

## Thème : Suites

### Etude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ .

#### 1. L'exercice proposé au candidat :

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = kx(1-x)$ ,  $k$  étant un paramètre qui dépend de l'environnement ( $k \in \mathbb{R}_+^*$ ).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre de coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année  $n$  par un nombre réel  $u_n$ , avec  $u_n$  compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 coccinelles, on prendra  $u_0 = 0,3$ .

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $f$  étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite  $(u_n)$  pour différentes valeurs de la population initiale  $u_0$  et du paramètre  $k$ .

- 1) Démontrer que si la suite  $(u_n)$  converge, alors sa limite  $l$  vérifie la relation  $f(l) = l$ .
- 2) Supposons  $u_0 = 0,4$  et  $k = 1$ .
  - a) Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
  - b) Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .
  - c) La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?
  - d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses?
- 3) Supposons maintenant  $u_0 = 0,3$  et  $k = 1,8$ .
  - a) Etudier les variations de  $f$  sur  $[0,1]$  et montrer que  $f(\frac{1}{2}) \in [0, \frac{1}{2}]$ .
  - b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
    - montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ ;
    - établir que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ .
  - c) La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?
  - d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses?
- 4) A l'aide d'une représentation graphique formuler une conjecture de l'évolution de la population dans le cas où  $u_0 = 0,8$  et  $k = 3,2$ .

#### 2. Le travail demandé au candidat :

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.

Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

#### ***Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :***

- Q.1. Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.
- Q.2. Quelles modifications doit-on apporter à l'énoncé de la question 3) si l'on prend  $u_0 = 0,45$  à la place de  $u_0 = 0,3$ ?
- Q.3. Répondre à la question 4) en utilisant la calculatrice.
- Q.4. Proposer un questionnement permettant de démontrer le résultat conjecturé dans la question 4).

#### ***Sur sa fiche, le candidat rédigera et présentera :***

- sa réponse à la question Q.4.
- un ou plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème : **“Etude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ ”**.