Université Bordeaux 1, **N1MA5012 Intégration**

Devoir Maison I

Exercice I. *On définit l'ensemble*

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A = -A\},$$

où $-A = \{-x, x \in A\}$ *désigne l'ensemble des opposés des éléments de* A.
1) Montrer que $\mathcal{C}$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{C}$ est bien inclus dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, reste à vérifier que c'est une tribu.
$\emptyset \in \mathcal{C}$.
Soit $A \in \mathcal{C}$. On remarque que $-A = A$ revient à dire que $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$ ce qui est équivalent à l'assertion $x \notin A \Leftrightarrow -x \notin A$ ou encore $x \in A^c \Leftrightarrow -x \in A^c$. Cela montre que $-(A^c) = A^c$, soit $A^c \in \mathcal{C}$.
Soit $\{A_i, i \in I\}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$ alors
$-\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (-A_i) = \bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcup_{i\in I} A_i$ appartient à $\mathcal{C}$.
2) *Décrire les intervalles* $[a, b]$ *qui appartiennent à* $\mathcal{C}$.

Tout intervalle est élément de la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ et $-[a, b] = [-b, -a]$. D'où $[a, b]$ est dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $b = -a$.

3) *Décrire les ensembles* $\{a, b\}$ *qui appartiennent à* $\mathcal{C}$.

De même $\{a, b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $-\{a, b\} = \{-a, -b\} = \{a, b\}$ si et seulement si $a = -b$.

4) *Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de* $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ *dans lui même ?*

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = x^5,\ f_3(x) = \cos x \quad f_4(x) = \begin{cases} x & \textit{si } x \in [-1, 1] \\ 3x^2 & \textit{sinon} \end{cases}$$

On peut commencer par remarquer que ces fonctions sont continues ou continues par morceaux donc l'image réciproque d'un borélien est un borélien, il suffit de se concentrer sur l'égalité $f_i^{-1}(A) = -f_i^{-1}(A)$.
f_1 n'est pas mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même, en effet $f_1^{-1}(\{-2, 2\}) = \{\ln 2\}$ qui n'est pas un élément de $\mathcal{C}$.

f_2 est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même car c'est une fonction impaire. En effet

$$a \in f_2^{-1}(A) \Leftrightarrow f_2(a) \in A \Leftrightarrow f_2(-a) = -f_2(a) \in -A = A \Leftrightarrow -a \in f_2^{-1}(A).$$

f_3 est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ dans lui même car c'est une fonction paire. On peut remarquer de plus que pour tout ensemble B borélien $f_3^{-1}(B) = -f_3^{-1}(B)$ car $f_3(-x) = f_3(x)$.
f_4 est mesurable, pour cela considérons $A \in \mathcal{C}$ et $a \in f_4^{-1}(A)$. Deux cas sont à distinguer :
si $a \in [-1, 1]$ alors $f_4(-a) = -f_4(a) \in -A = A$ et $-a \in f_4^{-1}(A)$;
si $|a| > 1$ alors $f_4(-a) = f_4(a) \in A$ et $-a \in f_4^{-1}(A)$.
On a bien $-f_4^{-1}(A) = f_4^{-1}(A)$.

Exercice II. On considère sur $\Omega = \mathbb{N}$ la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et la mesure de comptage μ définie par :

$$\mu(A) = \text{le nombre d'éléments dans l'ensemble } A.$$

(a) Montrer que μ définit bien une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Il faudrait montrer que $(1)\mu(\emptyset) = 0$, vraie car $\emptyset$ contient 0 éléments ; et (2) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints, alors $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. S'il y a une nombre fini d'ensembles non-vide qui contient un nombre fini d'éléments dans la famille, ceci est évident, et c'est aussi clair que, dans le cas ou il y a une infinité d'ensembles non-vides, ou un ensemble qui contient une infinité d'éléments, alors les deux cotés de l'équation sont égal à ∞.
(b) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = 3x - 5$.
(i) Justifier que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
N'importe quelle fonction est mesurable quand l'espace de départ Ω est muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ car l'image réciproque de n'importe quel ensemble est nécessairement dans la tribu.
(ii) Soit $B = \{2, 3, 4\}$. Calculer $\int_B f d\mu$.
L'intégrale sur B de f est égale à l'intégrale sur Ω de $f \cdot \chi_B$ qui est une fonction étagée, qu'on peut écrire comme $1\chi_{\{2\}} + 4\chi_{\{3\}} + 7\chi_{\{4\}}$. Et, par définition,

$$\int_{\mathbb{N}} 1\chi_{\{2\}} + 4\chi_{\{3\}} + 7\chi_{\{4\}} d\mu = 1\mu\{2\} + 4\mu\{3\} + 7\mu\{4\} = 1 + 4 + 7 = 12.$$

Donc $\int_B f d\mu = 12$.

Maintenant on définit pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\nu(A) = \int_A x^2 d\mu(x).$$

(c) Montrer que ν est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
L'application ν est positive car ses valeurs sont des intégrales d'une fonction positive par rapport à une mésure positive. Par définition de l'intégrale $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset x^2 d\mu(x) = 0$, et l'additivité de μ suit immédiatement de l'additivité de l'intégrale.
(d) Expliciter $\nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.
Par la même raisonnement que dans 1c ; on voit que $\nu(A) = \sum_{k\in A} k^2$.
(e) Expliciter $\int_{\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{x^4}\, d\nu(x)$. Cette intégrale est-elle finie ?
Par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{x^4} d\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus\{0\}} f \cdot \chi_{\{1,2,\cdots n\}} d\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} \cdot k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Exercice III. 1) *Soit* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction intégrable.*
a) *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty f d\mu = 0$.

Posons pour tout entier n, $f_n := f\chi_{[n,+\infty[}$, f_n est mesurable comme produit de deux fonctions mesurables et $\int_n^{+\infty} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu$. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée,
(f_n) suite de fonctions mesurables ;
pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$;
pour tout entier n, $|f_n| \leq |f|$ et $|f|$ intégrable sur $\mathbb{R}$.
On a avec le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = 0.$$

b)*Montrer que* $\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$ *est* $\sigma-$*fini.*

L'énoncé aurait ici besoin d'être précisé. En effet on peut remarquer que cet ensemble étant un élément de la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, il est $\sigma-$fini pour la mesure de Lebesgue. Il faut comprendre ici que l'on a muni $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de la mesure μ de la première question et alors $\mathbb{R}$ peut ne pas être σ-fini pour cette mesure. Un raisonnement qui s'appliquerait quelque soit la tribu de départ est le suivant

$$\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x \in \mathbb{R}, f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Avec l'inégalité de Markov

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}, f(x) > \frac{1}{n}\}\right) \leq n \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\mu < +\infty$$

car f est intégrable.
$\{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$ est une union dénombrable d'ensembles de mesure finie, il est $\sigma-$fini.

Exercice IV. *1) Soit f_n la fonction définie par*

$$f_n(x) = -\frac{1}{n}\,\chi_{[0,n]}(x).$$

1) Montrer que, pour tout n, la fonction f_n est mesurable, et intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue.

Pour tout entier non nul n, f_n est une fonction étagée donc mesurable. De plus par définition de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f_n|\, d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue.

2) *Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Calculer* $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n dx$. *Est-ce que le résultat contredit le lemme de Fatou ?*

$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
Pour tout entier non nul n, $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = -\frac{1}{n}\lambda([0,n]) = -1$ donc $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = -1$.
On a une suite de fonctions mesurables (f_n) telles que $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n\, d\lambda > \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda$, ceci ne contredit pas le lemme de Fatou car les fonctions f_n ne sont pas positives.