Devoir Maison 2, Eléments de correction

Exercice 1. *Graphe d'une fonction.* Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose $A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.

(1) Montrer que si f est mesurable alors A_f est mesurable.

On note g la fonction définie sur $]a,b[\times\mathbb{R}$ par $g(x,y) = y - f(x)$. f étant mesurable g l'est aussi et $A_f = g^{-1}(]-\infty,0]) \cap (]a,b[\times[0,+\infty[)$, c'est un borélien.

(2) On veut montrer que, réciproquement, si A_f est mesurable alors f est mesurable. Pour cela, considérer $c \in \mathbb{R}_+$ et montrer que

$$\{x \in]a,b[/ f(x) > c\} = \bigcup_{n\geq 1} \{x | (x, c + \frac{1}{n}) \in A_f\}.$$

Puisque $c + \frac{1}{n} \geq 0$

$$(x, c+\frac{1}{n}) \in A_f \Leftrightarrow x \in]a,b[\quad \text{et} \quad f(x) \geq c + \frac{1}{n}.$$

De plus on a bien

$$f(x) \geq c + \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) > c \quad \text{et} \quad f(x) > c \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \ :\ f(x) \geq c + \frac{1}{n}$$

d'où l'égalité des deux ensembles.

L'application $x \mapsto (x, c+\frac{1}{n})$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ donc $\{x | (x, c+\frac{1}{n}) \in A_f\}$ est un borélien pour tout entier n non nul et pour $c \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(]c,+\infty[)$ est un borélien car union dénombrable de boréliens.

On conclut que f est mesurable en remarquant que pour $c < 0$, $f^{-1}(]c,+\infty[) =]a,b[$ et que la famille $\{]c,+\infty[,\ c \in \mathbb{R}\}$ engendre les boréliens de $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que le graphe d'une application mesurable est mesurable et de mesure nulle.

Le graphe de la fonction f est $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b,\ y = f(x)\}$, en reprenant la même fonction g qu'à la question (1) on a $G_f = g^{-1}(\{0\})$ qui est mesurable.

Par définition de la mesure produit, en notant $(G_f)_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in G_f\}$

$$\lambda_2(G_f) = \lambda_1 \otimes \lambda_1(G_f) = \int_{]a,b[} \lambda_1\left((G_f)_x\right)\, dx = \int_{]a,b[} \lambda_1(\{f(x)\})\, dx = \int_{]a,b[} 0\, dx = 0$$

(4) Si f est intégrable sur $]a,b[$ montrer que la mesure de A_f est finie et vaut $\int_{]a,b[} f\, d\lambda$.

De même

$$\lambda_2(A_f) = \lambda_1 \otimes \lambda_1(A_f) = \int_{]a,b[} \lambda_1\left((A_f)_x\right)\, dx = \int_{]a,b[} \lambda_1([0, f(x)])\, dx = \int_{]a,b[} f(x)\, dx.$$

Soit pour f mesurable positive, $\lambda_2(A_f)$ finie si et seulement si f est intégrable et de plus $\lambda_2(A_f) = \int_{]a,b[} f(x)\, dx$.

Remarque : Vous souvenez-vous de la façon dont l'intégrale vous avait été définie au lycée ?

Exercice 2. *Transformée de Laplace*

Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} dt\,.$$

La fonction $\mathcal{L}f$ est la *transformée de Laplace* de la fonction f.

(1) Justifier la définition, montrer que la fonction $\mathcal{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et exprimer les dérivées successives de $\mathcal{L}f$ sous forme d'intégrales.

Nous allons montrer par récurrence que
(H_n) : $\mathcal{L}f$ est $\mathcal{C}^n$ sur $]0;+\infty[$ et $(\mathcal{L}f)^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-\lambda t}\,dt$.
Au préalable, on note M un majorant de $|f|$.
Pour $n=0$ c'est le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
$\forall \lambda > 0,\ t \mapsto f(t)e^{-\lambda t}$ est mesurable car continue ;
$\forall t > 0,\ \lambda \mapsto f(t)e^{-\lambda t}$ est continue sur $]0;+\infty[$;
$\forall a > 0,\ \forall \lambda > a,\ \forall t > 0,\ \left|f(t)e^{-\lambda t}\right| \le Me^{-at}$ et la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$;
avec le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $\mathcal{L}f$ est continue sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc est continue sur $]0,+\infty[$
Montrons grâce au théorème de dérivation des intégrales à paramètre que pour tout entier n, $[(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})]$.
$\forall \lambda > 0,\ t \mapsto (-t)^n f(t)e^{-\lambda t}$ est intégrable par (H_n) ;
$\forall t > 0,\ \lambda \mapsto (-t)^n f(t)e^{-\lambda t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $\frac{\partial\left((-t)^n f(t)e^{-\lambda t}\right)}{\partial \lambda} = (-t)^{n+1} f(t)e^{-\lambda t}$;
$\forall a > 0,\ \forall \lambda > a,\ \forall t > 0,\ \left|(-t)^{n+1} f(t)e^{-\lambda t}\right| \le Mt^{n+1}e^{-at}$ et la fonction $t \mapsto t^{n+1}e^{-at}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$;
avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, $(\mathcal{L}f)^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $(\mathcal{L}f)^{(n+1)} = \int_0^\infty (-t)^{n+1} f(t)e^{-\lambda t}\,dt$.

(2) Déterminer $\lim_{\lambda\to\infty} \mathcal{L}f(\lambda)$.

Pour tout $\lambda > 0$

$$|\mathcal{L}f(\lambda)| \le \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\lambda t}\,dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt \le \frac{M}{\lambda}.$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{M}{\lambda} = 0$ d'où $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathcal{L}f(\lambda) = 0$.

(3) Calculer les transformées de Laplace des fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$.

On prend $f(t) = e^{iat}$ qui est bien continue et bornée (cf. $a \in \mathbb{R}$).

$$\forall T > 0 \quad \int_0^T e^{iat}e^{-\lambda t}\,dt = \left[\frac{e^{(-\lambda+ia)t}}{-\lambda+ia}\right]_0^T.$$

De plus $|e^{(-\lambda+ia)T}| = e^{-\lambda T} \to 0$ lorsque $T \to +\infty$ pour tout $\lambda > 0$, d'où

$$\forall \lambda > 0 \quad \int_0^{+\infty} e^{iat}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda - ia}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-\lambda t}\,dt = Re\left(\frac{1}{\lambda-ia}\right) = \frac{\lambda}{\lambda^2+a^2}\ ;\ \int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-\lambda t}\,dt = Im\left(\frac{1}{\lambda-ia}\right) = \frac{a}{\lambda^2+a^2}.$$

(4) Dans cette question, on suppose que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existe (c'est-à-dire $\int_0^R f(t)\,dt$ admet une limite quand R tend vers l'infini).

(1) Pour $x \ge 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que la fonction F est bornée sur $[0;+\infty[$ et que pour tout $\lambda > 0$, on peut écrire

$$\mathcal{L}f(\lambda) = \int_0^\infty F\left(\frac{u}{\lambda}\right)e^{-u}\,du\,.$$

F est continue sur $[0;+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, elle est donc bornée.
Pour tout $T > 0$, avec une intégration par parties et un changement de variable

$$\int_0^T f(t)e^{-\lambda t}\,dt = \left[F(t)e^{-\lambda t}\right]_0^T + \lambda\int_0^T F(t)e^{-\lambda t}\,dt = F(T)e^{-\lambda T} + \int_0^{\lambda T} F(\frac{u}{\lambda})e^{-u}\,du.$$

F étant bornée $\lim\limits_{T\to+\infty} F(T)e^{-\lambda T} = 0$ pour tout $\lambda > 0$ et on a l'égalité demandée car chaque intégrale généralisée converge.

(2) Montrer qu'on a $\lim_{\lambda\to 0}\mathcal{L}f(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,dt$.

On note M' un majorant de F, pour toute suite (λ_n) de réels tendant vers 0^+, pour tout $u>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} F(\frac{u}{\lambda_n})=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^\infty f(t)\,dt$ et $|F(\frac{u}{\lambda_n})e^{-u}|\le M'e^{-u}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$. Avec le téorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty F\left(\frac{u}{\lambda_n}\right)e^{-u}\,du=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\,dt\right)e^{-u}\,du=\int_0^\infty f(t)\,dt$$

car $\int_0^\infty e^{-u}\,du=1$. On conclue avec la caractérisation séquentielle de la limite et le résultat de la question précédente.

(5) Dans cette question, on prend $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ (avec $f(0)=1$). On a déjà vu que l'intégrale de Riemann généralisée $I=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
Calculer $(\mathcal{L}f)'(\lambda)$ pour $\lambda>0$, puis déterminer $\mathcal{L}f$ sur $]0;+\infty[$. En déduire la valeur de $I=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt$.

La fonction f étant continue et bornée, avec (1), $\mathcal{L}f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et avec (3)

$$\forall\lambda>0\quad(\mathcal{L}f)'(\lambda)=\int_0^\infty-\sin(t)e^{-\lambda t}\,dt=-\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

On en déduit avec (2) que $\mathcal{L}f(\lambda)=\frac{\pi}{2}-\arctan(\lambda)$ et avec (4),

$$\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\lim_{\lambda\to0^+}\mathcal{L}f(\lambda)=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3. Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(K)<\infty$, pour tout compact $K\subset\mathbb{R}$. On définit la fonction

$$G\colon\begin{cases}\mathbb{R} & \to\mathbb{R}\\ x<0 & \mapsto-\mu(]x,0[)\\ x\ge0 & \mapsto\mu([0,x])\end{cases}$$

(1) Montrer que la fonction $G\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est mesurable.

On va montrer que la fonction G est croissante et on conclue en utilisant que toute fonction croissante est mesurable pour les boréliens.

Si $x\le y<0$ alors $]y,0[\subset]x,0[$ d'où $\mu(]y,0[)\le\mu(]x,0[)$ et $G(x)\le G(y)$.

Si $x\le0\le y$ alors $G(x)\le0\le G(y)$.

Si $0\le x\le y$ alors $[0,x]\subset[0,y]$ d'où $\mu([0,x])\le\mu([0,y])$ et $G(x)\le G(y)$.

(2) Soit $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}/\phi(x)\neq0\}$ soit borné, donc inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$. Montrer que ϕ est μ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x\mapsto G(x)\phi'(x)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

ϕ est continue donc mesurable, de plus, ϕ est continue sur $[-a,a]$ compact, elle est bornée par M et puisque ϕ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$

$$\int_{\mathbb{R}}|\phi|\,d\mu=\int_{[-a,a]}|\phi|\,d\mu\le M\mu([-a,a])<+\infty$$

car μ est finie sur les compacts. ϕ est μ-intégrable.

ϕ' continue et G mesurable donc $G\phi'$ mesurable.

ϕ identiquement nulle (et donc en particulier constante) sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$ ouvert implique ϕ' identiquement nulle sur $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$. ϕ' étant continue par hypothèse, en notant M' un majorant de $|\phi'|$ sur $[-a,a]$ on a

$$\int_{\mathbb{R}}|G\phi'|\,dx=\int_{[-a,a]}|G\phi'|\,dx\le M\left(\int_{[-a,0[}-G(x)\,dx+\int_{[0,a]}G(x)\,dx\right)\le aM(\mu([-a,0])+\mu([0,a]))<+\infty$$

$\phi'G$ est Lebesgue-intégrable.

(3) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} G(x)\phi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi d\mu.$$

(indication : on pourra calculer l'intégrale de l'application

$$(x,y) \mapsto \phi'(x)$$

sur le carré $C = [-a,a] \times [-a,a]$ de deux façons, l'une de ces façons en découpant ce carré en deux triangles $\Delta_1 = \{(x,y) \in C / x < y\}$ et $\Delta_2 = \{(x,y) \in C / x \geq y\}$, puis en utilisant le théorème de Fubini.)

Commençons par montrer que l'application $(x,y) \mapsto \phi'(x)$ est intégrable sur $C = [-a,a] \times [-a,a]$ pour la mesure produit $\lambda \otimes \mu$.

Elle est mesurable et

$$\int_C |\phi'| \, d\lambda \otimes d\mu \leq M' \lambda \otimes \mu(C) = 2aM'\mu([-a,a]) < +\infty$$

Avec le théorème de Fubini

$$\int_C \phi' \, d\lambda \otimes d\mu = \int_{[-a,a]} \left(\int_{[-a,a]} \phi'(x)\, dx \right) d\mu = \int_{[-a,a]} (\phi(a) - \phi(-a))\, d\mu = 0$$

car $\phi(a) = \phi(-a) = 0$ (continuité de ϕ et pour tout $x < -a$ ou tout $x > a$, $\phi(x) = 0$).

D'où

$$\int_{\Delta_2} \phi' \, d\lambda \otimes d\mu = -\int_{\Delta_1} \phi' \, d\lambda \otimes d\mu.$$

Avec le théorème de Fubini

$$\int_{\Delta_2} \phi' \, d\lambda \otimes d\mu = \int_{[-a,a]} \phi'(x) \left(\int_{[-a,x]} d\mu \right) dx = \int_{[-a,a]} \phi'(x)\mu([-a,x])\, dx$$

Pour $x < 0$, $\mu([-a,x]) = \mu([-a,0[) - \mu(]x,0[) = \mu([-a,0[) + G(x)$,

pour $x \geq 0$, $\mu([-a,x]) = \mu([-a,0[) + \mu([0,x]) = \mu([-a,0[) + G(x)$.

Et en utilisant à nouveau que $\int_{[-a,a]} \phi'(x)\, dx = 0$ nous obtenons

$$\int_{\Delta_2} \phi' \, d\lambda \otimes d\mu = \int_{[-a,a]} \phi'(x)G(x)\, dx.$$

Avec le théorème de Fubini

$$\int_{\Delta_1} \phi' \, d\lambda \otimes d\mu = \int_{[-a,a]} \left(\int_{[-a,y]} \phi'(x)\, dx \right) d\mu(y) = \int_{[-a,a]} \phi(y) d\mu(y)$$

ce qui nous donne l'égalité attendue.