**Université Bordeaux 1, 2015-2016.** Théorie d'intégration.

M. Zarrabi.

Devoir surveillé du 10 Novembre 2015.

Sans documents (3h).

Pensez à bien justifier vos réponses.

La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

**Questions du cours :** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

(1) Enoncer le théorème de Beppo-Levi. En déduire le résultat suivant : si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : \Omega \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable, alors

$$\int_\Omega \left( \sum_{k\geq 0} f_k \right) d\mu = \sum_{k\geq 0} \int_\Omega f_k \ d\mu.$$

(2) (a) Montrer que pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$,

$$\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(b) Déduire de (a) que pour toute suite décroissante $(B_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, telle que $\mu(B_0) < +\infty$,

$$\mu(\cap_{n\geq 0} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

**Exercice 1 :** (1) Soit $f_n(x) = n^2 x^n \ln(x)$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[e^{-1},1]} f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{[e^{-1},1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Existe-t-il une fonction $g$ intégrable sur $[e^{-1}, 1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [e^{-1}, 1]$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ ?

(2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\mathbb{R} (1 + (\sin(x))^n) x e^{-x^2} \ dx.$$

(3) Pour $n \geq 1$, soit $f_n(x) = \arctan(nx) e^{-x^n}$.

Calculer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0, +\infty[$ puis $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n(x) \ dx$.

**Exercice 2 :** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) \neq 0$ et soit $f : \Omega \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable.

(1) Montrer qu'il existe un ensemble $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $f$ soit bornée sur $A$.

On pourra considérer les ensembles $A_n = \{x \in \Omega;\ f(x) \leq n\}$.

(2) Montrer que si $\mu(\{x \in \Omega;\ f(x) > 0\}) > 0$, alors il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(B) > 0$ et $f$ soit minorée sur $B$ par une constante strictement positive.

**Exercice 3 :** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $X$ un ensemble et $h : \Omega \to X$ une application.
On note $\mathcal{M} = \{B \subset X;\ h^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$.
(1) Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu sur $X$.
(2) Pour $B \in \mathcal{M}$, soit $\mu_h(B) = \mu(h^{-1}(B))$.
Montrer que $\mu_h$ est une mesure sur $\mathcal{M}$.
(3) Soit $B \in \mathcal{M}$. Montrer que $\int_X \chi_B \, d\mu_h = \int_\Omega \chi_B \circ h \, d\mu$, où $\chi_B$ est la fonction indicatrice de $B$.
Indication : remarquer que $\chi_B \circ h = \chi_{h^{-1}(B)}$.
(4) Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \ (X, \mathcal{M}) \to ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[)$,

$$\int_X f \, d\mu_h = \int_\Omega f \circ h \, d\mu.$$

**Exercice 5 :** Dans cet exercice $\mu_1$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
(1) Soit $F \subset [0, 1]$ un fermé de $[0, 1]$ tel que $\mu_1(F) = 1$. Montrer $F = [0, 1]$.
(considérer $[0, 1] \setminus F$ qui est un ouvert...)
(2) Le résultat du (1) reste t-il vrai en remplaçant $\mu_1$ par une mesure finie sur $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne de $[0, 1]$ ?
(3) Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite dense dans $[0, 1]$, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est égale à $[0, 1]$. Soit $c$ une constante avec $0 < c < 1$. On pose

$$U = ]0, 1[ \cap \left( \cup_{n \geq 1} ]a_n - \frac{c}{2^{n+1}}, a_n + \frac{c}{2^{n+1}}[ \right).$$

(i) Montrer que $U$ est un ouvert et que $\mu_1(U) < 1$.
(ii) Déterminer $\overline{U}$. Est-ce que $\mu_1(\overline{U} \setminus U) = 0$ ?
(iii) Si $F$ est une fermé de $[0, 1]$, a-t-on toujours $\mu_1(F) = \sup\{\mu_1(V);\ V \text{ ouvert inclus dans } F\}$ ?