Université Bordeaux 1, 2014-2015. Théorie d'intégration.

Devoir surveillé du 22 octobre 2014.
Sans documents (3h).

Exercice 1 : 1) Enoncer le théorème de Beppo-Levi.
2) Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite décroissante ($f_{n+1} \leq f_n$) d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\int_\Omega f_0 \, d\mu < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu$.

Exercice 2 : (1) Soit $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $[0,1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq g(x)$?
(2) Soit f une application mesurable positive sur $[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{dx}{1 + (f(x))^n}.$$

On pourra introduire les ensembles $A = \{x \in [0,1],\ 0 \leq f(x) < 1\}$, $B = \{x \in [0,1],\ f(x) = 1\}$, $C = \{x \in [0,1],\ f(x) > 1\}$.

Exercice 3 : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de sa tribu borélienne.
(1) Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \{x \in \Omega, 1/n \leq |f(x)| \leq n\}.$$

Montrer que A_n est mesurable ($A_n \in \mathcal{T}$).
(2) Soit $g_n = |f|\chi_{A_n}$. Montrer que

$$g_n \to |f| \ \mu-\text{p.p} \ \text{ et } \ \int g_n d\mu \to \int |f| d\mu.$$

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \subset \mathcal{T}$, tel que

$$\begin{cases} \mu(A) < \infty \\ f \text{ bornée sur A} \\ \int_{\Omega\setminus A} |f| d\mu < \epsilon. \end{cases}$$

(3) Montrer alors que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\ B \in \mathcal{T}, \mu(B) < \eta \Rightarrow \int_B |f| d\mu < \epsilon.$$

(4) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Montrer que la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

est uniformément continue.

Exercice 4 : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$.
Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
On dit que $(f_n)_n$ converge *presque uniformément* vers 0 sur Ω si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(\Omega \setminus A) \leq \epsilon$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A.

1) Soit $(A_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que pour tout k, $\mu(\Omega \setminus A_k) \leq \frac{1}{k}$.
(a) Montrer que $\mu(\Omega \setminus (\cup_k A_k)) = 0$.
(b) On suppose que, pour tout k, $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A_k. Dire pourquoi $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\cup_k A_k$.
2) Déduire de 1) que si $(f_n)_n$ converge presque uniformément vers 0 sur Ω, alors $(f_n)_n$ converge presque partout vers 0 sur Ω.
3) On veut montrer maintenant que la réciproque de 2) est vraie, c'est-à-dire que la convergence presque partout entraine la convergence presque uniforme.

On suppose que $(f_n)_n$ converge presque partout vers 0 sur Ω. On note

$$A_{N,p} = \bigcap_{n \geq N} \left\{ |f_n| \leq \frac{1}{p} \right\}, \quad N \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*.$$

a) Vérifier que pour tout N, p, $A_{N,p} \in \mathcal{T}$ et que $\mu\left(\cup_{N \geq 1} A_{N,p}\right) = \mu(\Omega)$.

On pourra introduire l'ensemble $B = \{x \in \Omega,\ f_n(x) \to 0\}$ et montrer que $B \subset \cup_{N \geq 1} A_{N,p}$.

b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_p = N_p(\epsilon) \geq 1$ tel que $\mu(\Omega) - \mu(A_{N_p,p}) \leq \frac{\epsilon}{2^p}$.
c) On note $A_\epsilon = \cap_{p \geq 1} A_{N_p,p}$. Montrer que $\mu(\Omega \setminus A_\epsilon) \leq \epsilon$.
d) En déduire que $(f_n)_n$ converge presque uniformément vers 0 sur Ω (Théorème d'Egorov).