02 - EXPÉRIENCE ALÉATOIRE, PROBABILITÉ, PROBABILITÉ CONDITIONNELLE.

CHANTAL MENINI

1. Point programme.

Les probabilités apparaissent dès la troisième et font partie du socle commun, leur étude est développée chaque année au lycée, les probabilités conditionnelles sont étudiées en TS et TES. Présentent aussi au programmes de BTS.
Il existe des documents ressources pour les probabilités en troisième, seconde, première et Term S et ES. On pourra consulter en particulier
"Probabilités au collège" pour l'approche fréquentiste de la probabilité et exemples de situations. On parle aussi un peu de probabilités conditionnelles dans ce document, lui préférer celui cité ci-dessous.
"Probabilité et Statistiques" (seconde) pour un exemple d'expérience donnant lieu à plusieurs modélisations possibles, arbre des possibles, arbre pondéré, exemple d'algorithme.
"Statistiques et probabilités" (première) pour le passage de l'arbre des possibles à l'arbre pondéré.
"Annexe Probabilités et statistique Séries ES et S" (anciens programmes) pour les probabilités conditionnelles
"Enseignement de spécialité" (série S) pour matrices et probabilités.
Les documents d'accompagnement récents sont consultables sur Eduscol, les plus anciens sont accessibles sur Ulysse depuis l'ENT.

2. Un plan possible.

2.1. Vocabulaire.

Définition 2.1. *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas certain.*
*On appelle **issue** un résultat possible de l'expérience aléatoire. L'ensemble de toutes les issues est **l'univers**.*
*On appelle **événement élémentaire** tout élément de l'univers et **événement** toute partie de l'univers.*

Exemple 1 : Pour l'expérience : on jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et l'on observe le numéro obtenu on modélisera en prenant pour univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, l'événement "obtenir 3" est l'événement élémentaire $\{3\}$, l'événement "obtenir un nombre pair" est l'événement $\{2, 4, 6\}$.
Exemple 2 : Pour l'expérience : on jette deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6 (l'un est rouge et l'autre est bleu) et l'on observe les numéros obtenus on modélisera en prenant pour univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ (notation adaptée au supérieur à noter plutôt $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$ dans le secondaire) ; maintenant si l'on observe la somme obtenue après le jet de ces deux dés on modélisera en prenant pour univers $\Omega = \{2, \ldots, 12\}$.
Exemple 3 : Pour une erreur de mesure alors l'univers sera par exemple pour un pèse-personne l'intervalle $[-100, 100]$ ce qui n'est plus un ensemble fini.

Dans toute la suite de la leçon nous supposerons l'univers fini.

Tableau de correspondances probabilistes et ensemblistes, l'univers est noté Ω. (à préparer et projeter le jour de l'oral)

Date: 20 septembre 2012.

Vocabulaire des événements	**Propriété ensembliste**
Evénement élémentaire $\{\omega\}$	$\omega \in \Omega$
Evénement A	$A \subset \Omega$
Evénement certain	Ω
Evénement impossible	$\emptyset$
Evénement contraire de A (noté $\overline{A}$)	$\Omega \backslash A$
A implique B	$A \subset B$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A est réalisé	$\omega \in A$

2.2. **Probabilité.** *version plutôt BTS***.**

2.2.1. *Définition et propriétés.*

Définition 2.2. *Soit Ω un ensemble fini non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. On appelle* ***probabilité*** *sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant*
(i) $P(\Omega) = 1$
(ii) $\forall A,\ B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé ***espace probabilisé****.*

Proposition 2.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors*
1. *$P(\emptyset) = 0$,*
2. *$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,*
3. *P à valeurs dans $[0, 1]$,*
4. *Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,*
5. *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

Proposition 2.4. ***Formule de Poincaré.***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit $N \geq 2$, pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{N-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_N).$$

Corrolaire 2.5. ***Formule de Poincaré simplifiée.***
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $N \geq 2$. Si pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\},\ \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N,\ P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = p_k$$

alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \binom{N}{k} p_k.$$

Commentaire : leçon très longue donc si on veut en parler, mettre seulement le titre "Formule de Poincaré". On peut aussi se contenter de l'intersection de deux événements et être capable de donner la formule de Poincaré si demandé par le jury. Dans tous les cas être capable de passer du résultat de l'intersection de 2 événements à celui de 3 événements.
Exemple d'application : le problème des chapeaux.

2.2.2. *Probabilité et dénombrement.*

Proposition 2.6. *Soient $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et n réels positifs p_1,..., p_n tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout entier i compris entre 1 et n.*

Remarque 2.7. *C'est ainsi que l'on définie une probabilité en seconde, en donnant la probabilité de chaque événement élémentaire puis pour un événement non élémentaire par $P(A) = \sum_{\substack{i\,/\\ \omega_i \in A}} p_i$.*

Définition 2.8. *P est appelée **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Proposition 2.9. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé avec P la probabilité uniforme. Alors pour tout événement A*

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exemple : Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, l'application P_1 définie par $P_1(\{1\}) = 1$ et $P_1(\{i\}) = 0$ pour $i \in \{2, \ldots, 6\}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. La probabilité uniforme P_2 est telle que $P_2(\{i\}) = 1/6$ pour $i \in \{1, \ldots, 6\}$.
Exercice : Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est telle que la probabilité des nombres pairs est le double de la probabilité des nombres impairs, trouver P.

Exercice : Importance de la précision dans la description de l'expérience pour le choix du modèle probabiliste voir dans le document ressource de seconde le problème des deux personnes qui s'assoient "au hasard" sur deux bancs.

2.2.3. *Loi des grands nombres.* Formulation collège-lycée

Théorème 2.10. *Lorsqu'on répète un grand nombre de fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement tend vers la probabilité de cet événement.*

Remarque 2.11. *Penser aux TICE ...*

2.3. **Probabilité.** *version plutôt lycée.*

2.3.1. *Définition et propriétés.*

Définition 2.12. *Un modèle probabiliste est défini par*
- *la donnée de **l'ensemble des issues possibles (ou univers)** $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$*
- *l'attribution à chacune des issues (ou événement élémentaire) x_i d'un nombre p_i, positif ou nul, appelé **probabilité** de x_i, de sorte que l'on ait $p_1 + \cdots + p_n = 1$.*

Définition 2.13. *On a une situation **d'équiprobabilité** lorsque chaque issue a la même probabilité.*

Proposition 2.14. *Dans une situation d'équiprobabilité avec un univers de n éléments alors chaque événement élémentaire a pour probabilité $1/n$.*

Définition 2.15. *Soit Ω un univers, P une probabilité sur Ω et A un événement alors la **probabilité** de A, notée $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.*

Proposition 2.16. *Dans une situation d'équiprobabilité, pour tout événement A*

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Proposition 2.17. *Soit Ω un univers et P une probabilité sur Ω alors pour tout événements A et B*
1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple : Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, l'application P_1 définie par $P_1(\{1\}) = 1$ et $P_1(\{i\}) = 0$ pour $i \in \{2, \ldots, 6\}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. La probabilité uniforme P_2 est telle que $P_2(\{i\}) = 1/6$ pour $i \in \{1, \ldots, 6\}$.
Exercice : Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est telle que la probabilité des nombres pairs est le double de la probabilité des nombres impairs, trouver P.

Exercice : Importance de la précision dans la description de l'expérience pour le choix du modèle probabiliste voir dans le document ressource de seconde le problème des deux personnes qui s'assoient "au hasard" sur deux bancs.

2.3.2. *Loi des grands nombres.* Formulation collège-lycée

Théorème 2.18. *Lorsqu'on répète un grand nombre de fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement tend vers la probabilité de cet événement.*

Remarque 2.19. *Penser aux TICE ...*

2.4. Probabilité conditionnelle.

2.4.1. *Définitions.*

Définition 2.20. *Soient A un événement tel que $P(A) > 0$ et B un autre événement. On appelle **probabilité de B conditionnée par A** ou **probabilité de B sachant A** le réel, noté $P_A(B)$, défini par*
$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Remarque 2.21. $P_A(A) = 1$

Proposition 2.22. *P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

Remarque 2.23. *Une conséquence importante est que toutes les propriétés connues des probabilités sont valables pour une probabilité conditionnée selon un événement.*

Remarque 2.24. *Avec la définition de la probabilité conditionnée par A on voit que si $P(A) > 0$ alors $P_A(B) = P(B)$ équivaut à $P(B \cap A) = P(B)P(A)$. Ceci peut aussi être pris comme définition de l'indépendance lorsque $P(A) > 0$, dans ce cas faire remarquer très vite que si A et B sont de probabilité non nulle, les propriétés suivantes sont équivalentes*
1. $P_A(B) = P(B)$
2. $P(B \cap A) = P(B)P(A)$
3. $P_B(A) = P(A)$

Définition 2.25. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, alors*
1. *Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
2. *N événements $A_1, \ldots, A_N$ sont dits **indépendants dans leur ensemble** si pour tout k compris entre 2 et N, tous indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N$ on a $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$.*

Remarque 2.26. – *Indépendance et incompatibilité sont deux choses différentes, en effet si deux événements A et B de probabilité non nulle sont incompatibles alors $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.*
- *L'indépendance dans leur ensemble de N événements implique l'indépendance deux à deux (faire $k = 2$ dans la définition) mais la réciproque est fausse. Pour s'en convaincre on peut faire l'exercice suivant.*
  Exercice 1. *On jette un dé bleu et un dé rouge de façon indépendante et équiprobable. Soient A l'événement "le chiffre du dé bleu est impair", B l'événement "le chiffre du dé rouge est pair" et C l'événement "les deux dés ont la même parité". Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux mais ne sont pas indépendants dans leur ensemble.*
- *Commentaire : on peut se contenter de l'indépendance de deux événements car c'est le seul cas vu en Terminale ou BTS. Le cas de plus de deux événements est indiqué tout de même ici en cas de questions indiscrètes du jury.*

Proposition 2.27. *Soient A et B deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.*

La démonstration de cette propriété fait partie des démonstrations modèle en TS. Cette propriété se généralise à un nombre fini d'événements.
Preuve. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$. □

2.5. Deux résultats de décomposition.

2.5.1. *Probabilités conditionnelles composées.*

Proposition 2.28. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements avec $P(A) > 0$ alors $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.*

Preuve. Ceci résulte directement de la définition de la probabilité conditionnée par A. □

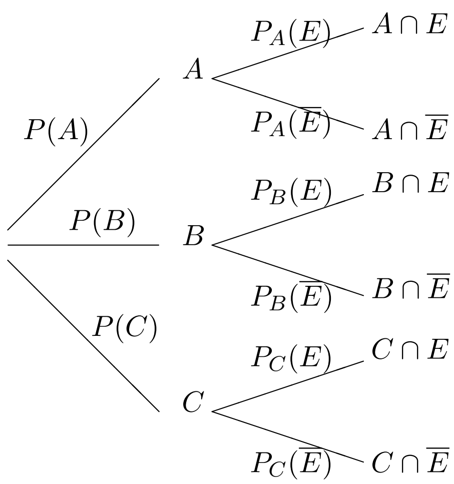
Proposition 2.29. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'événements tels que*
$P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n-1} A_i\right) > 0$; on a
$$P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{(A_1 \cap A_2)}(A_3) \cdots P_{(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}(A_n).$$

2.5.2. *Formule des probabilités totales.*

Définition 2.30. *Une famille finie d'événements* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *deux à deux incompatibles et tels que* $\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i = \Omega$ *est appelée* ***système complet d'événements****.*

Théorème 2.31. *Soient* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé et* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *un système complet d'événements ayant tous une probabilité strictement positive, alors pour tout événement* A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(A).$$



2.5.3. *Arbre pondéré.*
Vous n'aurez le temps que de mettre le titre. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve au lycée.
Les rêgles de calculs dans un arbre pondéré sont les suivantes :
- Pour calculer la probabilité d'un événement figurant au bout d'une branche, on fait le produit des probabilités figurant sur les branches conduisant à cet événement (on parlera de la probabilité du chemin). Cette rêgle n'est autre que la propriété des probabilités composées. Par exemple ici $P(A\cap E) = P(A)P_A(E)$.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement. Cette rêgle est la formule des probabilités totales. Par exemple ici $P(E) = P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) + P(C)P_C(E)$.
- La somme des probabilités des branches ayant même origine vaut 1. Ceci provient du fait que sur les branches figurent des probabilités et que l'on a un système complet d'événements. Par exemple ici $P_A(E) + P_A(\overline{E}) = 1$.

Exercice. 2 Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience élémentaire est répétée au plus 50 fois et s'arrête dès que le rat a trouvé le bon couloir. Sous chacune des hypothèses suivantes :
(H_1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,
(H_2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,
(H_3) le rat se souvient des deux expériences précédentes,
avec qu'elle probabilité la première tentative réussie est-elle la première ? la deuxième ? la troisième ? la k-ième ? Avec qu'elle probabilité aura t-il échoué à chacune des 50 tentatives ?

2.6. **Probabilité des causes.** *Commentaire : Leçon très longue, en 15mn certainement que la possibilité d'annoncer "Formule de Bayes". Elle n'est pas explicitement au programme même si l'on voit de nombreux exercices la faisant redémontrer. On peut donc aussi adopter la stratégie d'annoncer un exercice sur le thème "probabilité des causes" et de faire ressortir lors de la résolution les questions qui amènent à l'utilisation de la formule de Bayes. Paragraphe explicatif qui peut être utile lors du développement ou l'entretien.*

Très souvent lorsque l'on connait $P_A(B)$, l'événement A est considéré comme la *cause* et l'événement B comme la *conséquence* ; par exemple si on considère un test de dépistage d'une maladie A sera l'événement "la personne est malade" et B "le test est positif". Mais souvent on a besoin de connaitre la probabilité de la cause sachant la conséquence ; si on reprend l'exemple du test de dépistage, sachant que le test est positif on veut connaitre la probabilité que la personne soit malade. Nous utiliserons pour cela la formule de Bayes.

Théorème 2.32. ***(Formule de Bayes)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements tels que pour tout i $P(A_i) > 0$. Alors pour tout événement A de probabilité non nulle et pour tout i*

$$P_A(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P_{A_j}(A)}.$$

Preuve. $P_A(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(A)}{P(A)}$ et on termine avec la formule des probabilités totales. □

Exercice 3. On considère un test servant à dépister une maladie. Soient les événements $M =$"l'individu est malade" et $P_0 =$"le test est positif". On sait expérimentalement que $P_M(\overline{P_0}) = 10^{-3}$ et que $P_{\overline{M}}(P_0) = 2 \times 10^{-3}$ appliqué à une maladie qui touche un individu sur 10000. Calculer la probabilité que l'individu soit malade lorsque le test est positif.
On peut aussi regarder la variation de la probabilité que l'individu soit malade lorsque le test est positif en fonction de la probabilité p que l'individu soit malade (cf. document ressource ancien programme).

2.6.1. *Graphe probabiliste, probabilité et matrices.* Sous forme d'exemple avec des exercices issus des exposés traitant plus à fond de ces thèmes.
Penser que les graphes probabilistes à deux états peuvent aussi s'étudier à l'aide des suites arithmético-géométriques.

3. Des exemples classiques.

Certains pourront servir d'illustration au cours de la leçon.

(1) Probabilité d'obtenir une certaine main dans un jeu de cartes, les exemples précédents avec les dés (la probabilité d'obtenir une certaine somme en lançant deux dés nous donne un exemple de probablité non uniforme), "paradoxe" du Duc de Toscane, etc ...

(2) Les anniversaires (exemple où il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire).
Dans un classe de N élèves qu'elle est la probabilité que deux élèves, au moins, fêtent leur anniversaire le même jour (ils sont nés la même année et ce n'est pas une année bissextile).
Sans plus de renseignement pour modéliser nous allons aussi faire l'hypothèse que les naissances se répartissent de façon uniforme sur une année. L'univers sera alors $\Omega = \{1, \dots, 365\}^N$ et la probabilité P la probabilité uniforme. Nous allons calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A_N}$,
$$P(\overline{A_N}) = \frac{\mathrm{card}(\overline{A_N})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - N + 1)}{365^N}.$$
On peut compléter avec un algorithme de calcul de $P(A_N)$ ou encore un algorithme permettant d'avoir le plus petit entier N tel que pour p donné $P(A_N) \geq p$.
On obtient par exemple $P(A_{22}) \simeq 0.48$, $P(A_{23}) \simeq 0.51$ et $P(A_{30}) \simeq 0.71$.

(3) Distance la plus probable.
On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour r compris entre 1 et $n-1$, trouver la probabilité que deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r-1$ personnes).
On modélise en prenant pour univers Ω l'ensemble des files d'attente possibles, soit, l'ensemble des n-uplets sans répétition possibles, $\mathrm{card}(\Omega) = n!$. Les numéros d'ordre étant attribués au hasard, on prend à nouveau pour P la probabilité uniforme et en notant B_r l'événement "les amis sont distants de r places nous obtenons
$$P(B_r) = 2\frac{n-r}{n!} \times (n-2)! = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}.$$
On remarquera que contrairement à ce que l'on peut dire intuitivement, la distance la plus probable est la distance 1 (les amis se suivent).

(4) Le problème des chapeaux.
n personnes déposent leur chapeau à l'entrée d'un restaurant. En partant, chacune récupère un chapeau au hasard, qu'elle est la probabilité qu'aucune d'entre elle ne reparte avec son chapeau ?
On modélise avec pour univers Ω l'ensembles des suites possibles de chapeaux, soit, l'ensemble des n-uplets sans répétition possibles, $\mathrm{card}(\Omega) = n!$. Les chapeaux sont pris au hasard, P est la probabilité uniforme. On note $A_i =$"la i^e personne récupère son chapeau" et $C =$"aucune personne ne repart avec son chapeau", alors

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Ce résultat est obtenu à l'aide de la formule de Poincaré simplifiée puisque pour tout $1 \le k \le n$, $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.

(5) Problème du chevalier de Méré. Est-il plus avantageux, lorsqu'on joue aux dés, de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ou bien sur l'apparition d'au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?
Tout d'abord pourquoi 24 ? Lorsque l'on lance un dé on a 6 issues possibles et lorsque l'on lance deux dés on a 36=6x6 issues possibles, 24=6x4.
On modélise ce problème dans le premier cas en prenant pour univers $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$ et la probabilité uniforme sur Ω_1. Ainsi la probabilité de ne pas avoir de 6 lors des 4 lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ et la probabilité d'avoir au moins un 6 est $p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.5177$.
Dans le second cas, on le modélise en prenant pour univers $\Omega_2 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2)^{24}$ et la probabilité uniforme sur Ω_2. Ainsi la probabilité de ne pas avoir de double 6 lors des 24 lancers est $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ et la probabilité d'avoir au moins un double 6 est $p_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$. Le premier jeu est plus avantageux que le second et il n'y a pas de principe "d'homotéthie".

(6) Ruine du joueur. Un joueur a a euros en poche et il décide de jouer à un jeu pour lequel il mise à chaque partie k euros, s'il perd la partie il perd sa mise, s'il gagne la partie il remporte le double de sa mise. Les parties sont indépendantes et il a la probabilité p de gagner une partie. Il s'est fixé comme objectif de gagner $2a$ euros, il arrète de jouer et repart avec cette somme dès qu'il a atteint cet objectif ou bien il repart ruiné dès qu'il n'a plus d'argent disponible. Le but est de calculer la probabilité $P(n)$ que le joueur atteigne son objectif de gagner $2a$ euros lorsqu'il a n euros en poche.
Avec la formule des probabilités totales (en admettant que la probabilité qu'il atteigne son objectif lorsqu'il a n euros en poche sachant qu'il gagne la partie suivante est égal à la probabilité qu'il atteigne son objectif lorsqu'il a $n + k$ euros en poche)

$$P(n) = pP(n + k) + (1 - p)P(n - k).$$

En prenant pour simplifier a un multiple de k, nous obtenons que la suite de terme général $u_l = P(lk)$ satisfait la relation de récurrence

$$u_{l+2} - \frac{1}{p} u_{l+1} + \frac{1-p}{p} u_l = 0$$

avec pour conditions "aux bords" $u_0 = P(0) = 0$ et $u_{\frac{2a}{k}} = P(2a) = 1$.
Nous avons une relation de récurrence d'ordre 2 et pour déterminer le terme général de la suite il faut chercher les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - \frac{1}{p} x + \frac{1-p}{p} = 0$$

qui sont 1 et $\frac{1-p}{p}$.
Elles sont distinctes pour $p \neq 1/2$ (pour tous les jeux de casino p est strictement inférieur à 1/2) et alors $u_l = \alpha + \beta \left(\frac{1-p}{p}\right)^l$, α et β étant déterminés par les conditions $u_0 = 0$ et $u_{\frac{2a}{k}} = 1$. Ce qui

donne

$$P(a) = u_{a/k} = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{a/k}}{1-(\frac{1-p}{p})^{2a/k}} = \frac{1}{1+(\frac{1-p}{p})^{a/k}},$$

probabilité qui est maximale lorsque l'on mise le tout pour le tout c'est à dire $k = a$ et vaut alors p (ce qui n'est guère surprenant).
Si on refait les calculs dans le cas d'un jeu équitable ($p = 1/2$), l'équation $x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{1-p}{p} = 0$ admet alors 1 pour racine double et $u_l = \alpha + l\beta$, les conditions "aux bords" nous permettent d'en déduire que $u_l = l\frac{k}{2a}$ puis que $P(a) = u_{a/k} = 1/2$ quelque soit le montant k de la mise que l'on a décidé de mettre à chaque partie.

(7) Difficulté d'interprétation des résultats. Un test médical a pour but de comparer deux méthodes de traitements de calculs (rénaux), la méthode par chirurgie notée C et la méthode par ultra-sons notée U. 700 patients ont été traités, 350 par chirurgie et 350 par ultra-sons. 273 traités par la méthode C ont guéri et 289 par la méthode U. On en déduit donc, en prenant pour univers l'ensemble des patients traités muni de la probabilité uniforme et en notant R l'événement une personne prise au hasard parmi les patients traités a été guérie, que $P_C(R) = \frac{273}{350} \simeq 0.78$ et que $P_U(R) = \frac{289}{350} \simeq 0.83$. Nous sommes donc tenté d'en conclure que la méthode par ultra-sons est plus performante.
Une analyse plus fine tenant compte de la taille des calculs traités donne les valeurs suivantes :

	Méthode C	Méthode U
Gros calculs C_g	191 réussites/71 échecs	60 réussites/26 échecs
Petits calculs C_p	82 réussites/6 échecs	229 réussites/35 échecs

Nous avons alors les probabilités conditionnelles $P_{C\cap C_g}(R) = \frac{191}{262} \simeq 0.73$ et $P_{U\cap C_g}(R) = \frac{60}{86} \simeq 0.7$, la méthode par ultra-sons est moins performante sur les gros calculs.
Ainsi que les probabilités conditionnelles $P_{C\cap C_p}(R) = \frac{82}{88} \simeq 0.93$ et $P_{U\cap C_p}(R) = \frac{229}{264} \simeq 0.87$, la méthode par ultra-sons est aussi moins performante sur les petits calculs...

(8) Paradoxe. On dispose de 3 coffres d'apparence identique et munis de 2 tiroirs, dans chaque tiroir il y a une pièce. Dans le coffre 1 se sont deux pièces d'or, dans le coffre 2 deux pièces d'argent, dans le coffre 3 une pièce d'or et une pièce d'argent. On choisit un coffre au hasard, on ouvre un tiroir et on a une pièce d'or qu'elle est la probabilité que l'autre pièce du coffre soit aussi en or ?
Un premier argument pourrait être le suivant : si on a une pièce d'or alors on a soit le coffre 1, soit le coffre 3. Si c'est le coffre 1 alors l'autre pièce est en or, si c'est le coffre 2 alors l'autre pièce est en argent donc la probabilité cherchée est 1/2 ... Maintenant une réponse utilisant les probabilités conditionnelles.
On notera C_i l'événement "on choisit le coffre i" et O_1 l'événement "la pièce dans le premier tiroir ouvert est en or", O_2 l'événement "la pièce dans le deuxième tiroir ouvert est en or".
L'énoncé sous-entend que l'on choisit les coffres au hasard *de façon équiprobable* donc $P(C_i) = 1/3$ pour $i = 1, 2, 3$ et on supposera que le choix du tiroir se fait aussi de façon équiprobable donc $P_{C_1}(O_1) = 1$, $P_{C_2}(O_1) = 0$ et $P_{C_3}(O_1) = 1/2$.
On a l'information que la pièce tirée est en or, nous devons calculer la probabilité conditionnelle

$$P_{O_1}(O_2) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)} = \frac{P(C_1)}{P(O_1)} = \frac{1/3}{1/3 \times 1 + 1/3 \times 1/2} = \frac{2}{3}.$$

L'erreur commise dans le raisonnement intuitif est de supposer qu'il est équiprobable d'avoir les coffres 1 et 3 lorsque l'information "la première pièce tirée est en or" est connue.

4. Commentaires.

– Nous avons fait le choix de travailler avec un univers fini ce qui peut-être discutable. Si l'on prend un univers au plus dénombrable alors on peut encore considérer les triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et l'on doit remplacer la condition $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ par une union au plus dénombrable d'événements deux à deux disjoints, à savoir $P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$ avec I fini ou dénombrable.

Lorsque Ω n'est pas fini ou dénombrable alors on prend un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ (une tribu), détailler plus ce cas mène au delà du programme de l'oral. Pourtant c'est sous-jacent dès que l'on travaille avec les lois à densité.

– Il ne semble pas indispensable de parler d'espace produit dans cette leçon, il est tout de même bon d'avoir compris que l'indépendance d'épreuves successives conduit à une modélisation avec la probabilité produit.
– L'énoncé (très vague) de la loi des grands nombres découle de la loi forte des grands nombres ; les énoncés en termes d'intervalle de fluctuations sans précision sur la taille de l'intervalle découlent de la loi faible des grands nombres, avec des intervalles de largeur en $1/\sqrt{n}$ où n est le nombre d'expériences observées découlent du théorème central limite. Pour plus de détails voir l'exposé 12 "Intervalles de fluctuation".

  Pour mémoire tout de même, si on note X_i la variable aléatoire valant 1 si l'événement A est réalisé lors de l'expérience numéro i et 0 sinon, alors l'hypothèse d'indépendance des expériences conduit à supposer que les variables aléatoires sont indépendantes, et la répétition de l'expérience qu'elles sont de même loi. Ici leur loi est la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$ et on termine en remarquant que la valeur prise par $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ est la fréquence de réalisation de l'événement A lors des n expériences.
– Les probabilités conditionnelles sont souvent introduites à l'aide des fréquences conditionnelles. Un exemple

  En 2005-2006 les effectifs (exprimés en milliers) en classes préparatoires se répartissaient de la façon suivante (*Source Insee : Regards sur le parité www.educnet.education.fr/insee/*).

	Filles	Garçons
Scientifique	13.8	33.5
Economique	8.8	7.2
Littéraire	8.5	2.9

  On peut alors se poser les questions suivantes : si l'on prend au hasard un élève de classe préparatoire quelle est la probabilité que ce soit une fille ? Quelle est la probabilité que ce soit une fille et qu'elle soit en préparation scientifique ? Sachant que c'est une fille qu'elle est la probabilité qu'elle soit en préparation scientifique ?

  Pour répondre à ces questions il faut compléter le tableau en calculant les effectifs totaux suivants

	Filles	Garçons	Total
Scientifique	13.8	33.5	
Economique	8.8	7.2	
Littéraire	8.5	2.9	
Total	31.1	43.6	74.7

  Pour le calcul des deux premières probabilités on modélise en prenant pour univers l'ensemble des élèves de classes préparatoires que l'on munit de la probabilité uniforme. La probabilité qu'un élève pris au hasard soit une fille (nous noterons F cet événement) est alors la fréquence des filles soit $P(F) = \frac{31.1}{74.7} \simeq 0.42$ et la probabilité qu'un élève pris au hasard soit une fille et en préparation scientifique (nous noterons $F \cap S$ cet événement) est de même $P(F \cap S) = \frac{13.8}{74.7} \simeq 0.18$.

  Pour le troisième calcul la modélisation se fera en prenant pour univers l'ensemble des filles de classe préparatoire muni de la probabilité uniforme et la probalité qu'une fille prise au hasard soit en préparation scientifique est alors $p = \frac{13.8}{31.1} \simeq 0.44$.

  On remarquera alors que $p = \frac{P(F \cap S)}{P(F)}$, on appellera cette probabilité *probabilité conditionnée par* F ou encore *probabilité sachant* F.
– **Preuve de la proposition 2.3.**
  (1) $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ d'où $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$.
  (2) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ d'où $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.
  (3) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ et $P(\overline{A}) \geq 0$ donc $P(A) \leq 1$.
  (4) $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ d'où $P(B) = P((B \setminus A) \cup A) = P(B \setminus A) + P(A)$ et $P(B \setminus A) \geq 0$.
  (5) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ d'où $P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$. □
– **Preuve de la Formule de Poincaré.** Nous avons montré cette assertion pour $N = 2$ dans les premières conséquences de la définition de probabilité, on la montre pour tout entier $N \geq 2$ par récurrence sur N (pas de difficulté particulière mais un peu embêtant à écrire). On peut aussi donner la démonstration ci-dessous faisant intervenir un calcul d'espérances de variables aléatoires, on sort du cadre de la leçon mais les variables aléatoires sont au programme du secondaire. □

  Une preuve de la formule de Poincaré avec les espérances. Avec les notations de la proposition, pour tout événement B on introduit les variables aléatoires $\mathbf{1}_B$ valant 1 si ω appartient à B et 0 sinon (c'est la fonction indicatrice de l'ensemble B). Alors $E(\mathbf{1}_B) = P(B)$ et $\mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}} = \mathbf{1}_{A_{i_1}} \times \cdots \times \mathbf{1}_{A_{i_k}}$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_N}) \\ &= 1 - E\big((1-\mathbf{1}_{A_1})\ldots(1-\mathbf{1}_{A_N})\big) \\ &= 1 - E\big(1 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\ldots\mathbf{1}_{A_{i_k}}\big) \\ &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{(k-1)} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

– **Preuve de la proposition2.6.** Soit A un événement alors nécessairement (en appliquant l'axiome (ii) de la définition 2.2) nous avons $P(A) = \sum_{\substack{i\,/\\ \omega_i\in A}} p_i$, d'où l'unicité de P en cas d'exitence.
Il reste à vérifier que l'application P définie ci-dessus est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Elle est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs positives. $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ et clairement $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$ si $A\cap B = \emptyset$. □
– **Preuve de la proposition 2.9.** Si $\mathrm{card}(\Omega) = n$ alors pour tout $\omega\in\Omega$, $P(\{\omega\}) = p$ avec $1 = \sum_{\omega\in\Omega} p = np$, d'où $P(\{\omega\}) = 1/n$ et $P(A) = \sum_{\omega\in A}\frac{1}{n} = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. □
– **Preuve de la proposition 2.22.** P_A est bien une application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. $P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ et si B et C sont deux événements incompatibles, alors $B\cap A$ et $C\cap A$ sont incompatibles et

$$P_A(B\cup C) = \frac{P((B\cup C)\cap A)}{P(A)} = \frac{P((B\cap A)\cup(C\cap A))}{P(A)} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} + \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = P_A(B)+P_A(C).$$

□
– **Preuve de la proposition 2.29.** Commençons par remarquer que toutes les probabilités conditionnées introduites sont bien définies puisque pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, $P\left(\bigcap_{1\le i\le k} A_i\right) \ge P\left(\bigcap_{1\le i\le n-1} A_i\right) > 0$.
La preuve se fait par récurrence sur n. Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence : "$(A_i)_{1\le i\le n}$ une suite finie d'événements tels que $P\left(\bigcap_{1\le i\le n-1} A_i\right) > 0$ alors $P\left(\bigcap_{1\le i\le n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{(A_1\cap A_2)}(A_3)\cdots P_{(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}$
(H_2) est vérifiée (c'est la prosition 2.28). Montrons que (H_n) implique (H_{n+1}) pour $n\ge 2$.
$P\left(\bigcap_{1\le i\le n} A_i\right) > 0$ et avec la proposition 2.28

$$P\left(\bigcap_{1\le i\le n+1} A_i\right) = P(A_1\cap\ldots\cap A_n)P_{(A_1\cap\ldots\cap A_n)}(A_{n+1}).$$

Puis en utilisant (H_n) (cf. $P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}) \ge P(A_1\cap\ldots\cap A_n) > 0$) on a (H_{n+1}).
(H_2) est vérifiée, (H_n) implique (H_{n+1}) pour tout $n\ge 2$ donc (H_n) est vérifié pour tout $n\ge 2$. □
– **Preuve du théorème 2.31.** $P(A) = P(A\cap(\bigcup_{1\le i\le n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap A_i)$ et le résultat final avec la proposition 2.28. □

5. Modélisation d'un sytème évolutif.

Mis ici pour mémoire, ne pas le mettre dans le corps de l'exposé. Comme dit plus loin, le but est de ce paragraphe est d'expliquer comment retrouver le modèle probabiliste de départ lorsque sont données les probabilités conditionnelles. Un exercice type que l'on trouve dans tout chapitre sur les probabilités conditionnelles est le suivant
Exercice 4. On dispose de deux urnes U_1 et U_2, dans l'urne U_1 il y a 7 boules noires et 3 blanches et dans l'urne U_2 il y a 9 boules noires et 11 blanches, les boules sont indiscernables au toucher. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule, qu'elle est la probabilité de tirer une boule noire ?
Exercice que l'on résolvera de la façon suivante. On note U_i l'événement "choix de l'urne U_i" et N (resp.

B) l'événement "choix de la boule noire (resp. blanche)".
Le choix des urnes est équiprobable donc $P(U_1) = P(U_2) = 1/2$. Dans chaque urne les boules sont indiscernables au toucher donc il y a encore équiprobabilité, d'où $P_{U_1}(N) = \frac{7}{7+3}$ et $P_{U_2}(N) = \frac{9}{9+11}$. Avec la formule des probabilités totales $P(N) = \frac{1}{2}(\frac{7}{10} + \frac{9}{20}) = 0.575$.
On constate que l'information donnée par l'enoncé induit la connaissance de P_{U_i} et non celle du modèle probabiliste $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ pour lequel P_{U_i} est la probabilité conditionnée par l'événement U_i. On doit donc se poser la question de l'existence d'un tel modèle.
On doit choisir un univers qui prend en compte choix de l'urne et couleur de la boule $\Omega = \{(1,n),(2,n),(1,b),(2,b)\}$. $(1,n)$ correspond au choix de l'urne 1 puis tirage d'une boule noire, il faut donc que $P(\{(1,n)\}) = \frac{1}{2}\frac{7}{10}$, $P(\{(1,b)\}) = \frac{1}{2}\frac{3}{10}$etc...En utilisant que $U_i = \{(i,n),(i,b)\}$ pour $i = 1$ ou 2 et que $N = \{(1,n),(2,n)\}$ on a bien que $P(U_i) = 1/2$ et $P_{U_1}(N) = \frac{7}{10}$ etc...

Remarque 5.1. *On notera que dans les exercices 2 et 3 aussi l'enoncé nous donne des indications directes sur les probabilités conditionnés par la ou les étapes précédentes.*

6. Quelques références.

Livres scolaires.
Issac R., *Une initiation aux probabilités*, Vuibert.
Ouvrard J-Y., *Probabilités 1 - Capes Agrégation*, Cassini.
Ramis J.P., *Mathématiques tout-en-un L2*, Dunod.
www.bibmath.net/dico/