Devoir Maison 2, à rendre semaine 48

Exercice 1. *Graphe d'une fonction.* Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose $A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.

(1) Montrer que si f est mesurable alors A_f est mesurable.

(2) On veut montrer que, réciproquement, si A_f est mesurable alors f est mesurable. Pour cela, considérer $c \in \mathbb{R}_+$ et montrer que

$$\{x \in]a,b[/ f(x) > c\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x | (x, c + \frac{1}{n}) \in A_f\}.$$

(3) Montrer que le graphe d'une application mesurable est mesurable et de mesure nulle.

(4) Si f est intégrable sur $]a,b[$ montrer que la mesure de A_f est finie et vaut $\int_{]a,b[} f \, d\lambda$.

Exercice 2. *Transformée de Laplace*

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} dt\,.$$

La fonction $\mathcal{L}f$ est la *transformée de Laplace* de la fonction f.

(1) Justifier la définition, montrer que la fonction $\mathcal{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et exprimer les dérivées successives de $\mathcal{L}f$ sous forme d'intégrales.

(2) Déterminer $\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{L}f(\lambda)$.

(3) Calculer les transformées de Laplace des fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$.

(4) Dans cette question, on suppose que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^\infty f(t)\, dt$ existe (c'est-à-dire $\int_0^R f(t)\, dt$ admet une limite quand R tend vers l'infini).

   (1) Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que la fonction F est bornée sur $[0;+\infty[$ et que pour tout $\lambda > 0$, on peut écrire

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty F\left(\frac{u}{\lambda}\right) e^{-u}\, du\,.$$

   (2) Montrer qu'on a $\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\, dt$.

(5) Dans cette question, on prend $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ (avec $f(0) = 1$). On a déjà vu que l'intégrale de Riemann généralisée $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.
Calculer $(\mathcal{L}f)'(\lambda)$ pour $\lambda > 0$, puis déterminer $\mathcal{L}f$ sur $]0;+\infty[$. En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Exercice 3. Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(K) < \infty$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$G\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x < 0 & \mapsto -\mu(]x,0[) \\ x \geq 0 & \mapsto \mu([0,x]) \end{cases}$$

(1) Montrer que la fonction $G\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est mesurable.

(2) Soit $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}/\phi(x) \neq 0\}$ soit borné, donc inclus dans un intervalle de la forme $[-a, a]$. Montrer que ϕ est μ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto G(x)\phi'(x)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} G(x)\phi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi d\mu.$$

(indication : on pourra calculer l'intégrale de l'application

$$(x, y) \mapsto \phi'(x)$$

sur le carré $C = [-a, a] \times [-a, a]$ de deux façons, l'une de ces façons en découpant ce carré en deux triangles $\Delta_1 = \{(x, y) \in C/x < y\}$ et $\Delta_2 = \{(x, y) \in C/x \geq y\}$, puis en utilisant le théorème de Fubini.)