

Thème : Dénombrement, probabilités et statistiques Loi binomiale.

1. L'exercice proposé au candidat :

Une personne cherche à joindre 3 correspondants. On suppose que les appels sont indépendants et que, pour chaque correspondant, la probabilité de joindre le correspondant est p ($p \in]0, 1[$). On note $q = 1 - p$.

1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants joints lors d'un premier essai. Déterminez la loi de X .

2) Après ce premier essai, la personne essaie de rappeler les $3 - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre, dans les mêmes conditions (même probabilité p de succès). Soit Y le nombre de correspondants joints à ce second essai, Z le nombre total de correspondants joints après ces deux séries d'appels. On a : $Z = X + Y$.

a) En écrivant : $P(Z = 0) = P_{(X=0)}(Y = 0)P(X = 0)$, déterminez $P(Z = 0)$.

b) Décomposez l'évènement ($Z = 1$) à l'aide des évènements ($X = 0$), ($Y = 1$), ($X = 1$) et ($Y = 0$).

Déterminez $P_{(X=0)}(Y = 1)$ et $P_{(X=1)}(Y = 0)$. Déduisez en que : $P(Z = 1) = 3pq^4(q + 1) = 3q^4(1 - q^2)$.

c) En décomposant de même l'évènement ($Z = 2$) comme réunion et intersection d'évènements élémentaires liés à X et Y , déterminer la probabilité $P(Z = 2)$.

d) Déterminer $P(Z = 3)$.

3) a) Vérifiez alors que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale de paramètres 3 et $1 - q^2$.

b) Pour $p = \frac{1}{3}$, déterminez $E(X)$ et $E(Z)$.

2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.

Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1. Préciser les notions et résultats sur les probabilités mis en jeu dans cet exercice.

Q.2. Que pouvait-on demander aux élèves de réaliser à la question 2 pour les aider à déterminer la loi de Z ?

Q.3. On considère l'épreuve aléatoire e : Une personne appelle un ami et renouvelle son appel en cas d'échec (les deux appels sont indépendants et ont chacun une probabilité p de succès).

Quel type d'épreuve a-t-on ? Que peut-on retrouver ainsi ?

Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :

- sa réponse aux questions Q.1 et Q.3.

- un ou plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : Dénombrement, probabilités et statistiques, loi binomiale.