Devoir Maison 1, à rendre semaine 41

Exercice 1. *On définit* $\mathcal{T}_0 = \{A \subset \mathbb{R}, A$ *ou son complémentaire est au plus dénombrable*$\}$.

(1) *Montrer que* $\mathcal{T}_0$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$.
$\emptyset \in \mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_0$ est stable pour le complémentaire en remarquant que $(A^c)^c = A$.
Pour $(A_i)_{i\in I}$ famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}_0$ (c'est-à-dire l'ensemble I des indices est au plus dénombrable) nous avons
Premier cas : pour tout $i \in I$, A_i est au plus dénombrable et on sait qu'une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est au plus dénombrable ; $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_0$.
Deuxième cas : il existe $i_0 \in I$ tel que $A_{i_0}^c$ est au plus dénombrable, alors en remarquant que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \subset A_{i_0}^c$$

nous avons que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$ est au plus dénombrable et $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_0$.

(2) *On note* $\mathcal{T}_1$ *la tribu engendrée par la famille* $\{\{x, x+1, x+2\}, x \in \mathbb{R}\}$ *et* $\mathcal{T}_2$ *la tribu engendrée par la famille des parties finies de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
La famille $\{\{x, x+1, x+2\}, x \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans la famille des parties finies de $\mathbb{R}$ qui elle même est incluse dans $\mathcal{T}_0$. Par définition d'une tribu engendrée par une famille (plus petite tribu au sens de l'inclusion contenant cette famille) nous avons donc

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_0.$$

Pour montrer que $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ on remarque que

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{a\} = \{a-2, a-1, a\} \cap \{a, a+1, a+2\}$$

les singletons sont dans $\mathcal{T}_1$. Si l'on prend maintenant A un élément arbitraire de $\mathcal{T}_0$ alors
Premier cas : A est au plus dénombrable et $A = \bigcup_{a\in A} \{a\} \in \mathcal{T}_1$
Deuxième cas : A^c est au plus dénombrable et $A^c = \bigcup_{a\in A^c} \{a\} \in \mathcal{T}_1$ donc $A \in \mathcal{T}_1$ car $\mathcal{T}_1$ est une tribu.
Conclusion $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ et on a l'égalité des trois tribus.

(3) *Cette tribu coincide-t-elle avec la tribu borélienne ?*
Non, $[0, 1]$ est dans la tribu des boréliens mais ni $[0, 1]$, ni $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ n'est au plus dénombrable.

Exercice 2. *On considère une suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *avec* $a_n > 0$ *pour tout* n. *On pose pour tout* $x \geq 0$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-a_k x}.$$

(1) *Montrer que pour tout* n, f_n *est une fonction Lebesgue intégrable sur* $[0, +\infty[$.
f_n est une fonction continue, donc mesurable sur $[0, +\infty[$. De plus elle est positive donc la

Lebesgue intégrabilité de f_n équivaut à la convergence de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

$$\forall X > 0 \quad \int_0^X f_n(x)\,dx = \left[\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{a_k} e^{-a_k x}\right]_0^X .$$

Pour tout entier k, $a_k > 0$ donc $\lim_{X\to+\infty} e^{-a_k X} = 0$ et l'intégrale de Riemann généralisée de f_n converge. On a de plus que

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

(2) *Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction mesurable f (les ensembles de départ et d'arrivée sont munis de leurs tribus boréliennes).*
La suite (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables, elle converge simplement vers une fonction f à valeurs dans $[0, +\infty]$ grâce à la croissance de la suite. Cette fonction f est mesurable de $([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[))$ dans $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ comme limite de fonctions mesurables.

(3) *Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{a_k} < \infty$.*
Par convergence monotone (théorème de Beppo Levi) f est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la suite de réels $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_n$ admet une limite finie, soit avec la question 1 si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. *Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure positive non nulle μ. Soit $f\colon \Omega\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable (pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Montrer que pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) > 0$ et*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \textit{pour tout } x, y \in A.$$

Indication : *Considérer les ensembles $A_r = f^{-1}(]r - \epsilon/2, r + \epsilon/2[)$ et montrer que $\Omega = \cup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$.*
Pour $\varepsilon > 0$ fixé et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}]r - \varepsilon/2, r + \varepsilon/2[$. D'où

$$\Omega = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}]r - \varepsilon/2, r + \varepsilon/2[\right) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} f^{-1}\left(]r - \varepsilon/2, r + \varepsilon/2[\right) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r.$$

Pour tout rationnel r, $A_r \in \mathcal{T}$ car $]r - \epsilon/2, r + \epsilon/2[$ est ouvert donc dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f est mesurable pour les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, avec la σ-additivité de la mesure on a, $0 < \mu(\Omega) \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mu(A_r)$. On en déduit qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu(A_r) > 0$ et par définition de A_r

$$\forall (x, y) \in A_r^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - r| + |r - f(y)| < \varepsilon$$

d'où le résultat.

Exercice 4. *Structure borélienne des points de continuité d'une fonction.*

Soit (X, d) *un espace métrique et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application* quelconque. *On note* $B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$ *et on définit* l'oscillation de f en x, *notée* $\omega(x)$, *par*

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x, \delta) \ ; \ \delta > 0\} \quad \text{avec} \quad \omega(x, \delta) = \sup\{|f(t) - f(s)| \ ; \ s, t \in B(x, \delta)\}.$$

i. *Montrer que* f *est continue en* x *si et seulement si* $\omega(x) = 0$.
Rappelons la définition de la continuité de f au point x

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ : \quad (y \in B(x, \delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$$

On en déduit que si f est continue en x alors

$$\forall (s, t) \in B(x, \delta_\varepsilon)^2 \quad |f(t) - f(s)| \leq [f(t) - f(x)| + |f(x) - f(s)| < 2\varepsilon.$$

En reprenant les notations de la question on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ : \ \omega(x, \delta_\varepsilon) \leq 2\varepsilon$$

On en déduit que $0 \leq \omega(x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\omega(x) = 0$.
Réciproquement si $\omega(x) = 0$ alors par définition de la borne inférieure

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ : \omega(x, \delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

ce qui entraine la continuité de f en x (prendre par exemple $s = x$ dans la définition de $\omega(x, \delta)$).

ii. *Montrer que pour tout* $\epsilon > 0$, $A_\epsilon = \{x \in X \ ; \ \omega(x) < \epsilon\}$ *est un ouvert.*
Soit $x \in A_\epsilon$ alors toujours avec la définition de la borne inférieure

$$\exists \delta > 0 \ : \ \omega(x, \delta) < \varepsilon.$$

Pour tout $y \in B(x, \delta/2)$, $B(y, \delta/2) \subset B(x, \delta)$ et en utilisant que pour deux ensembles A et B si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$ on a que

$$B(y, \delta/2) \subset B(x, \delta) \Rightarrow \omega(y, \delta/2) \leq \omega(x, \delta) < \varepsilon$$

soit $y \in A_\epsilon$ pour tout y de $B(x, \delta/2)$. On vient de montrer que pour tout x de A_ϵ il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta/2) \subset A_\epsilon$; A_ϵ est ouvert.

iii. *En déduire que l'ensemble des points de continuité de* f *est un* G_δ *(c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts). En particulier c'est un borélien.*
Si l'on note C l'ensemble des points de continuité de f alors

$$C = \{x \in X \ ; \ \omega(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in X \ ; \ \omega(x) < 1/n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_{1/n}.$$

Avec la question précédente $A_{1/n}$ est un ouvert pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a le résultat attendu puisque les ouverts et toutes intersections dénombrables d'ouverts sont des boréliens.