quad \text{et} \quad q_n = \frac{1}{a_n}.$$

a) Montrer que les suites (p_n) et (q_n) convergent vers π.
b) Montrer que pour tout entier n

$$0 \leq q_n - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n} \quad \text{puis que} \quad 0 \leq \pi - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}.$$

A partir de quel rang n_0 est-on assuré que p_n approche π à moins de 10^{-8} près ?

5. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et pour tout entier n, deux polygones réguliers P_n et Q_n ayant 3×2^n côtés. P_n étant inscrit dans $\mathcal{C}$ et Q_n exinscrit à $\mathcal{C}$. Voir les cas $n = 0$ et $n = 1$ au dos de la feuille.
a) Evaluer en fonction n une mesure de l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n ou de Q_n.
b) Vérifier que p_n est la valeur du demi-périmètre de P_n et que q_n est la valeur du demi-périmètre de Q_n (on pourra penser à la formule d'Al-Kashi pour p_n).

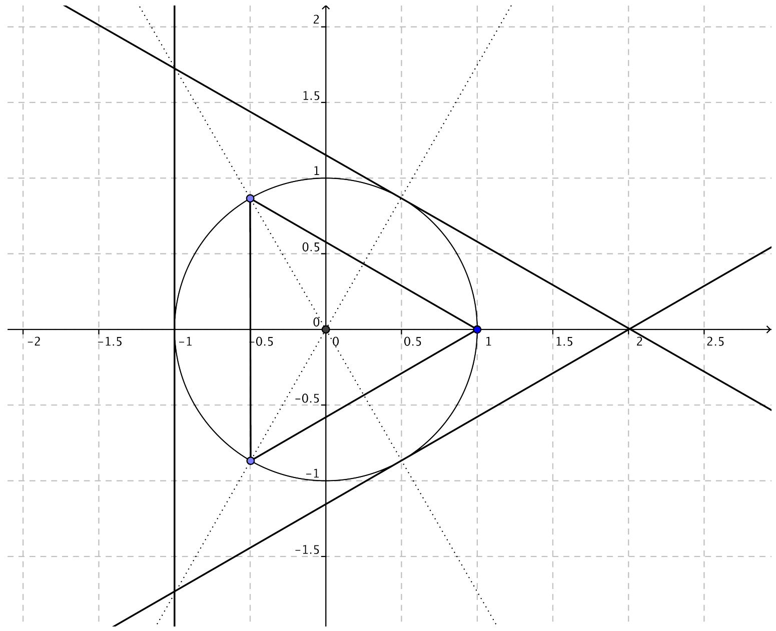

FIGURE 1 – Les polygones P_0 et Q_0

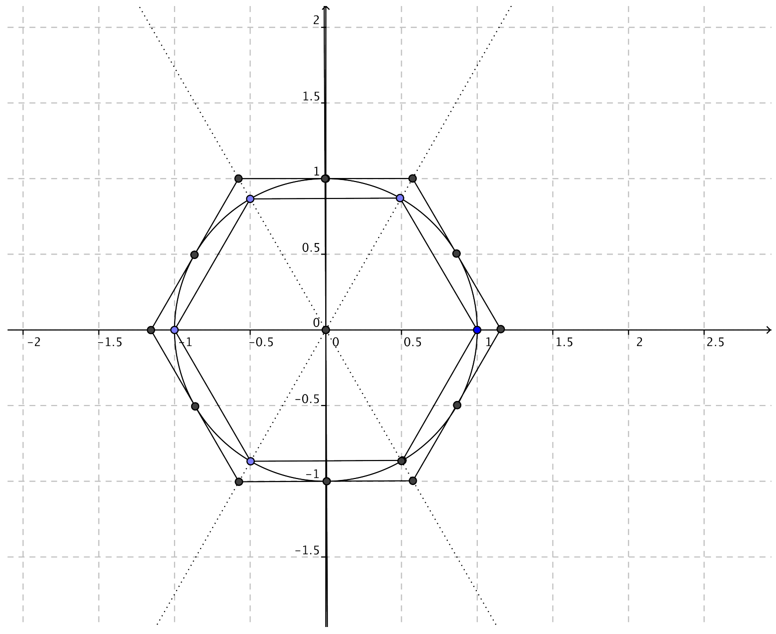

FIGURE 2 – Les polygones P_1 et Q_1

Eléments de correction du devoir n°-1

Exercice

a) Par décroissance de f sur $[1,+\infty[$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1] \qquad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

$$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

par positivité de l'intégrale.

De plus, $\int_k^{k+1} f(x)dx = g(k+1) - g(k)$, d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq f(k) - (g(k+1) - g(k)) \leq f(k) - f(k+1)$$

b) Notons $\varepsilon_k = f(k) - (g(k+1) - g(k))$, avec a) $\varepsilon_k \geq 0$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \leq \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k+1))$$
$$\leq f(1) - f(n+1)$$
$$\leq f(1) \quad \text{car } f \text{ positive}$$

La série de terme général positif ε_k est majorée donc elle converge vers un réel C' et $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k - C'$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) - g(n+1) + g(1) = C' + \alpha_n.$$

On a le résultat demandé avec $C = C' - g(1)$.

c) En prenant pour f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, f est continue, décroissante et positive sur $[1,+\infty[$; pour g la fonction $\ln$, primitive de f on a avec b).

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = C + \alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = C + \alpha_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$, avec ce qui précède la suite (S_n) converge.

d) $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

en utilisant un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$.

D'où $u_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

(car $o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{<<} \frac{1}{n^2}$)

$v_n = -\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série convergente (série de Riemann avec $2>1$), dont le terme général est de signe constant. Grâce à l'équivalence u_n est aussi de signe constant pour n assez grand et avec le théorème d'équivalence des restes dans le cas de la convergence :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

$v_k = -\frac{1}{2k^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$, en appliquant à nouveau le théorème d'équivalence des restes :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \iff \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

e) $\sum_{k=1}^{n} u_k = S_1 + \sum_{k=2}^{n}(S_k - S_{k-1}) = S_n$, $\lim_n S_n = \gamma$ d'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \gamma = S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Avec d) on a $S_n = \gamma - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

f) (Question difficile)

Il faut recommencer le même procédé avec $R_n = S_n - \frac{1}{2n}$

On pose $w_n = R_n - R_{n-1}$ pour $n \geq 2$, $w_1 = R_1$, alors

$$w_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = +\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Comme au c)

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Dont on déduit avec le théorème d'équivalence des restes

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} W_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$$

$$\gamma = R_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} W_n = S_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{soit}$$

$$S_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Rem = - On peut en itérant le procédé obtenir un développement asymptotique à la précision voulue.
- On retrouvera la constante d'Euler dans les problèmes de Capes externe 1988 et 2010

Problème (inspiré du Capes interne 1991 - Méthode d'Archimede)

1) a) Notons (H_n) la propriété $0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$

. (H_0) vérifiée

$a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) > a_0 > 0$ car $b_0 > a_0 > 0$

$a_1 < \frac{1}{2}(b_0 + b_0)$ car $a_0 < b_0$.

d'où $b_1 = \sqrt{b_0 a_1}$ vérifie $a_1 < b_1 < b_0$ car $0 < a_1 < b_0$

. $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$

$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$ et par (H_n) $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$ d'où

$$0 < a_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+1} \quad (1)$$

$b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} a_{n+2}}$ d'où avec (1)

$$a_{n+2} < b_{n+2} < b_{n+1} \quad (2)$$

(1) et (2) impliquent (H_{n+1})

On a montré que pour tout entier n, $[(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})]$ (hérédité) (H_0) est vérifiée (initialisation) donc (H_n) vraie pour tout entier n

Ce qui donne $(a_n)_n$ croissante (strictement),
(b_n) décroissante (strictement) et pour tout entier n, $a_n < b_n$.

1b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$, (b_n) décroissante donc pour tout entier n,

$$a_n < b_0.$$

La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0, elle converge vers l réel.
La suite (b_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge vers l' réel.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow l = \frac{l + l'}{2} \Rightarrow l = l'.$$

1c) $$b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1}(b_n - a_{n+1}) = a_{n+1}\left(\frac{b_n - a_n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (b_{n+1} - a_{n+1})(b_{n+1} + a_{n+1}) = \frac{a_{n+1}}{2}(b_n - a_n)$$

$b_{n+1} + a_{n+1} > 0$.

$$\Rightarrow b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{a_{n+1}}{2(b_{n+1} + a_{n+1})}(b_n - a_n)$$

or $b_{n+1} + a_{n+1} > 2a_{n+1} > 0$, $b_n - a_n > 0$ d'où

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n)$$

Après une récurrence immédiate, on a

$$b_n - a_n \leq \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0)$$

2) $$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{b_n}} = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{a_n + b_n}{b_n}} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}}$$

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_{n+1} b_n}{b_n^2}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{car } b_n > 0.$$

d'où $b_{n+1} = b_n c_{n+1}$.

3a) $\cos$ continue, strictement décroissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$, $0 < a_0 < b_0$ implique $0 < c_0 < 1$, il existe un unique α dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos\alpha = c_0$.
(Si on se contente de l'existence comme demandé, la continuité suffit)

$$c_1 = \sqrt{\frac{1+c_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{car} \quad \cos\frac{\alpha}{2} \geq 0 \quad \left(\frac{\alpha}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

$$b_1 = b_0\, c_1 = b_0 \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \text{car} \quad \sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

b) Montrons par récurrence que $c_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

On note (H_n) l'assertion $c_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

(H_0) vérifié car $c_0 = \cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2^0}\right)$

$(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \quad \text{car} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \geq 0.$$

(H_0) vérifié, pour tout entier n, $[(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})]$ d'où (H_n) vérifiée pour tout entier n.

Notons (P_n) l'assertion $b_n = b_0 \dfrac{\sin\alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

- (P_0) vérifiée car $b_0 = b_0 \dfrac{\sin\alpha}{2^0\sin\left(\frac{\alpha}{2^0}\right)}$
- $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$

$$b_{n+1} = b_n\, c_{n+1} = b_0 \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$$

$$= b_0 \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \quad \text{car } \sin a = 2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}$$

$$= b_0 \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}$$

(P_0) vérifiée, pour tout entier n, $[(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})]$. d'où (P_n) vérifiée pour tout entier n.

$$a_n = b_n\, c_n = b_0 \frac{\sin\alpha}{2^n \tan\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$$

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_n \frac{\alpha}{2^n} = 0. \\ \sin x \underset{0}{\sim} x \end{array}\right\} \Rightarrow 2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2^n \frac{\alpha}{2^n}$

D'où $\lim_n b_n = b_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_n a_n$ (déjà vu que la limite est la même au 1b)).

Si il n'avait pas été remarqué précédemment que (a_n) et (b_n) ont même limite, on le retrouve ici puisque $\lim_n \cos(\frac{\alpha}{2^n}) = 1$

4) a) $c_0 = \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$ car $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\lim_n b_n = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\pi} = \lim_n a_n$.

les suites (a_n) et (b_n) ont la même limite $\frac{1}{\pi}$ non nulle donc (p_n) et (q_n) ont la même limite π (limite d'un inverse).

- $0 < a_n < b_n \Rightarrow 0 < \frac{1}{b_n} < \frac{1}{a_n} \Rightarrow q_n - p_n \geqslant 0$.
- $q_n - p_n = \frac{b_n - a_n}{a_n b_n} \leq \frac{1}{4^n} \frac{b_0 - a_0}{a_n b_n}$ avec 1c) et $a_n > 0$, $b_n > 0$.

Pour tout n, $b_n > a_n \geqslant a_0$ d'où $q_n - p_n \leq \frac{1}{4^n} \frac{b_0 - a_0}{a_0^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$ (1)

- La suite (q_n) est décroissante (car (a_n) croissante et pour tout n, $a_n > 0$) et converge vers π, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi \leq q_n$ (2)
- La suite (p_n) est croissante (car (b_n) décroissante et $b_n > 0$) et converge vers π, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq \pi$ (3)

Avec (1), (2), (3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \pi - p_n \leq q_n - p_n \leq \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$.

Pour $\frac{3\sqrt{3}}{4^n} \leq 10^{-8}$ on est assuré que p_n approche π à au moins 10^{-8} près. Soit $n \geqslant \frac{\ln(3\sqrt{3}) + 8\ln 10}{\ln 4}$, $n_0 = 15$ convient.

5a) les polygones sont réguliers, tous les angles sont égaux. et il y en a 3×2^n. Une mesure est $\frac{2\pi}{3 \times 2^n}$.

b) Note l_n la longueur d'un côté du polygone inscrit et L_n son demi périmètre

$l_n^2 = 1 + 1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3 \times 2^n}\right)$ (Al-Kashi)

$= 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3 \times 2^n}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ soit $L_n = \frac{3 \times 2^n}{2} \times 2\sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)$

Note t_n la longueur d'un côté du polygone exinscrit, T_n demi-périmètre

$\tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \frac{\frac{1}{2} t_n}{1}$ d'où $T_n = \frac{3 \times 2^n}{2} \times 2\tan\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)$

et $b_0 \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$, on a bien $L_n = \frac{1}{b_n} = p_n$, $T_n = \frac{1}{a_n} = q_n$

Corrigé du devoir maison 2

Exercice 18 (chap 4)

1) $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P = N$ alors $N(P) = \sum_{n=0}^{N} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$

on a une somme finie de termes positifs donc

- $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N(P) \in \mathbb{R}_+$
- $N(P) = 0 \iff \begin{pmatrix}\forall n \\ \mathbb{N}\end{pmatrix} P^{(n)}(0) = 0$

$\iff P = 0$

car le seul polynôme qui a un zéro d'ordre infini est le polynôme nul.

- $\begin{pmatrix}\forall n \\ \mathbb{N}\end{pmatrix} (\lambda P)^{(n)} = \lambda P^{(n)}$ $\qquad N(\lambda P) = |\lambda| N(P) \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$
- $\begin{pmatrix}\forall n \\ \mathbb{N}\end{pmatrix} |(P+Q)^{(n)}(0)| = |P^{(n)}(0) + Q^{(n)}(0)| \leq |P^{(n)}(0)| + |Q^{(n)}(0)|$

$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q) \quad \forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$

<u>N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$</u>.

2) On rappelle que pour tout polynôme de degré N,

$P(X) = \sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$ (calcul direct ou formule de Taylor à l'ordre $N+1$)

D'où $\begin{cases} e_k^{(n)}(0) = 0 & \text{si } n \neq k \\ e_k^{(n)}(0) = k! & \text{si } k = k \end{cases} \Rightarrow N(e_k) = \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

$D(e_k) = X^{k-1} = (k-1)e_{k-1} \Rightarrow N(D(e_k)) = \frac{k-1}{k-1} = 1 \quad \forall k \geq 2$

- $\lim_{k \to +\infty} N(e_k) = 0$ donc $(e_k)_k$ converge vers 0 dans (E,N).
- $\forall k \geq 2$ $N(D(e_k)) = 1$ donc $(De_k)_k$ ne converge pas vers $D(0) = 0$ (D linéaire) dans (E,N). <u>D n'est pas continue en 0</u>.

D étant linéaire, s'il existe a dans E tel que D continue en a alors

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta, \ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |D(x)-D(a)| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta, \ |y| \leq \eta \Rightarrow |D(y)| \leq \varepsilon$

en prenant $y = x-a$, $D(y) = D(x) - D(a)$ par linéarité.

Exercice 28 (chap 4)

a) $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi}$

b) $H_0(y) = (-1)^0 e^{y^2/2} e^{-y^2/2} = 1$

$H_1(y) = (-1) e^{y^2/2} (-y) e^{-y^2/2} = y$

$H_2(y) = (-1)^2 e^{y^2/2} \frac{d}{dy}\left[-y e^{-y^2/2}\right] = e^{y^2/2}\left[-1+y^2\right] e^{-\frac{y^2}{2}} = y^2-1$

c) P_n : H_n fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.

. P_0 vérifié.

. Montrons que pour tout n, $[P_n \Rightarrow P_{n+1}]$

$H_{n+1}(y) = -e^{y^2/2} \frac{d}{dy}\left[(-1)^n \frac{d^n}{dy^n}\left(e^{-y^2/2}\right)\right] = -e^{y^2/2} \frac{d}{dy}\left[e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)\right]$

$= -\left[-y H_n(y) + H_n'(y)\right] = y H_n(y) - H_n'(y)$.

Avec P_n, H_n fonction polynomiale donc H_n' aussi et H_{n+1}.

$\left.\begin{array}{l} \deg(y H_n) = n+1 \\ \deg(H_n') \leq n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \deg(H_{n+1}) = n+1$

le coefficient dominant de H_{n+1} est celui de $y \mapsto y H_n(y)$ soit 1 avec P_n. On a P_{n+1}

P_0 vérifié, pour tout n de $\mathbb{N}$, $[P_n \Rightarrow P_{n+1}]$, par récurrence on a P_n vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}$.

d) Commençons par montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bien défini sur E^2.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad \int_a^b |f(x)g(x)| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \leq \left(\int_a^b \left| f(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{(2\pi)^{1/4}} \right|^2 dx\right)^{1/2} \times \left(\int_a^b \left| g(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{(2\pi)^{1/4}} \right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} g^2(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \|f\| \times \|g\| < +\infty$$

les applications

$$a \mapsto \int_a^b |f(x)g(x)| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \quad \text{et} \quad b \mapsto \int_a^b |f(x)g(x)| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

sont respectivement décroissante et croissante, elles sont bornées d'où les limites lorsque a tend vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ existent. $\langle f,g \rangle$ est bien défini.

- $\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \geq 0 \Rightarrow \langle f,f \rangle \geq 0$ par positivité de l'intégrale. $\langle , \rangle$ est positive.
- $\langle f,f \rangle = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ car $x \mapsto f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ continue et positive sur $\mathbb{R}$, $e^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$ $f^2(x)=0$. $\langle , \rangle$ est définie.
- le produit étant commutatif, $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle$ (symétrie)
- $\forall (f,g,h) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle f, \lambda g + h \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\lambda g(x) + h(x)\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda f(x) g(x) + f(x) h(x)\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$= \lambda \langle f,g \rangle + \langle f,h \rangle$$

par linéarité de l'intégrale.

$\langle , \rangle$ est linéaire par rapport à la deuxième variable

e) H_n fonction polynômiale donc continue, de plus $y \mapsto H_n^2(y)\, e^{-y^2/2}$ continue sur $\mathbb{R}$, elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{|y| \to +\infty} y^2 \left(H_n^2(y) e^{-y^2/2} \right) = 0$ donc, par comparaison entre fonctions positives, $\int_1^{+\infty} H_n^2(y)\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ et $\int_{-\infty}^{-1} H_n^2(y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ sont finies car $\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{y^2}$ convergent.

$\underline{H_n \in E} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f) Soit P une fonction polynômiale, $a < b$ des réels

$$I_n(a,b) = \int_a^b P(x)\, H_n(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_a^b P(x) (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Après intégration par parties, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$$I_n(a,b) = \left[P(x) \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \right]_a^b - (-1)^n \int_a^b P'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

car P et $x \mapsto \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$I_n(a,b) = \left[-P(x) H_{n-1}(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_a^b + \int_a^b P'(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n-1}(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (*)$$

P et H_{n-1} fonctions polynômiales d'où

$$\lim_{a \to -\infty} P(a) H_{n-1}(a) e^{-a^2/2} = \lim_{b \to +\infty} P(b)\, H_{n-1}(b)\, e^{-\frac{b^2}{2}} = 0$$

et en passant à la limite dans $(*)$

$\underline{\langle P, H_n \rangle = \langle P', H_{n-1} \rangle} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X], \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Si $p \neq n$, par exemple $p < n$ et en itérant ce qui précède

$$\langle H_p, H_n \rangle = \langle H_p^{(p+1)}, H_{n-p-1} \rangle = \langle 0, H_{n-p-1} \rangle = 0.$$

car $\deg(H_p) = p$ et $n-p-1 \geq 0$.

$(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>famille orthogonale</u>.

g) De même $\langle H_n, H_n \rangle = \langle H_n^{(n)}, H_{n-n} \rangle = \langle n!\, H_0, H_0 \rangle$

$$= n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = n!$$

$\underline{\| H_n \| = \sqrt{n!}}$ (rem $H_n^{(n)} = n!\, H_0$ car $\deg(H_n) = n$ et de coefficient dominant 1).

Analyse M1 ENSM **Ch. Menini**

Devoir surveillé - lundi 12 mars 2012

Durée 3h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée.

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geq 2$, par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$

1) Exprimer simplement v_n en fonction de n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$ de la suite (v_n).

2) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.

3) Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_n$ et (u_n) convergent. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels non nuls. On lui associe la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

On dira que le produit infini de terme général u_n (noté $\prod u_n$) converge, lorsque la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geq 1}$ admet une **limite finie non nulle**. On notera alors

$$\prod_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} p_n.$$

Lorsque la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de limite, ou bien lorsqu'elle tend vers 0, on dira que le produit infini $\prod u_k$ diverge.

1a) Montrer que si le produit infini $\prod u_k$ converge alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

1b) La réciproque est-elle vraie ? (*On pourra considérer la suite de terme général* $u_n = 1 + \frac{1}{n}$).

2) Donner un exemple de suite de réels non nuls $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

3) Montrer que le produit infini $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1 - \frac{1}{(k+1)^2})$ converge et déterminer sa valeur.

4a) Si pour tout $n \geq 1$ $u_n > 0$, montrer que $\prod u_n$ converge si et seulement si $\sum \ln(u_n)$ converge.

4b) On suppose que $u_n = 1 + \epsilon_n$ avec $(\epsilon_n)_n$ suite de termes de signe constant, qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \geq 1$ $|\epsilon_n| < 1$.

Montrer que $\prod u_n$ converge si et seulement si $\sum \epsilon_n$ converge.

5) On note $(q_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers ($q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$, …). Le but de cette question est de montrer que $\sum \frac{1}{q_n}$ diverge.

5a) Justifier la convergence des séries ci-dessous, puis les calculer

$$\forall n \geq 1, \quad a_n := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q_n^k}.$$

5b) Si on suppose que $\sum \frac{1}{q_n}$ converge, montrer qu'alors le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

5c) Montrer que

$$a_1 a_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{q_1^{k_1} q_2^{k_2}},$$

puis que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$a_1 \cdots a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{1}{q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n}}.$$

5d) En déduire que $a_1 \cdots a_n \geq \sum_{j=1}^{q_n} \frac{1}{j}$ puis conclure. (*On rappelle que tout entier naturel supérieur ou égal à 2, N, admet une décomposition unique (à l'ordre près) en produit de nombres premiers.*)

Exercice 3.
Pour $(a,b,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, on note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$$

et $I_n(a,b) = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\,dt$.
1a) Justifier que pour toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à N,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

1b) En déduire que pour tout entier k, $P_n^{(k)}(0)$, les dérivées successives de P_n en 0, sont des entiers relatifs.
1c) Montrer de même que pour tout k de $\mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ est dans $\mathbb{Z}$.
2) Montrer qu'il existe un réel strictement positif M, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{[0,\pi]} |P_n| \leq \frac{M^n}{n!}.$$

3a) Montrer, sans utiliser la formule de Stirling, que la suite $\left(\frac{M^n}{n!}\right)_n$ converge vers 0.
3b) En déduire que $\lim_n I_n(a,b) = 0$.
Le reste de l'exercice a pour but de montrer par l'absurde que π est irrationnel.
4) Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$, démontrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$, la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_0^\pi f(t) g^{(N)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \left[f^{(k-1)}(t) g^{(N-k)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^N \int_0^\pi f^{(N)}(t) g(t)\,dt.$$

5a) On suppose que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n(a,b)$ est dans $\mathbb{Z}$.
5b) Conclure que π est irrationnel.

Exercice 4.
1) Justifier que pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
On note

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\,dt.$$

2) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = -\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-tx}\,dt$.
3) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
4) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ puis en déduire une expression simple de F.

Analyse M1 ENSM 2011-2012 Ch. Menini

Eléments de correction du DS du 12 mars.

Exercice 1

1) $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

DL_3 . $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$v_n = 1 + \overline{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)}^{(2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= -\frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$

Avec le critère d'équivalence des séries de terme général de signe constant, $\sum v_n$ de même nature que $\sum \frac{1}{n^2}$ donc converge.

3) $\sum_{n=2}^{N} v_n = \ln u_N - \ln u_1$

$\sum v_n$ converge signifie que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=2}^{N} v_n\right)_N$ converge vers une limite finie. La suite $(\ln u_N)_N$ converge vers une limite finie l et par continuité de la fonction exponentielle $(u_N)_N$ converge vers $e^l > 0$.

En notant $K = e^l$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{K} = 1$ soit $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

Remarque : Pour trouver K on peut utiliser les intégrales de Wallis

Exercice 2

1a) Par définition si $\prod u_k$ converge alors la suite des produits partiels $(p_n)_n$ converge vers $l \neq 0$.

D'où $(p_{n+1})_n$ converge aussi vers $l \neq 0$ et

$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{l}{l} = 1$. $\frac{p_{n+1}}{p_n} = u_n$ d'où le résultat.

1b) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\lim_n u_n = 1$

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{n+1}{1} = n+1 \quad , \lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$$

La réciproque est fausse, la suite $(u_n)_n$ converge vers 1 et le produit infini $\prod u_k$ diverge.

2) Prend $v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{n}{n+1}$ alors avec 1b), $p_n = \frac{1}{n+1}$

$v_n > 0$ et $\lim_n p_n = 0$.

3) $1 - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} = \frac{(k+2)k}{(k+1)^2}$ d'où

$$p_N = \prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{N}(k+2) \times \prod_{k=1}^{N} k \times \prod_{k=1}^{N}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

$$= (N+1)(N+2) \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2^2 \times (N+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{N+2}{N+1}$$

$\lim_{N\to+\infty} p_N = \frac{1}{2}$ donc $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ converge et $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}$

4a) Si $u_n > 0$ alors $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k > 0$.

$\prod u_n$ converge signifie par définition de $(p_n)_n$ admet une limite l non nulle, les termes de la suite sont positifs donc l est dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par continuité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\left(\sum_{k=1}^{n} \ln u_k\right)_n$ converge vers $\ln(l)$. La réciproque s'obtient en utilisant la continuité de exp.

4b) • $|\varepsilon_n| < 1 \Rightarrow u_n = 1 + \varepsilon_n > 0$

• $\lim_n \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \varepsilon_n$

• $(\varepsilon_n)_n$ suite de termes de signe constant donc $\sum \ln(u_n)$ et $\sum \varepsilon_n$ de même nature.

Et avec 4a) $\prod u_n$ converge si et seulement si $\sum \varepsilon_n$ converge.

5a) $0 < \frac{1}{q_n} < 1$ donc $\sum \left(\frac{1}{q_n}\right)^k$ converge et

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q_n^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{q_n}} = \frac{q_n}{q_n - 1}.$$

5b) $a_n = 1 + \frac{1}{q_n - 1}$, pour $n \geq 2$ $0 < \frac{1}{q_n - 1} < 1$

nous sommes dans le cadre du 4b) avec $\varepsilon_n = \frac{1}{q_n - 1}$.

$\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{q_n}$, toujours avec le critère d'équivalence

si $\sum \frac{1}{q_n}$ converge alors $\sum \varepsilon_n$ aussi et $\prod a_n$ converge.

5c) $a_1 a_2$ est le produit de deux séries convergentes à termes positifs donc la série produit de Cauchy de terme général $c_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{\varphi_1^l} \frac{1}{\varphi_2^{k-l}}$

converge et $a_1 a_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{\varphi_1^l} \frac{1}{\varphi_2^{k-l}} = \sum_{k=0} \sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{\varphi_1^{k_1}} \frac{1}{\varphi_2^{k_2}}$$

Notons (H_n) : $a_1 \cdots a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{1}{\varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n}}$

. (H_1) et (H_2) sont vérifiés

. Montrons que pour tout $n \geq 1$, $[(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})]$

Notons $b_k = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{1}{\varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n}}$. , la série produit de Cauchy des séries $\sum b_k$ et $\sum \frac{1}{\varphi_{n+1}^k}$ est convergente

et

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\varphi_{n+1}^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{k} b_l \frac{1}{\varphi_{n+1}^{k-l}}$$

Ce qui s'écrit encore avec (Hn)

$$a_1 \cdots a_n a_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_{n+1}=k} \frac{1}{\varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n} \varphi_{n+1}^{k_{n+1}}}$$

on a (H_{n+1}).

On a montré que (H_1) est vérifié, pour tout $n \geq 1$ (H_n) implique (H_{n+1}) donc (H_n) est vérifié pour tout $n \geq 1$.

5d) Pour tout entier N compris entre 2 et p_n il existe un unique n-uplet $(k_1, \ldots, k_n)$ tel que

$$N = \varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n} \quad \text{et} \quad 1 = \varphi_1^0 \cdots \varphi_n^0$$

Notons $E = \{ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n, \exists N \in [\![1, p_n]\!] : N = \varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n} \}$

alors avec la remarque précédente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{1}{q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n}} \geq \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in E} \frac{1}{q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n}}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 \cdots a_n \geq \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{j}.$$

On sait que $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{j} \right) = +\infty$ d'où $\prod a_n$ diverge et $\sum \frac{1}{\varphi_n}$ diverge avec 5b).

<u>Remarque</u> On déduit de ce résultat qu'il y a "beaucoup" de nombres premiers.

<u>Exercice 3</u>

1a) P est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $P^{(N+1)} \equiv 0$, avec la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre N

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, c \in \mathbb{R} : P(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{P^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

(5)

1b) P_n de degré $2n$ donc $P^{(k)}(0)=0$ pour $k \geq 2n+1$

Avec la formule du binome

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^{j} (-a)^{n-j} x^{n+j}.$$

Avec 1a) et identification des coefficients des monomes de même degré

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ \frac{1}{n!}\binom{n}{k-n} b^{k-n} (-a)^{2n-k} & \text{si } n \leq k \leq 2n \end{cases}$$

or pour $k \geq n$, $n!$ divise $k!$, $\binom{n}{k-n}$, b^{k-n}, $(-a)^{2n-k}$ sont des entiers relatifs, d'où $P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout k.

1c) Pose $Q_n(x) = P_n(x + \frac{a}{b}) = \frac{(bx+a)^n x^n}{n!}$, avec 1b)

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\frac{a}{b}) = Q_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$

2) La fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=x(bx-a)$ est continue sur $[0,\pi]$ donc bornée par $M>0$.

$\forall x \in [0,\pi] \quad |x(bx-a)| \leq M \quad \Rightarrow \forall x \in [0,\pi] \quad |P_n(x)| \leq \frac{M^n}{n!}$.

3a) Note $u_n = \frac{M^n}{n!}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{M}{n+1}$

$\lim_n \frac{M}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$

$\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0$ et par encadrement $\lim_n u_n = 0$

3b) $|I_n(a,b)| \leq \int_0^{\pi} |P_n(t) \sin t| \, dt$ car $0 < \pi$

$\leq \int_0^{\pi} \frac{M^n}{n!} dt \leq \pi \frac{M^n}{n!}$

Avec 3a) $\lim_n |I_n(a,b)| = 0$ soit $\lim_n I_n(a,b) = 0$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$(H_n) : \int_0^\pi f(t) g^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[f^{(k-1)}(t)\, g^{(n-k)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^n \int_0^\pi f^{(n)}(t) g(t)\,dt$$

. $(H_1) : \int_0^\pi f(t) g'(t)\,dt = \left[f(t)\, g(t) \right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t) g(t)\,dt$

est vérifiée, c'est la formule d'intégration par parties.

. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})]$

f et g étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$, f et g' le sont aussi

et (H_n) appliquée à f et g' donne :

$$\int_0^\pi f(t) (g')^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[f^{(k-1)}(t) (g')^{(n-k)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^n \int_0^\pi f^{(n)}(t) g'(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(t) g^{(n+1)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[f^{(k-1)}(t)\, g^{(n+1-k)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^n \int_0^\pi f^{(n)}(t) g'(t)\,dt \quad (*)$$

$f^{(n)}$ et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, en intégrant par parties

$$\int_0^\pi f^{(n)}(t) g'(t)\,dt = \left[f^{(n)}(t)\, g(t) \right]_0^\pi - \int_0^\pi f^{(n+1)}(t) g(t)\,dt$$

soit avec $(*)$

$$\int_0^\pi f(t) g^{(n+1)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[f^{(k-1)}(t)\, g^{(n+1-k)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^{n+1-1} \left[f^{(n+1-1)}(t)\, g^{(0)}(t) \right]_0^\pi$$
$$+ (-1)^{n+1} \int_0^\pi f^{(n+1)}(t)\, g(t)\,dt$$

on a (H_{n+1}).

On a montré que (H_1) vérifié, que $[(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})]$ pour tout $n \geqslant 1$ donc, par récurrence, (H_n) vérifié pour tout $n \geqslant 1$.

5a) En appliquant le résultat de 4) à

$f(t) = P_n(t)$, $g(t) = (-1)^{n+1} \cos t$, $N = 2n+1$ on a

$$I_n(a,b) = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \left[P_n^{(k-1)}(t)\, g^{(2n+1-k)}(t) \right]_0^\pi + 0$$

et pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$ $P_n^{(k-1)}(0)$, $P_n^{(k-1)}(\pi) = P_n^{(k-1)}\left(\frac{a}{b}\right)$,

$\cos^{(2n+1-k)}(0)$, $\cos^{(2n+1-k)}(\pi)$ sont des entiers relatifs grâce à 1c). Conclusion $I_n(a,b)$ est un entier relatif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5b) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n(a,b) \in \mathbb{Z} \\ \lim_n I_n(a,b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : I_{n_0}(a,b) = 0.$

les applications P_{n_0} et sin, sont continues et positives sur $[0,\pi]$, donc

$I_{n_0}(a,b) = 0 \Rightarrow P_{n_0}(t) \times \sin t = 0 \quad \forall t \in [0,\pi]$.

Contradiction et $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4

1) $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$ continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 par 1. Elle est donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^2 \left| \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right| = 0$ donc

$$\left| \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right| \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{t^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge.}$$

Par le théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right| dt$ converge et $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$ intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) • $\forall x > 0$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$ intégrable sur $]0,+\infty[$

• $\forall t > 0$, $x \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$ dérivable de dérivée

$x \mapsto -\sin t \, e^{-tx}$

• $\forall x > 0$, $t \mapsto -\sin t \, e^{-tx}$ continue sur $[0,+\infty[$

• $\forall x > a > 0$, $\forall t > 0$ $|\sin t \, e^{-tx}| \leq e^{-ta}$

et $t \mapsto e^{-ta}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètre

F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$

donc F dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin t \, e^{-tx} dt .$$

3) $$F'(x) = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T -\sin t \, e^{-tx} dt$$

$$\int_0^T -\sin t \, e^{-tx} dt = \mathrm{Im}\left[-\int_0^T e^{(-x+i)t} dt\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left(-\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^T\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\left(e^{(-x+i)T}-1\right)\right)$$

$\left|e^{(-x+i)T}\right| = e^{-xT}$, $\lim_{T\to+\infty} e^{-xT} = 0$ car $x>0$,

par continuité de la partie imaginaire :

$$\int_0^{+\infty} -\sin t \, e^{-tx} dt = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{x^2+1} .$$

<u>Remarque</u> : on peut aussi calculer cette intégrale sans passer aux complexes, en faisant deux intégrations par parties.

4) $\forall x>0, \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-tx} dt = \lim_{T\to+\infty}\left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^T = \frac{1}{x}$.

De plus

$$\forall x>0, \ \forall t\in]0,+\infty[, \ \left|\frac{\sin t}{t} e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$$

d'où $\quad \forall x>0 \quad |F(x)| \leq \frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

- $\forall x\in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \implies \exists C\in\mathbb{R}, F(x) = C - \mathrm{Arctan}\, x$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0 = C - \frac{\pi}{2}$ d'où $F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

<u>Remarque</u> On peut montrer (c'est plus compliqué, voir ex29 chapitre 3 que $\lim_{x\to0^+} F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Analyse M1 ENSM **Ch. Menini**

Examen - jeudi 3 mai 2012

Durée 4h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée.

Exercice 1.

1) a) Montrer que

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad e^x \geq x+1$$

b) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, $e^x - x > 0$.

2) a) Quel est le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$?

b) Montrer que f est croissante sur $[0,1]$ et que pour tout x de $[0,1]$, $f(x)$ est dans $[0,1]$.

3) Quelle est la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$?

4) On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

5) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

On note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note e_n les fonctions polynomiales définies par $e_n(x) = x^n$; e_0 est définie par $e_0(x) = 1$.

Soit $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'opérateur de différence première défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x), \quad \text{où } \Delta P = \Delta(P)$$

1) Montrer que Δ est une application linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

2) Déterminer $\Delta(e_0)$, $\Delta(e_1)$ et $\Delta(e_2)$. Δ est-elle injective ?

3) Justifier que si P est un polynôme de degré p alors $\Delta(P)$ est de degré inférieur ou égal à $p-1$.

4) On note $\Delta^k = \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ (k fois) et $\Delta^0 = \mathrm{id}$. Que vaut $\Delta^{p+1}(P)$ si P est un polynôme de degré p ?

On définit de nouvelles fonctions polynomiales H_n par

$$H_0(x) = 1 \; ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

5) a) Montrer que $\Delta H_0 = 0$, $\Delta H_n = H_{n-1}$ si $n \geq 1$.

b) Montrer que $\left(\Delta^k H_n\right)(0) = \delta_{n,k}$.

6) Démontrer que $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, le sous-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à N.

7) a) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_N[X]$

$$P = \sum_{n=0}^{N} \left(\Delta^n P\right)(0) H_n$$

b) Déterminer le noyau de Δ

c) Montrer que $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est surjective.

8) a) Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Démontrer que l'on définit une norme sur $\mathcal{P}$.

b) Calculer pour tout entier n, $\|e_n\|$ et $\|\Delta(e_n)\|$.

c) L'application linéaire $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est-elle continue pour cette norme ?

9) a) Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose $N(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\left(\Delta^n P\right)(0)|$. Démontrer que l'on définit une norme sur $\mathcal{P}$.

b) Montrer que l'application linéaire $\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est continue pour cette norme N et de norme égale à 1.

Exercice 3.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note u_n le nombre de matrices réelles à n lignes et n colonnes ayant exactement deux 1 dans chaque ligne et chaque colonne et des zéros ailleurs, on peut vérifier assez facilement que $u_2 = 1$, $u_3 = 6$ (il n'est pas demandé de le faire). On pose $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, on a alors la relation de récurrence (admis)

$$\forall n \geq 2 \quad u_n = n(n-1)u_{n-1} + \frac{n(n-1)^2}{2} u_{n-2}$$

1) On pose pour tout entier n, $w_n = \frac{u_n}{(n!)^2}$. Montrer que la suite (w_n) vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \geq 2 \quad w_n = \frac{n-1}{n} w_{n-1} + \frac{1}{2n} w_{n-2}$$

2) Montrer que pour tout entier n, $w_n \in [0, 1]$.
3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $w_n \geq \frac{1}{2n}$.
4) Déduire des questions 2 et 3 que le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$ est 1.
5) Pour $x \in]-1, 1[$, on note $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$. Montrer que W est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{x}{2(1-x)} y(x)$$

6) Résoudre sur $]-1, 1[$ cette équation différentielle et déterminer W.

Exercice 4.
Questions préliminaires
A- a) Pour tout $y > 0$ et tout entier non nul n, on pose $\varphi_n(y) = \arctan(n\sqrt{y}) - \arctan(\sqrt{y}/n)$. Montrer que

$$\int_{1/n}^{n} \frac{1}{1+yx^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \varphi_n(y)$$

b) Montrer que

$$\forall y \in [\frac{1}{n}, n], \quad \arctan(\sqrt{n}) - \arctan(1/\sqrt{n}) \leq \varphi_n(y) \leq \pi/2$$

B- Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\int_{1/n}^{n} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy = 2\left(\arctan(\sqrt{n}) - \arctan(1/\sqrt{n})\right)$$

Indication : on pourra faire le changement de variable $u = \sqrt{y}$.
C- Pour tout entier n, montrer que $\int_0^1 x^{2n} \ln x\, dx$ converge et que

$$\int_0^1 x^{2n} \ln x\, dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Pour tout $n \geq 1$ on note $D_n = [\frac{1}{n}, n]^2$ le pavé de $\mathbb{R}^2$ et

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}\, dxdy$$

1) a) Justifier que $I_n = \int_{1/n}^{n} \frac{\varphi_n(y)}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy$.
b) En déduire que

$$\left(\arctan(\sqrt{n}) - \arctan(1/\sqrt{n})\right) \int_{1/n}^{n} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \int_{1/n}^{n} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy$$

c) Puis en déduire que la suite (I_n) converge et a pour limite $\frac{\pi^2}{2}$.

2) Pour $x \neq 1$, trouver $a(x)$ et $(b(x)$ tels que

$$\forall y > 0 \quad \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{a(x)}{1+yx^2} + \frac{b(x)}{1+y}$$

3) Montrer que pour tout $x \neq 1$ et pour tout $n \geq 1$

$$\int_{1/n}^{n} \frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}\, dy = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right)$$

4) Montrer que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{et que } \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x^2-1} = 1$$

5) Justifier que l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx$ est bien définie puis montrer que

$$\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx$$

6) En déduire que

$$I_n = 2\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx$$

7) Montrer que pour tout x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$

$$x^2 \leq \frac{1+nx^2}{n+x^2} \leq 1$$

puis que (en prenant le prolongement par continuité pour $x = 1$)

$$0 \leq \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) \leq \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$$

8) a) On note $\mathbf{1}_I$ la fonction indicatrice de l'intervalle I. On pose pour tout tout n de $\mathbb{N}^*$, $h_n(1) = \frac{n-1}{n+1}$ et pour tout x de $[0,1[$

$$h_n(x) = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},1]}(x)$$

Déterminer la limite de la suite (h_n).

b) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx = \int_{0}^{1} \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}\, dx$$

c) En déduire que

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi^2}{8}$$

On rappelle le résultat suivant

Soit (u_n) une suite de fonctions positives, continues par morceaux sur l'intervalle I. Si la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux et intégrable sur I alors la série de terme général $\int_I u_n$ est convergente et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

9) Montrer que

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{0}^{1} x^{2n} \ln x\, dx$$

10) A l'aide des questions précédentes, calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Corrigé de l'examen, session 2012

Exercice 1

1a) Pour x dans $[0,+\infty[$, on note $g(x) = e^x - x - 1$.
g dérivable sur $[0,+\infty[$ et $g'(x) = e^x - 1$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 $+$	
$g(x)$	0 $\nearrow$	

g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $g(0)=0$ d'où pour tout x de $[0,+\infty[$ $g(x) \geq 0$.

Remarque : On a de plus montré que $g(x) > 0$ pour x.

b) $\forall x \in [0,+\infty[$, $e^x - x \geq 1 > 0$.

2a) On vient de voir que pour x de $[0,+\infty[$, $e^x - x > 0$.
Pour x dans $]-\infty, 0[$ $e^x - x \geq -x > 0$, d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b) f est dérivable sur $[0,1]$ et

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{(1-x)\,e^x + (e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$$

$\forall x \in [0,1]$, $1 - x \geq 0$, $e^x \geq 1$ $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$.
f est croissante sur $[0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ donc $f([0,1]) \subset [0,1]$.

3) $$f(x) - x = \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - 1 - x)}{e^x - x}$$

Avec 1a) la courbe représentative de f est située au dessus de la droite d'équation $y = x$. Plus précisemment on a que

$$\begin{cases} f(x) = x \\ x \in [0,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

4) Notons (H_n) : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

$u_0 = \frac{1}{2}$
: $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ car $f(x) \geq x$ pour x dans $[0,1]$.
· $u_1 \leq 1$ car $f([0,1]) \subset [0,1]$

(H_0) est vérifiée.

Montrons que pour tout entier n, (H_n) implique (H_{n+1}).
Avec (H_n) et f croissante sur $[0,1]$ on a :

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1)$$

or $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$, on a (H_{n+1}).

(H_0) est vérifiée, pour tout entier n, (H_n) implique (H_{n+1}) donc (H_n) vérifiée pour tout entier n.

5) Avec 4) la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers $l \leq 1$.

Par continuité de f, $f(l)=l$ donc $l=0$ ou $l=1$.

Pour tout entier n, $u_n \geq \frac{1}{2}$ donc $l=0$ est exclu. Conclusion $\lim\limits_{n} u_n = 1$.

<u>Exercice 2</u> (d'après Agrégation interne 2010)

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,Q) \in \mathcal{P}^2$, $\Delta(\lambda P+Q)(x) = (\lambda P+Q)(x+1) - (\lambda P+Q)(x)$

$$= \lambda\left[P(x+1)-P(x)\right] + \left[Q(x+1)-Q(x)\right]$$

$$= (\lambda \Delta P + \Delta Q)(x)$$

d'où $\Delta(\lambda P+Q) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)$, Δ est linéaire.

2) $\Delta(e_0)(x) = 1-1=0$, $\Delta(e_0)=0$

$\Delta(e_1)(x) = (x+1)-x = 1$, $\Delta(e_1) = e_0$

$\Delta(e_2)(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$, $\Delta(e_2) = 2e_1 + e_0$.

Δ n'est pas injective puisque $e_0 \neq 0$ et $\Delta(e_0)=0$

3) $P(x) = a_n x^n + Q(x)$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg Q \leq n-1$

$\Delta P(x) = a_n (x+1)^n - a_n x^n + Q(x+1) - Q(x)$

$$= a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k + Q(x+1) - Q(x)$$

Avec les abus de notation usuels

$\deg\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k\right) \leq n-1$, $\deg\left(Q(x+1)-Q(x)\right) \leq n-1$ d'où $\deg(\Delta P) \leq n-1$

4) Avec 3) et après une récurrence immédiate

$\deg(\Delta^{p+1}(P)) \leq \deg P - (p+1) \leq -1$ d'où $\Delta^{p+1}(P) = 0$.

5a) $H_0 = e_0$ et avec 2) $\Delta H_0 = 0$

$n \geq 1$, $(\Delta H_n)(x) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+1-k) - \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$

$$= \frac{1}{n!}(x+1)\prod_{j=0}^{n-2}(x-j) - \frac{1}{n!}(x-n+1)\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)$$

$$= \frac{x+1-x+n-1}{n!}\prod_{j=0}^{n-2}(x-j) = H_{n-1}(x)$$

b) Avec 4) $\Delta^k H_n = 0$ si $k \geq n+1$ (car $\deg H_n = n$)

En itérant 5a) $\Delta^k H_n = H_{n-k}$ si $k \leq n$

Si $n-k>0$, $H_{n-k}(0)=0$, si $n-k=0$ $H_{n-k}(0)=1$, et le résultat.

6) $\deg H_n = n$ suffit pour dire que $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ base de $\mathbb{R}_N[X]$ (famille libre de $N+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $N+1$).

On peut aussi remarquer que si $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n H_n = 0$ alors

pour $0\leq k\leq N$ $\Delta^k\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n H_n\right)(0) = 0$

$$= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \delta_{n,k}$$

$$= \alpha_k$$

Ce qui permet aussi d'obtenir que la famille est libre.

7a) $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ base de $\mathbb{R}_N[X]$

$\forall P\in\mathbb{R}_N[X]$, $\exists(\alpha_0,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{R}^{N+1}$: $P = \sum_{n=0}^{N}\alpha_n H_n$

Puis comme au 6)

$\forall k\in[\![0,N]\!]$, $(\Delta^k P)(0) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \delta_{n,k} = \alpha_k$

b) $\Delta P = 0 \iff \sum_{n=1}^{N} (\Delta^n P)(0)\, H_{n-1} = 0$

$\iff \forall n\in[\![1,N]\!]$ $(\Delta^n P)(0) = 0$ (car $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ base de $\mathbb{R}_N[X]$)

$\iff P = P(0)$

$\iff P\in\mathbb{R}_0[X]$

c) Soit Q un élément de $\mathcal{P}$, $N = \deg Q$, alors

$$Q = \sum_{n=0}^{N} (\Delta^n Q)(0)\, H_n = \sum_{n=0}^{N} (\Delta^n Q)(0)\, \Delta(H_{n+1})$$

Posons $P = \sum_{n=0}^{N} (\Delta^n Q)(0)\, H_{n+1}$ alors $\Delta P = Q$. Δ surjective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$

8a) • P polynôme donc continue sur $[0,1]$, P est bornée sur $[0,1]$ et $\|P\|$ élément de $\mathbb{R}_+$.

• $\|P\| = 0 \iff \forall x\in[0,1]$ $P(x) = 0$

Le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

• $\forall x\in[0,1]$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(P,Q)\in\mathcal{P}^2$, $|\lambda P(x)| = |\lambda|\,|P(x)|$

$$|P(x)+Q(x)| \leq |P(x)|+|Q(x)|$$

D'où $\|\lambda P\| = |\lambda|\,\|P\|$ et $\|P+Q\| \leq \|P\|+\|Q\|$.

b) $\|e_n\| = \sup_{[0,1]} |x^n| = 1$

$(\Delta e_n)(x) = (x+1)^n - x^n$. Pour $n\geq 1$

Δe_n est dérivable et $(\Delta e_n)'(x) = n\left[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right] \geq 0$.

Δe_n est croissante sur $[0,1]$ et $(\Delta e_n)(0) = 1$, $(\Delta e_n)(1) = 2^n - 1$

d'où $\|\Delta e_n\| = 2^n - 1$ (vrai encore pour $n=0$)

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\| \Delta(e_n) \|}{\| e_n \|} = +\infty$, Δ n'est pas continue de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ pour cette norme.

9a) • $\forall P \in \mathcal{P}$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$: $\Delta^{N_0} P = 0 \Rightarrow N(P) = \sum\limits_{n=0}^{N_0} |(\Delta^n P)(0)| \in \mathbb{R}_+$

• $N(P) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ (\Delta^n P)(0) = 0 \Rightarrow P = 0$ (avec 7a)).

• $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\Delta^n(\lambda P)(0)| = |\lambda|\, |(\Delta^n P)(0)|$ et $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$

• $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$ $|\Delta^n(P+Q)(0)| = |(\Delta^n P)(0) + (\Delta^n Q)(0)| \leq |(\Delta^m P)(0)| + |(\Delta^n Q)(0)|$

et $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$

b) $N(\Delta P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\Delta^n(\Delta P)(0)| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\Delta^{n+1}(P)(0)| \leq N(P)$.

d'où Δ continue pour N et $\|\Delta\|_{N,N} \leq 1$.

• $N(H_1) = 1$, $\Delta H_1 = H_0$, $N(H_0) = 1$ d'où $\|\Delta\|_{N,N} \geq 1$

soit $\|\Delta\|_{N,N} = 1$.

<u>Exercice 4</u>

A. a) La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan' u = \dfrac{1}{1+u^2}$.

Par composition $\displaystyle\int_{1/n}^{n} \frac{1}{1+yx^2}\,dx = \left[\frac{1}{\sqrt{y}} \arctan(x\sqrt{y})\right]_{1/n}^{n}$

$= \dfrac{\varphi_n(y)}{\sqrt{y}}$

b) La fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, d'où

$\forall y \in [\frac{1}{n}, n]$ $\arctan(\sqrt{n}) \leq \arctan(n\sqrt{y}) \leq \arctan(n^{3/2}) \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \arctan(\frac{1}{n^{3/2}}) \leq \arctan(\sqrt{y}/n) \leq \arctan(\frac{1}{\sqrt{n}})$

D'où le résultat.

B. L'application racine est $\mathcal{C}^1$ de $[\frac{1}{n}, n]$ sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}]$, d'où

$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = 2\int_{\sqrt{\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} \frac{du}{1+u^2} = 2\left(\arctan\sqrt{n} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

C. Pour $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{2n} \ln x = 0$, la fonction $x \mapsto x^{2n} \ln x$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$ donc intégrable.

Pour $n = 0$, la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$ et

$\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 = -1$.

Pour $n \geq 1$, on fait une intégration par partie

$u(x) = \ln x$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ u et v $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.

$v'(x) = x^{2n}$ $\quad v(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$0<\varepsilon<1$ $\quad \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^{2n}\ln x\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^1 x^{2n}\,dx$

$$= -\frac{1}{2n+1}\varepsilon^{2n+1}\ln\varepsilon - \frac{1}{(2n+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2n+1}\right)$$

$$\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{2n}\ln x\,dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

1 a) L'application $(x,y)\mapsto \dfrac{1}{(1+y)(1+yx^2)}$ est continue sur D_n d'où

$$I_n = \int_{1/n}^n \frac{1}{1+y}\left(\int_{1/n}^n \frac{1}{1+yx^2}\,dx\right)dy = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\varphi_n(y)}{(1+y)\sqrt{y}}\,dy \quad \text{avec A a)}$$

b) $\forall y\in[\frac{1}{n}, n]$, $1+y>0$

Avec A b) et la positivité de l'intégrale ($\frac{1}{n}\leq n$) on a le résultat.

c) Avec la question précédente et B :

$$2\left(\arctan\sqrt{n} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}\times 2\times\left(\arctan\sqrt{n} - \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\arctan\sqrt{n} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$, et avec le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge et $\lim\limits_n I_n = \frac{\pi^2}{2}$

2) $x\neq 1$ $\quad \dfrac{1}{(1+y)(1+yx^2)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{x^2}{1+yx^2} - \dfrac{1}{1+y}\right)$

3) Avec 2)

$$\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{1}{x^2-1}\Big[\ln(1+yx^2) - \ln(1+y)\Big]_{\frac{1}{n}}^n$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\left[\ln\left(\frac{1+nx^2}{1+n}\right) - \ln\left(\frac{1+\frac{x^2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right)$$

4) La fonction $l : x\mapsto \ln\left(\dfrac{1+nx^2}{n+x^2}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $l' : x\mapsto \dfrac{2nx}{1+nx^2} - \dfrac{2x}{n+x^2}$. En reconnaissant le taux d'accroissement de l en 1 :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2n}{1+n} - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}$$

De même $\dfrac{1}{x^2-1}\ln(x^2) = \dfrac{2}{x+1}\,\dfrac{\ln x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}\ln(x^2) = 1$

5) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[\frac{1}{n}, 1]$, l'intégrale est bien définie et après le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ (la fonction inverse est $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$), on a

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx = \int_{n}^{1} \frac{1}{\frac{1}{u^2}-1} \ln\left(\frac{u^2+n}{nu^2+1}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= \int_{1}^{n} \frac{1}{u^2-1} \ln\left(\frac{1+nu^2}{n+u^2}\right) du$$

6) $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx + \int_{1}^{n} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx$

$$= 2\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx \quad \text{avec 3) et 5).}$$

7) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1+tx^2}{t+x^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ pour tout x fixé dans $[0,1]$ (cf φ dérivable et $\varphi'(t) = \frac{x^4-1}{(t+x^2)^2}$).

$\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = x^2$ d'où

$\forall t \in [1, +\infty[\qquad x^2 \leq \varphi(t) \leq \varphi(1) \leq 1$ en pensant que $x^2-1 \leq 0$ pour $x \in [0,1]$.

Puis le résultat avec la croissance de $\ln$, et (en 1 on utilise le prolongement par continuité).

8a). $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(1) = 1$

. $\forall x \in]0,1[$, $\exists n_x : \forall n \geq n_x \quad h_n(x) = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right)$

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$$

. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $h_n(0) = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(0) = 0$.

8b) $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{n+x^2}\right) dx = \int_0^1 h_n(x)\,dx$. Appliquons le théorème de convergence dominée :

. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, h_n continue par morceaux sur $[0,1]$

. $\lim\limits_{n} h_n = h$ avec $h(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}$, h continue sur $]0,1]$.

. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,1]$ $\quad 0 \leq h_n(x) \leq h(x)$ $\quad$ (par 7)).

. h intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et $h(x) \underset{0}{\sim} -2\ln x$ intégrable en 0.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}\,dx$

c) Avec 1c), 6) et 8b) $2\int_0^1 \frac{\ln(x^2)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{2}$, soit $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$

9) On applique le résultat rappelé sur permutation $\int$ et Σ avec $I =]0,1[$, $u_n(x) = -x^{2n}\ln x$ $\left(\text{cf } -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n \ln x = \frac{-\ln x}{1-x^2},\ \forall x \in]0,1[\right)$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$, f continue sur $]0,1[$.

10) Avec C $\quad -\int_0^1 x^{2n} \ln x \, dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$ et avec 8c et 9

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2p\ )^2} + \frac{1}{(2p)^2} \right) = S_1 + \frac{1}{4} S_2 \quad \text{(chaque série converge)}$$

D'où $\quad S_2 = \frac{4}{3} S_1 = \frac{\pi^2}{6}$.

<u>Exercice 3</u> (d'après Mines - Ponts 2010)

1) Par hypothèse

$\forall n \geq 2 \quad (n!)^2 w_n = n(n-1)((n-1)!)^2 w_{n-1} + \frac{n(n-1)^2}{2}((n-2)!)^2 w_{n-2}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2 \quad (n!)^2 w_n = (n!)^2 \frac{1}{n(n-1)} w_{n-1} + \frac{1}{2n}(n!)^2 w_{n-2}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2 \quad w_n = \frac{1}{n(n-1)} w_{n-1} + \frac{1}{2n} w_{n-2}$

2) $w_0 = 1$, $w_1 = 0$

(H_n) : $w_n \in [0,1]$, montrons que pour $n \geq 1$, $[(H_p), 0 \leq p \leq n] \Rightarrow (H_{n+1})$

$n \geq 1$ d'où $n \geq 0$ et $n-1 \geq 0$ et avec (H_n)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \frac{n}{n+1} w_n \leq \frac{n}{n+1} \\ 0 \leq \frac{1}{2(n+1)} w_{n-1} \leq \frac{1}{2(n+1)} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq w_{n+1} \leq \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq 1$$

(H_0) et (H_1) sont vérifiés, pour tout $n \geq 1$, $[(H_p), 0 \leq p \leq n]$ implique (H_{n+1}) donc (H_n) vérifié pour tout entier n.

3) Avec une récurrence immédiate, si on a l'inégalité jusqu'au rang n

$w_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} \frac{1}{2n} + 0$

$w_{n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)}$.

$\left(\text{cf } w_2 = \frac{1}{(2!)^2} = \frac{1}{2 \times 2} \right)$

4) . $|w_n x^n| \leq |x|^n \qquad \sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge pour $|x| < 1$ donc $R_{cv} \geq 1$.

. $w_n \geq \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 2$, $\left(\frac{1}{2n}\right)$ terme général d'une série divergente

d'où $\sum_{n \geq 0} w_n$ diverge et $R_{cv} \leq 1$. Donc $R_{cv} = 1$.

5) W est dérivable sur $]-1,1[$ et $W'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n-1}$. Avec 1)

$$W'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) w_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2} w_{n-2} x^{n-1} = x\, W'(x) + \frac{x}{2} W(x).$$

6) $\frac{x}{2(1-x)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-x)}$, une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-x)}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto -\frac{x}{2} - \frac{\ln(1-x)}{2}$. D'où

$\forall x \in]-1,1[, W(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{x}{2}}$ avec $W(0) = C = w_0 = 1$