Université Bordeaux 1, **N1MA5012 Intégration**
Mercredi 14 Novembre 2012

Devoir surveillé

La qualité de la rédaction sera tenue en compte. Veuillez justifier correctement vos réponses.

Dans tout ce sujet, Ω désigne un ensemble non vide muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure positive μ. La notation χ_A désigne la fonction indicatrice de A.

Exercice I. On définit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = -A\},$$

où $-A = \{-x, x \in A\}$ désigne l'ensemble des opposés des éléments de A.
1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2) Décrire les intervalles $[a, b]$ qui appartiennent à $\mathcal{C}$.
3) Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même ?

$$f(x) = e^x,\ g(x) = x^5,\ h(x) = \cos x.$$

4) Peut-on décrire toutes les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même ?

Exercice II. On considère sur $\Omega = \mathbb{N}$ la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et la mesure de comptage μ. On définit pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\nu(A) = \int_A x^2 d\mu(x).$$

1) Montrer que ν est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
2) Expliciter $\nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.
3) Expliciter $\int_{\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{x^4}\, d\nu(x)$. Cette intégrale est-elle finie ?

Exercice III. 1) Soit $f : \Omega \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable.
a) Montrer que si f est intégrable alors $A = \{x \in \Omega, f(x) = +\infty\}$ est $\mu-$négligeable.
b) Montrer que si f est intégrable alors $\{x \in \Omega, f(x) > 0\}$ est $\sigma-$fini.

2) a) Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions positives et mesurables sur Ω, alors

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

b) Calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx$.

Exercice IV. Soit $f : [0,1] \to]0, +\infty[$ une fonction mesurable et intégrable.
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ln(1 + e^{nf(t)}) \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + e^{nf(t)})\, dt$$

Exercice V. 1) Soit f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = -\frac{1}{n}\, \chi_{[0,n]}(x).$$

1) Monter que pour tout n, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue dx.
2) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Calculer $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n dx$. Est-ce que le résultat contredit le lemme de Fatou ?
3) Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour dx et telle que $\int_{\mathbb{R}} p\, dx = 1$. Fixons un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On définit pour $n \geq 1$

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x - \frac{t}{n}) p(t) dt.$$

a) Montrer que g_n est bien définie et que la suite (g_n) converge presque partout vers $\chi_{[a,b]}$.
b) Montrer que pour tout $A > 0$, la fonction g_n est intégrable sur $[-A, A]$ et que

$$\int_{[-A,A]} |g_n(x) - \chi_{[a,b]}(x)| dx \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$