Sujets d'exposés

Sujet 1
En admettant le théorème de convergence dominée, démontrer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Appliquer ce théorème à la résolution de l'exercice :
Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{1-\cos t}{t}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.
2. Calculer la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. En déduire une expression de $\varphi(t)$ pour tout $t > 0$.

Sujet 2
En admettant le lemme de Fatou, donner une démonstration du théorème de convergence dominée. Appliquer ce théorème à la résolution de l'exercice :
On suppose que la série trigonométrique $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ converge simplement sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On veut montrer que cela implique que a_n et b_n tendent vers 0. Autrement dit, écrivant $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = r_n \cos(nx + \varphi_n)$ avec $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on veut montrer que r_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

1. Que pouvez-vous dire de la suite $(r_n \cos(nx + \varphi_n))$?
2. Montrer que si $[a, b] = [-\pi, \pi]$ et que la convergence est uniforme, alors les coefficients a_n et b_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
3. On revient au cas général et on suppose que (r_n) ne tend pas vers 0. Justifier qu'il existe alors un $\eta > 0$ et une sous-suite (r_{n_k}) telle que pour k, $r_{n_k} > \eta$.
4. En utilisant le théorème de convergence dominée, prouver que $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b \cos^2(n_k x+\varphi_{n_k})\,dx = 0$.
5. Expliciter cette dernière intégrale et conclure.

Sujet 3
Donner des exemples d'application du théorème de Fubini et des contre-exemples lorsque toutes les hypothèses ne sont pas satisfaites.
En utilisant le théorème de Fubini résoudre l'exercice :

1. En appliquant le théorème de Fubini, calculer de deux façons différentes $\iint_{[0,T]\times]0,+\infty[} \sin(x)e^{-xy}\,dx\,dy$ (ind : pour y fixé, une primitive de $e^{-xy}\sin x$ est de la forme $e^{-xy}(a \cos x + b \sin x)$ avec a et b fonctions de y à déterminer).
2. En déduire que $\lim\limits_{T\to+\infty} \int_{[0,T]} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Caractériser les $p \geq 1$ pour lesquels l'application $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est dans $L^p(]0,+\infty[)$?

Sujet 4
Énoncer le théorème de changement de variables. Expliciter les changements de coordonnées polaires et sphériques en ayant soin de vérifier que les hypothèses du théorème son bien remplies. Appliquer ceci à la résolution de l'exercice :
Soit B_n la boule unité euclidienne ouverte, c'est-à-dire $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < 1\}$. On note λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $v_n = \lambda_n(B_n)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$

$$v_n = v_{n-2}\int_{B_2} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\, d\lambda_2(x)$$

puis retrouver ainsi la formule donnant v_n en fonction de n.