Topologie des espaces métriques - Feuille de TD 1

Exercice 1.

(1) Soit E l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Parmi les quatre familles de parties de E suivantes, lesquelles constituent la famille des ouverts d'une topologie τ sur E ?

$$\big\{\emptyset, \{1\}\big\} \qquad \big\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3,4,5\}\big\}$$
$$\big\{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4,5\}\big\} \quad \big\{\emptyset, \{1,2\}, \{2,4\}, \{2\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4,5\}\big\}$$

(2) Construire toutes les topologies possibles sur l'ensemble $E = \{A, B, C\}$ constitué des trois symboles A, B, C (on listera pour chacune des topologies envisageables la liste des ouverts correspondante).

Exercice 2. On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels de sa topologie usuelle : on rappelle qu'une partie U de $\mathbb{R}$ est un ouvert pour cette topologie si et seulement si

$$\forall\, x \in U,\ \exists\, \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U$$

(si $U = \emptyset$, on convient que cette condition est satisfaite).

(1) Parmi les parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, lesquelles sont ouvertes ? Lesquelles sont fermées ?

$$A = \mathbb{R}\ ; \quad A = \mathbb{Z}\ ; \qquad A = \Big\{\frac{n}{n+\ln(n)}\,; n \in \mathbb{N}^*\Big\}\ ; \quad A = \Big\{\frac{n}{n+1+\ln(n)}\,; n \in \mathbb{N}^*\Big\}\ ;$$
$$A =]0,1[\cup]1,3[\ ; \qquad A =]-1,1[\setminus[1/2,1/2]\ ;\ A = \Big\{\ln(\ln(n))\,; n \in \mathbb{N}^*\Big\}\ ;$$

Pour chacune de ces sept parties, on explicitera l'intérieur de $\overset{\circ}{A}$ de cette partie ainsi que son adhérence $\bar{A}$.

(2) Lister les points limites et les points isolés du sous-ensemble

$$B = \{1/n\,; n \in \mathbb{N}^*\} \cup]1,2[\cup]2,3[\cup\{4\} \cup (]7,8[\cap\mathbb{Q}).$$

Expliciter les trois parties

$$\overset{\circ}{B},\ \overline{\overset{\circ}{B}},\ \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{B}}}.$$

Exercice 3.

(1) Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. Montrer que l'on peut toujours trouver un entier $q \in \mathbb{N}^*$ et un entier $p \in \mathbb{Z}$ tels que $x < p/q < y$. Peut-on faire en sorte que q soit une puissance de 10 ?

(2) Déduire du résultat établi à la question **1** que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(3) Le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ? En reprenant la question **1** avec $x/\sqrt{2}$ et $y/\sqrt{2}$ en place de x et y, montrer que $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Quel est l'intérieur de $\mathbb{Q}$?

Exercice 4. Dans cet exercice, on se propose d'établir l'équivalence suivante : ≪ une partie U de $\mathbb{R}$ est un ouvert pour la topologie usuelle si et seulement si U s'écrit comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts $]a, b[$ deux-à-deux disjoints ≫.

(1) Prouver le volet ≪ si ≫ de l'assertion.
(2) Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et x un point de U, on note I_x l'union des intervalles ouverts contenant x et inclus dans U.
 - Vérifier que pour tout $x \in U$, I_x est encore un intervalle ouvert ;
 - montrer l'implication $y \in I_x \Longrightarrow I_y = I_x$;
 - en déduire que si x et y sont deux points distincts de U, alors on a soit $I_x = I_y$, soit $I_x \cap I_y = \emptyset$;
 - en utilisant à la fois le fait que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (voir l'exercice 3) et le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable (dire pourquoi), conclure que le volet ≪ et seulement si ≫ de l'assertion proposée dans cet exercice est vrai.

Exercice 5. Soit E un ensemble non vide. On note τ_E la famille de parties de E constituée de l'ensemble vide et de toutes les parties de E dont le complémentaire dans E est fini.

(1) Vérifier que τ_E est bien une topologie sur E.
(2) Quelle est la topologie τ_E ainsi construite lorsque E est un ensemble fini non vide ?
(3) Une topologie τ sur un ensemble E est dite *séparée* si et seulement si

$$\forall\, a, b \in E, \quad a \neq b \Longrightarrow \Big(\exists\, U_a, U_b \in \tau \text{ tels que } a \in U_a,\ b \in U_b \text{ et } U_a \cap U_b = \emptyset\Big).$$

Montrer que la topologie τ_E est une topologie séparée si et seulement si E est fini.

Exercice 6.

(1) On dit qu'une partie U du plan $\mathbb{R}^2$ est *ouverte* si et seulement

$$\forall\, (x, y) \in U, \exists\, \epsilon, \eta > 0 \text{ tels que }]x - \epsilon, x + \epsilon[\times]y - \eta, y + \eta[\subset U.$$

Montrer que la famille des ouverts de $\mathbb{R}^2$ constitue bien une topologie sur $\mathbb{R}^2$ (que l'on appelle *topologie usuelle du plan*).
(2) On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ défini comme le graphe de la fonction $t \in]0, +\infty[\mapsto \sin(1/t)$. Dessiner l'ensemble A et préciser ce que sont l'adhérence $\overline{A}$ et l'intérieur $\mathring{A}$ de A pour la topologie usuelle du plan. Le sous-ensemble A est-il ouvert pour cette topologie ? fermé ?

Exercice 7. Soit E un ensemble et τ une topologie sur E. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles de E, on a (la prise d'intérieur étant considérée relativement à la topologie τ)

$$(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B} \quad \text{et} \quad \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B).$$

Donner un exemple (avec $E = \mathbb{R}$ et la topologie usuelle) où l'inclusion de droite est stricte.