Université Bordeaux 1, **N1MA5012 Intégration**

Devoir Maison I

Exercice I. On définit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = -A\},$$

où $-A = \{-x, x \in A\}$ désigne l'ensemble des opposés des éléments de A.
1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2) Décrire les intervalles $[a, b]$ qui appartiennent à $\mathcal{C}$.
3) Décrire les ensembles $\{a, b\}$ qui appartiennent à $\mathcal{C}$.
4) Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même ?

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = x^5,\ f_3(x) = \cos x \quad f_4(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 3x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice II. On considère sur $\Omega = \mathbb{N}$ la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et la mesure de comptage μ définie par :

$$\mu(A) = \text{le nombre d'éléments dans l'ensemble } A.$$

(a) Montrer que μ définit bien une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
(b) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = 3x - 5$.
(i) Justifier que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
(ii) Soit $B = \{2, 3, 4\}$. Calculer $\int_B f d\mu$.
Maintenant on définit pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\nu(A) = \int_A x^2 d\mu(x).$$

(c) Montrer que ν est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
(d) Expliciter $\nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.
(e) Expliciter $\int_{\Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{x^4}\, d\nu(x)$. Cette intégrale est-elle finie ?

Exercice III. 1) Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.
a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty f d\mu = 0$.
b) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$ est $\sigma-$fini.

Exercice IV. 1) Soit f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = -\frac{1}{n}\,\chi_{[0,n]}(x).$$

1) Montrer que, pour tout n, la fonction f_n est mesurable, et intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue.
2) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Calculer $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n dx$. Est-ce que le résultat contredit le lemme de Fatou ?