41 - SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES.

CHANTAL MENINI

1. Point programme

Apparition en première S et ES, la démonstration de la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ou arithmétique doit être connue, glissement de la limite en terminale avec les nouveaux programmes seule doit être donnée une approche de la notion de limite par les exemples en première. Vu aussi en BTS.

2. Un plan possible

2.1. Suites arithmétiques.

Définition 2.1. *Soit (u_n) une suite de réels, la suite est dite* **arithmétique** *s'il existe un réel r tel que pour tout entier n*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé **la raison** *de la suite.*

Remarque 2.2. *(Justification du nom)*
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2} = u_n$.

Proposition 2.3. *(Formule explicite)*
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors
– *pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$,*
– *pour tous les entiers n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$.*

Remarque 2.4. *Si (u_n) est une suite arithmétique alors la variation absolue $u_{n+1} - u_n$ est constante.*

Théorème 2.5. *(Variations et limites)*
Soient r un réel et (u_n) une suite arithmétique de raison r.
– *Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
– *Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.*
– *Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Commentaire : une suite arithmétique de raison non nulle est toujours divergente.

Proposition 2.6. *(Somme des n premiers termes)*
Pour tout entier naturel non nul n

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Corrolaire 2.7. *Soit (u_n) une suite arithmétique alors pour tout entier n*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Remarque 2.8. *On peut échanger les rôles de la proposition et du corollaire.*

– Exercices d'application directe du type : vérifier si une suite est ou non arithmétique, formule explicite, calcul de sommes de termes consécutifs.
– Reconnaitre la somme des termes d'une suite arithmétique : le château de cartes (nombre de cartes de l'étage n est $u_n = u_{n-1} + 3$ et $u_1 = 2$), les nombres polygonaux.

Date: 3 mars 2014.

2.2. Suites géométriques.

Définition 2.9. *Soit (u_n) une suite de réels, la suite est dite* **géométrique** *s'il existe un réel q tel que pour tout entier n*

$$u_{n+1} = qu_n$$

q est appelé **la raison** *de la suite.*

On supposera dans la suite $q \neq 0$.

Remarque 2.10. *(Justification du nom)*
Prenons $q > 0$ et $u_0 > 0$, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\sqrt{u_{n+1}u_{n-1}} = u_n$.

Commentaire : savoir en donner une illustration graphique avec la hauteur du triangle rectangle issue de l'angle droit.

Proposition 2.11. *(Formule explicite)*
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors
- *pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$,*
- *pour tous les entiers n et p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.*

Remarque 2.12. *Si (u_n) est une suite géométrique non nulle alors la variation relative $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est constante.*

Théorème 2.13. *(Variations et limites)*
Soient q un réel et (u_n) une suite géométrique de raison q.
- *Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante si $u_0 > 0$ et décroissante si $u_0 < 0$. De plus $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$.*
- *Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.*
- *Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$. De plus la suite converge vers 0.*
- *Si $-1 < q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone et la suite converge vers 0.*
- *Si $q = -1$ alors la suite (u_n) ne prend que les valeurs u_0 et $-u_0$.*
- *Si $q < -1$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone et n'a pas de limite.*

Commentaire : Si on veut s'épargner de distinguer les cas en fonction du premier terme, on peut simplement énoncer le résultat pour la suite $(q^n)_n$ dans la mesure où l'on a déjà établi que $u_n = u_0 \times q^n$.

Proposition 2.14. *(Somme des $n + 1$ premiers termes)*
Pour tout entier naturel n, pour $q \neq 1$

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Exercices d'application directe du type : vérifier si une suite est ou non géométrique, formule explicite, calcul de sommes de termes consécutifs (par exemple l'échiquier et les grains de blé).
- Exercice plus élaboré : Flocon de Von Koch, voir Indice 1e S ou ES et L ed. Bordas ou Hyperbole 1eS ed. Nathan ou Déclic 1e S ed. Hachette, le triangle de Sierpinski, voir Math'x 1e S ed. Didier ou Déclic 1e S ed. Hachette.
- Algorithme possible au niveau première (cf. n'ont pas encore le logarithme) : Calcul du premier entier n tel que u_n dépasse (ou soit plus petit dans le cas de la convergence) une valeur donnée, test de doublement de capital dans le cas d'intérêts composés, calcul de "demi-vie" d'un corps radioactif, etc
- Utilisation dans d'autres parties du programme de première : Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique tronquée (outils : dérivation et somme des premiers termes d'une suite géométrique). Voir le document ressource "Statistiques et probabilités" de première.
- Comparaison d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique : placement avec intérêt simple ou composés (travail avec les pourcentages), ceci peut être illustré sur tableur.

2.3. Suites arithmético-géométriques.

Définition 2.15. *Soit (u_n) une suite de réels, la suite est dite* **arithmético-géométrique** *s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n*

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 2.16. *Pour $a = 1$ on retrouve la définition d'une suite arithmétique, pour $b = 0$ celle d'une suite géométrique.*

Proposition 2.17. *Soient $a \neq 1$ et b deux réels, (u_n) la suite aritmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ alors pour tout entier n*

$$u_n = \frac{b}{1-a} + a^n(u_0 - \frac{b}{1-a}).$$

Commentaire : cette proposition peut ne pas être mise, l'important est de savoir comment on se ramène à une suite géométrique avec
– *recherche de point fixe l solution de $l = al + b$, soit $l = \frac{b}{1-a}$,*
– *introduction d'une suite auxiliaire (v_n) en posant $v_n = u_n - l$ qui sera géométrique de raison a.*

– Illustration graphique : avec par exemple Geogebra, visualiser les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = x$, construction des premiers termes d'une suite arithmético-géométrique, curseurs permettant de faire varier premier terme, a et b. *Commentaire : Remarquer que l'introduction de la suite auxiliaire (v_n) revient juste à faire un changement d'origine du repère.* Peut aussi être utilisé pour une approche de la notion de limite. Fait dans Transmath 1eS ed. Nathan,
– Exemples conduisant à l'étude de suites aritmético-géométrique :
  – Les tours de Hanoï : voir Math'x 1e S ed. Didier ou Déclic 1e S ed. Hachette, Mathématiques L1 ed. Pearson Education.
  – Accroissement de population avec flux migratoire.
  – Evolution d'un capital avec intérêts composés et versement régulier, remboursement d'un prêt avec mensualités fixes.
  – Les graphes probabilistes à 2 états, voir Hyperbole Term ES ed. Nathan.

2.4. **Comparaison à une suite géométrique, applications.**

2.4.1. *Croissance comparée.*

Théorème 2.18. *Soit la suite (u_n) de terme général strictement positif, s'il existe $q \in]0, 1[$ et un entier N tels que*

$$\forall n \geq N \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

alors la suite (u_n) converge vers 0.

Corrolaire 2.19. *Soit la suite (u_n) de terme général strictement positif, si*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, 1[$$

alors a suite (u_n) converge vers 0.

Application de ce qui précède :

Théorème 2.20. *Soit $a > 1$ un réel et p un entier naturel non nul alors*

$$n^p \underset{+\infty}{\ll} a^n \underset{+\infty}{\ll} n!$$

2.4.2. *Convergence de séries à termes positifs.*

Proposition 2.21. *Soient q un réel, la série de terme général q^n converge si et seulement si $-1 < q < 1$ et alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Théorème 2.22. *(Critère de d'Alembert)*
Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n > 0$, si
– $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, 1[$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
– $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in]1, +\infty[$ *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Remarque 2.23. *Si $l = 1$ on ne peut rien dire, penser aux séries de Riemann $(u_n = \frac{1}{n^\alpha})$.*
La limite peut ne pas exister par exemple $u_n = \frac{1}{3^n}$ pour n pair et $u_n = \frac{2}{3^n}$ pour n impair.
Le corrolaire 2.19 peut aussi se voir comme corrolaire du théorème de d'Alembert puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0.

2.5. **Encore des exercices possibles.** **Exercice 1.** Achille et la tortue (Paradoxe de Zénon, environ -500 av JC)
Achille fait la course avec une tortue (course rectiligne), il lui laisse 100m d'avance. Achille avance à la vitesse V m.s^{-1} et la tortue v m.s^{-1} (bien sûr $v < V$). Lorsqu'Achille arrive au point de départ de la tortue noté T_0, celle-ci aura avancé et sera au point noté T_1, lorsqu'il arrive au point T_1 elle aura encore avancé et sera au point T_2 et ainsi de suite. La tortue ne sera jamais rattrapée.
Nous savons que la tortue sera rattrapée (du moins si l'arrivée est suffisamment loin), déterminer à quelle distance de D Achille rattrape la tortue et la durée de la course jusqu'au point de dépassement. Voir par exemple Hyperbole TES et L (programmes 2012 p36) ed. Nathan, avec $V = 10$ m.s^{-1} et $v = 0.1$ m.s^{-1}.
Les grandes lignes, on note t_n le temps que met Achille pour arriver en T_n (position de la tortue à la n^{ieme} étape), alors

$$t_n - t_{n-1} = \frac{T_{n-1}T_n}{V} \quad T_{n-1}T_n = v(t_{n-1} - t_{n-2}).$$

La suite $(t_n - t_{n-1})$ est géométrique de raison $\frac{v}{V}$ et de premier terme $t_1 - t_0$. Ainsi en sommant les termes

$$t_n = t_0 + (t_1 - t_0)\frac{1-(v/V)^n}{1-v/V} \quad t_1 - t_0 = \frac{v}{V}t_0 \quad t_0 = \frac{100}{V}$$

et a pour limite $\frac{100}{V-v}$ lorsque n tend vers $+\infty$, temps (en secondes) que met Achille pour rattraper la tortue.

Exercice 2.
$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$
Trouver la bonne suite géométrique, voir exposé “Séries numériques”.

Exercice 3. Développement décimal périodique
$0,999999999\ldots = 1$ ou variantes, voir par exemple Terracher Analyse 1e S ed. Hachette (rappel : les rationnels sont les réels qui ont des développement décimaux périodiques à partir d'un certain rang, voir par exemple Mathématiques L1 ed. Pearson Education)

3. Développements

Toutes les démonstrations des propositions ou théorèmes, ainsi que toutes les résolutions d'exercices peuvent être demandées.
Les exercices sans références précises se trouvent dans de nombreux manuels scolaires.
Pour les démonstrations de la partie 2.4 nous renvoyons à la leçon sur les séries.
Pour les démonstrations de niveau première ou terminale elles sont faites en général dans les ouvrages de ce niveau. Juste quelques points clés.
Pour les formules explicites ou sommes des premiers termes, les démonstrations seront faites avec des pointillés en première et pourront être l'occasion de premiers exemples de démonstrations par récurrence en terminale.
Pour la monotonie des suites géométriques on utilisera le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque les termes de la suite sont strictement positifs.
Pour montrer qu'avec $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, utilisez que pour tout $x > 0$ et tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (étude des fonctions ou récurrence). Ne pas utiliser la fonction logarithme qui est en général vue après l'étude de ces suites.