Devoir Maison 1, à rendre semaine 41

Exercice 1. On définit $\mathcal{T}_0 = \{A \subset \mathbb{R}, A$ ou son complémentaire est au plus dénombrable$\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{T}_0$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

(2) On note $\mathcal{T}_1$ la tribu engendrée par la famille $\{\{x, x+1, x+2\}, x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{T}_2$ la tribu engendrée par la famille des parties finies de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(3) Cette tribu coincide-t-elle avec la tribu borélienne ?

Exercice 2. On considère une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec $a_n > 0$ pour tout n. On pose pour tout $x \geq 0$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-a_k x}.$$

(1) Montrer que pour tout n, f_n est une fonction Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$.

(2) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction mesurable f (les ensembles de départ et d'arrivée sont munis de leurs tribus boréliennes).

(3) Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k} < \infty$.

Exercice 3. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure positive non nulle μ. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable (pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) > 0$ et

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{pour tout } x, y \in A.$$

Indication : Considérer les ensembles $A_r = f^{-1}(]f - \epsilon/2, r + \epsilon/2[)$ et montrer que $\Omega = \cup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$.

Exercice 4. *Structure borélienne des points de continuité d'une fonction.*

Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une application *quelconque*. On note $B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$ et on définit *l'oscillation de f en x*, notée $\omega(x)$, par

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x, \delta)\ ;\ \delta > 0\} \quad \text{avec} \quad \omega(x, \delta) = \sup\{|f(t) - f(s)|\ ;\ s, t \in B(x, \delta)\}.$$

i. Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega(x) = 0$.

ii. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $A_\epsilon = \{x \in X\ ;\ \omega(x) < \epsilon\}$ est un ouvert.

iii. En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts). En particulier c'est un borélien.