Université Bordeaux 1 — **N1MA5012 Intégration**
Le 17 decembre 2013 — Epreuve de Mr. E.M. Ouhabaz

Examen (durée 3 h)

I. On définit la fonction

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xt}}{\cosh t} dt$$

où $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.
0) Pour quelles valeurs α et β les intégrales suivantes sont-elles convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt \;\text{ et }\; \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t} dt.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $D(F) = \{x \in \mathbb{R}, F(x) < \infty\}$ de F.
2) Montrer que F est dérivable sur tout intervalle $]a, b[$ où $-1 < a < b < 1$. En dénduire qu'elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner l'expression de $F'(x)$.
3) Rappeler le lemme de Fatou.
4) Soit $x_n \in]-1, 1[$ une suite qui converge vers 1. Que vaut $\lim_{n\to\infty} F(x_n)$?

II. On considère la suite de fonctions f_n définies pour $x \geq 0$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^3}.$$

1) Justifier que la suite f_n est convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction mesurable f.
2) Justifier que $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, dx)$.
3) Montrer que f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, dx)$.
4) Montrer que f_n et la fonction g définie par

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^3}$$

sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, dx)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
5) Montrer que f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, dx)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

III. Soit Ω un ensemble non vide muni d'une tribu $\mathcal{T}$. Soient μ et ν deux mesure positives sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ si

$$A \in \mathcal{T}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

Dans ce cas, on note $\nu \ll \mu$.
On considère la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,\text{tel que} : A \in \mathcal{T}, \mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon \qquad (*)$$

1) Montrer que si $(*)$ a lieu alors $\nu \ll \mu$.
2) Supposons que $\nu(\Omega) < \infty$ et que $\nu \ll \mu$. Nous allons montrer que $(*)$ a lieu. Supposons que $(*)$ n'est pas vérifiée.
i) Expliquer pour quoi il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $A_n \in \mathcal{T}$ tels que $\mu(A_n) < 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$.
ii) On considère l'ensemble $B_n = \cup_{k \geq n} A_n$. Dire pourquoi $B_n \in \mathcal{T}$ puis majorer $\mu(B_n)$ et minorer $\nu(B_n)$.
iii) En considérant $B = \cap_n B_n$, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
3) Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et ϕ une fonction positive et mesurable sur Ω. On définit pour tout $A \in \mathcal{T}$

$$\nu(A) = \int_A \phi \; d\mu.$$

Montrer que ν est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et que $\nu \ll \mu$. En particulier, si ϕ est μ-intégrable sur Ω alors μ et ν vérifient $(*)$.
4) En choisissant $\Omega =]0,1[$, $\mu = dx$ et $\phi(x) = \frac{1}{x}$ montrer que $(*)$ n'est pas vérifée.

IV : Soit $p \in]1, \infty[$, on notera q son conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On définit pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, dx)$ et $x > 0$:

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \; dt.$$

1) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{q}$. En écrivant $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) t^{\alpha} t^{-\alpha} \; dt$, montrer que

$$|F(x)|^p \leq \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha q)^{p/q}} \int_0^x |f(t)|^p t^{\alpha p} \; dt$$

2) En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, montrer que

$$\int_0^\infty |F(x)|^p dx \leq \frac{1}{\alpha p (1-\alpha q)^{p/q}} \int_0^\infty |f(t)|^p \; dt.$$

3) Montrer que $\|F\|_p \leq q \|f\|_p$ (indication : on pourra minimiser la fonction $\alpha \mapsto \frac{1}{(\alpha p)^{1/p}(1-\alpha q)^{1/q}}$ sur $]0, \frac{1}{q}[$).