Sujets d'exposés

Sujet 1
En admettant le théorème de convergence dominée, démontrer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Appliquer ce théorème à la résolution de l'exercice :
Pour tout $x > 0$ on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x}$$

montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x)^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{3/2}}$.
Donner les grandes lignes de la démonstration que pour tout entier n

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x)^{n+1}} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{n+1/2}}$$

Sujet 2
En admettant le lemme de Fatou, donner une démonstration du théorème de convergence dominée. Appliquer ce théorème à la résolution de l'exercice :
On suppose que la série trigonométrique $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ converge simplement sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On veut montrer que cela implique que a_n et b_n tendent vers 0. Autrement dit, écrivant $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = r_n \cos(nx + \varphi_n)$ avec $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on veut montrer que r_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

1. Que pouvez-vous dire de la suite $(r_n \cos(nx + \varphi_n))$?
2. Montrer que si $[a, b] = [-\pi, \pi]$ et que la convergence est uniforme, alors les coefficients a_n et b_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
3. On revient au cas général et on suppose que (r_n) ne tend pas vers 0. Justifier qu'il existe alors un $\eta > 0$ et une sous-suite (r_{n_k}) telle que pour k, $r_{n_k} > \eta$.
4. En utilisant le théorème de convergence dominée, prouver que $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b \cos^2(n_k x + \varphi_{n_k})\, dx = 0$.
5. Expliciter cette dernière intégrale et conclure.

Sujet 3
Donner des exemples d'application du théorème de Fubini et des contre-exemples lorsque toutes les hypothèses ne sont pas satisfaites.
A quel théorème correspondent le théorème de Tonelli lorsque l'un des deux espaces est $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ où μ_d est la mesure de dénombrement ?
A quel théorème correspond le théorème de Fubini lorsque les deux espaces sont $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$?
En utilisant le théorème de Fubini ou de Tonelli, et en faisant bien le lien entre l'énoncé du théorème utilisé, calculer

1. $\int_0^8 \left(\int_{y^{\frac{1}{3}}}^2 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \right) dy$
2. le volume du cône de hauteur h et rayon r.

Sujet 4
Énoncer le théorème de changement de variables puis l'appliquer en ayant soin de bien vérifier les hypothèses à la résolution de l'exercice :
Soit B_n la boule unité euclidienne ouverte, c'est-à-dire $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < 1\}$. On note λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $v_n = \lambda_n(B_n)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$

$$v_n = v_{n-2} \int_{B_2} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\, d\lambda_2(x)$$

puis retrouver ainsi la formule donnant v_n en fonction de n.
Faites le lien entre le théorème de changement de variables et l'aire d'un parallélogramme dans le plan ; le volume d'un parallélépipède dans l'espace.

Sujet 5

Donner une démonstration du théorème de Hölder.
Que devient ce théorème lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mu = \mu_d$ la mesure de dénombrement ?
Dans la suite on prend $1 \leq p < \infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On considère $a \in \ell^q(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire $a = (a_n)_n$ est une suite de réels telle que $\sum |a_n|^q < +\infty$ pour q fini ou telle que $\sup_n\{|a_n|\} < \infty$ pour $q = +\infty$). Montrer que l'application T qui à une suite b associe

$$T(b) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

est bien définie sur $\ell^p(\mathbb{N})$ et que T est une application linéaire continue de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$.
On demande de montrer la réciproque.
Pour cela considérer T une application linéaire continue de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$ (donc T est borné), $e^{(n)} = (\delta_{nm})_m$, $b_n = T(e^{(n)})$ et montrer que pour toute élément u de $\ell^p(\mathbb{N})$, $T(u) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m b_m$.
En considérant les sommes finies et en utilisant le théorème de Hölder, montrer que $b = (b_m)$ est dans $\ell^q(\mathbb{N})$ puis conclure (on pensera à distinguer les cas q fini et $q = +\infty$).