Université Bordeaux 1, 2014-2015. Théorie d'intégration.

Corrigé du devoir surveillé du 22 octobre 2014.

Exercice 1 : 1) Enoncer le théorème de Beppo-Levi.

Cours.

2) Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite décroissante ($f_{n+1} \leq f_n$) d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\int_\Omega f_0 \; d\mu < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n \; d\mu$.

— Première méthode : Pour tout n, f_n mesurable, $0 \leq f_n \leq f_0$ et f_0 intégrable donc, par le théorème de convergence dominée, $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f \; d\mu.$$

— Deuxième méthode : la suite $g_n = f_0 - f_n$ de fonctions mesurables positives est croissante, donc par le théorème de Beppo-Levi, sa limite simple g est positive, mesurable et

$$\begin{aligned}\int_\Omega g d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_\Omega f_0 d\mu - \int_\Omega f_n d\mu \right) \quad \text{car } f_0 \text{ est intégrable.}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu$ existe et vaut

$$\int_\Omega f_0 d\mu - \int_\Omega g d\mu.$$

La suite f_n est décroissante et positive et f_0 est intégrable donc f_n a une limite simple f intégrable. Comme $g = f_0 - f$, $\int_\Omega g d\mu = \int_\Omega f_0 d\mu - \int_\Omega f d\mu$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f \; d\mu.$$

Exercice 2 : (1) Soit $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) dx.$$

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $[0,1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq g(x)$?

Intégrons par parties :

$$\int_{[0,1]} f_n(x)dx = [-nxe^{-nx}]_0^1 + \int_{[0,1]} ne^{-nx}dx$$
$$= 1 - (n+1)e^{-n}.$$

Par le théorème des croissances comparées, pour tout polynôme P on a $P(n) \ll e^n$ lorsque $n \to \infty$, donc

— $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = 1$.
— pour tout $x > 0$, $f_n(x) = \frac{(nx)^2}{e^{nx}} x^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (et $f_n(0) = 0$). D'où

$$\int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_{[0,1]} 0.dx = 0.$$

La suite f_n est donc une suite de fonctions qui converge simplement dans $\mathbb{R}^+$ mais

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx \quad \neq \quad \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Par contraposition du théorème de convergence dominée, il n'existe pas de fonction g intégrable sur $[0,1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = f_n(x) \le g(x)$.

(2) Soit f une application mesurable positive sur $[0,1]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{dx}{1 + (f(x))^n}.$$

On considère les ensembles $A = \{x \in [0,1],\ 0 \le f(x) < 1\}$, $B = \{x \in [0,1],\ f(x) = 1\}$, $C = \{x \in [0,1],\ f(x) > 1\}$. La suite $f_n(x) = \frac{1}{1+(f(x))^n}$ converge vers 1 si $x \in A$, vers $1/2$ si $x \in B$ et vers 0 sinon. Les fonctions $f_n \colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}^+$ ainsi définies sont majorées par la fonction intégrable $\chi_{[0,1]}$. Par théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{dx}{1 + (f(x))^n} = \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + (f(x))^n} dx$$
$$= \int_A dx + \int_B \frac{dx}{2} + \int_C 0.dx = \mu(A) + \frac{\mu(B)}{2},$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de sa tribu borélienne.
(1) Pour $n \ge 1$, on pose

$$A_n = \{x \in \Omega, 1/n \le |f(x)| \le n\}.$$

Montrer que A_n est mesurable ($A_n \in \mathcal{T}$).

L'ensemble $A_n = f^{-1}\left([-n, -1/n] \cup [1/n, n]\right)$ est préimage d'un ensemble fermé, donc borélien, par l'application mesurable f. Donc A_n est mesurable.

(2) Soit $g_n = |f|\chi_{A_n}$. Montrer que

$$g_n \to |f| \ \mu\text{−p.p} \quad \text{et} \quad \int g_n d\mu \to \int |f| d\mu.$$

Soit $x \in \Omega$ tel que $|f(x)| < +\infty$.

— Si $f(x) = 0$ alors $g_n(x) = 0$ pour tout n.

— Sinon, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow x \in A_n \Rightarrow |f(x)| = g_n(x)$.

Dans les deux cas, $g_n(x)$ converge vers $|f(x)|$.

Comme f est intégrable, $|f| < +\infty$ μ-presque partout, et donc g_n converge vers $|f|$ μ-presque partout.

Par construction, chaque fonction g_n est mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et la suite (g_n) est croissante. Donc par théorème de convergence monotone, $\int g_n d\mu$ croît vers $\int |f| d\mu$.

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$, tel que

$$\begin{cases} \mu(A) < \infty \\ f \text{ bornée sur A} \\ \int_{\Omega \setminus A} |f| d\mu < \epsilon. \end{cases}$$

D'après la question précédente, pour tout $\epsilon > 0$, il existe n tel que

$$\int_{\Omega \setminus A_n} |f| d\mu = \int |f| d\mu - \int g_n d\mu < \epsilon.$$

Par définition, f bornée sur A_n. Enfin, $|f| > \frac{1}{n}$ sur A_n et f intégrable impliquent que $\mu(A_n) < +\infty$ avec l'inégalité de Markov. Donc $A = A_n$ convient.

(3) Montrer alors que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\ B \in \mathcal{T}, \mu(B) < \eta \Rightarrow \int_B |f| d\mu < \epsilon.$$

D'après la question (2), on trouve $M \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{T}$ tels que $|f| < M$ sur A et

$$\int_{\Omega \setminus A} |f| d\mu < \epsilon/2.$$

Si $\mu(B) < \frac{\epsilon}{2M}$, on a

$$\begin{aligned} \int_B |f| d\mu &= \int_{B \cap A} |f| d\mu + \int_{B \setminus A} |f| d\mu \\ &\leq M\mu(B) + \epsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Donc $\eta = \frac{\epsilon}{2M}$ convient.

(4) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Montrer que la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$ et fixons un $\eta > 0$ donné par la question (3). Alors pour tous $x, y \in [a, b]$ tels que $x < y$ et $|y - x| < \eta$, comme $\mu([x, y]) < \eta$, on a

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_{[x,y]} f d\mu \right| \\ &\leq \int_{[x,y]} |f| d\mu < \epsilon, \end{aligned}$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc F est uniformément continue sur $[a, b]$.

Exercice 4 : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$.
Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
On dit que $(f_n)_n$ converge *presque uniformément* vers 0 sur Ω si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(\Omega \setminus A) \leq \epsilon$ et $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A.

1) Soit $(A_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que pour tout k, $\mu(\Omega \setminus A_k) \leq \frac{1}{k}$.
(a) Montrer que $\mu(\Omega \setminus \cup_k A_k) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \setminus \cup_k A_k \subset \Omega \setminus A_n$ donc

$$\mu(\Omega \setminus \cup_k A_k) \leq \frac{1}{n}.$$

Par passage à l'inf, $\mu(\Omega \setminus \cup_k A_k) = 0$.

(b) On suppose que, pour tout k, $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A_k. Dire pourquoi $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 sur $\cup_k A_k$.

La convergence uniforme implique la convergence simple : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in A_k$, $f_n(x) \to 0$. Donc f_n converge simplement sur $\cup_k A_k$.

2) Déduire de 1) que si $(f_n)_n$ converge presque uniformément vers 0 sur Ω, alors $(f_n)_n$ converge presque partout vers 0 sur Ω.

Si $(f_n)_n$ converge presque uniformément vers 0 sur Ω, il existe une suite (A_k) de $\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall k$, $\mu(\Omega \setminus A_k) \leq \frac{1}{k}$ et (f_n) converge uniformément vers 0 sur A_k. D'après (1), (f_n) converge simplement vers 0 sur la réunion $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et $\mu(\Omega \setminus \cup_k A_k) = 0$. Donc $f_n \to 0$, μ-presque partout.

3) On veut montrer maintenant que la réciproque de 2) est vraie, c'est-à-dire que la convergence presque partout entraine la convergence presque uniforme.

On suppose que $(f_n)_n$ converge presque partout vers 0 sur Ω. On note

$$A_{N,p} = \bigcap_{n\geq N} \left\{|f_n| \leq \frac{1}{p}\right\}, \quad N \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*.$$

a) Vérifier que pour tout N, p, $A_{N,p} \in \mathcal{T}$ et que $\mu\left(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}\right) = \mu(\Omega)$.
On pourra introduire l'ensemble $B = \{x \in \Omega,\ f_n(x) \to 0\}$ et montrer que $B \subset \cup_{N\geq 1} A_{N,p}$.

L'ensemble $[\frac{-1}{p}, \frac{1}{p}]$ est fermé donc borélien et $f_n \colon (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable donc $A_{N,p} = \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}([\frac{-1}{p}, \frac{1}{p}])$ est une intersection dénombrable d'ensembles de $\mathcal{T}$, donc $A_{N,p} \in \mathcal{T}$.
Pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in B = \{x \in \Omega,\ f_n(x) \to 0\}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow |f_n(x)| \leq 1/p \\ &\Rightarrow x \in \{|f_n| \leq 1/p\} \end{aligned}$$

$$\text{donc } x \in A_{N,p}.$$

Donc $B \subset \cup_{N\geq 1} A_{N,p}$ et $\mu\left(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}\right) \geq \mu(B) = \mu(\Omega)$, car d'après (2), $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. On en déduit l'égalité recherchée.

b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_p = N_p(\epsilon) \geq 1$ tel que $\mu(\Omega) - \mu(A_{N_p,p}) \leq \frac{\epsilon}{2^p}$.

Comme la suite $(A_{N,p})_{N\geq 1}$ est croissante, on a d'après le cours :

$$\mu(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_{N,p}).$$

Comme $\mu(\cup_{N\geq 1} A_{N,p}) = \mu(\Omega) < +\infty$, il existe donc $N_p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu(\Omega) - \mu(A_{N_p,p}) \leq \frac{\epsilon}{2^p}.$$

c) On note $A_\epsilon = \bigcap_{p\geq 1} A_{N_p,p}$. Montrer que $\mu(\Omega \setminus A_\epsilon) \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned} \mu(\Omega \setminus A_\epsilon) &= \mu\left(\bigcup_{p\geq 1} \left(\Omega \setminus A_{N_p,p}\right)\right) \\ &\leq \sum_{p\geq 1} \mu\left(\Omega \setminus A_{N_p,p}\right) \\ &\leq \sum_{p\geq 1} \frac{\epsilon}{2^p} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

d) En déduire que $(f_n)_n$ converge presque uniformément vers 0 sur Ω (Théorème d'Egorov).

Pour tout p et tout $n \geq N_p$, si $x \in A_\epsilon$ alors $x \in A_{N_p,p}$ et donc $|f_n(x)| < \frac{1}{p}$. La suite f_n converge donc uniformément sur A_ϵ. On a vu en c) que $\mu(\Omega \setminus A_\epsilon) \leq \epsilon$. Ceci vaut pour tout $\epsilon > 0$: la suite f_n converge donc presque uniformément vers 0.