59 - SÉRIES NUMÉRIQUES.

CHANTAL MENINI

1. Point programme

Pour l'ancien programme des BTS (encore en vigueur pour la deuxième année) les séries sont au programme du groupement A, il est en particulier indiqué que :
"L'étude des séries numériques très simples, préalable à l'étude des séries de Fourier, a pour objectif de permettre aux étudiants de se familiariser avec les sommes infinies et la notation $\sum$. La plupart des résultats relatifs aux séries numériques pourront être admis et ne feront l'objet d'aucun développement théorique."
Pour le nouveau programme des BTS seules restent les séries géométriques et de Riemann. Pour cette année encore nous nous en tenons à "l'ancien programme".
Bien que ne figurant pas explicitement au programme du secondaire, on les trouve cependant déjà dans des exercices de 1e ou Term où on étudie la limite de la suite des sommes partielles.

2. Un plan possible

2.1. Définitions et premiers résultats.

Définition 2.1. *Soit (u_n) une suite de réels. La* **série numérique de terme général** u_n*, notée* $\sum u_n$ *est la suite (S_n) où*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

S_n est appelée **somme partielle d'indice** n *de la série $\sum u_n$.*

Si la suite (u_n) n'est définie que pour $n \geq 1$, on sommera à partir de $k = 1$.

Définition 2.2. *La série $\sum u_n$ est dite* **convergente de somme** S *si la suite (S_n) des sommes partielles est convergente et converge vers S. On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$.*
Sinon la série est dite **divergente**.

Théorème 2.3. *Si la série $\sum u_n$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Remarque 2.4. *La condition ci-dessus est nécessaire mais n'est pas suffisante, considérer par exemple $u_n = \ln(\frac{n+2}{n+1})$ ou $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $(= \sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.*

Un premier exemple de résultat général sur des séries déjà "manipulées"

Proposition 2.5. *(Séries géométriques)*
Soient $u_0 \neq 0$ et q deux réels. La série de terme général $u_0 q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Elle a alors pour somme $\frac{u_0}{1-q}$.

Exemple : on recycle un exemple de l'exposé "Suites arithmétiques. Suites géométriques".

2.2. Séries à termes positifs.

Théorème 2.6. *(Comparaison)*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels et n_0 un entier, tels que pour tout $n \geq n_0$ $0 \leq u_n \leq v_n$. Si
– *la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge,*
– *la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.*

Théorème 2.7. *(Comparaison dans le cas d'équivalence)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Date: 3 mars 2014.

Ce résultat n'est pas vrai si le terme général des séries n'est pas de signe constant. Un contre-exemple sera donné plus loin après avoir vu un résultat sur les séries alternées.
Commentaire : on rappelle que $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 1 et un entier n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \varepsilon_n v_n$, ce qui revient à dire **dans le cas où la suite (v_n) a au plus un nombre fini de termes nuls** *que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.*

Théorème 2.8. *(Séries de Riemann)*
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples : $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (avec les séries de Fourier on peut montrer que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Théorème 2.9. *(Critère de d'Alembert)*
Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n > 0$, si
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, 1[$ *alors $\sum u_n$ converge.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in]1, +\infty[$ *alors $\sum u_n$ diverge.*

Remarque 2.10. *Si $l = 1$ on ne peut rien dire, penser aux séries de Riemann.*
La limite peut ne pas exister par exemple $u_n = \frac{1}{3^n}$ pour n pair et $u_n = \frac{2}{3^n}$ pour n impair.

Exemples :
- $u_n = \frac{n^p}{a^n}$ avec p entier naturel non nul et $a > 1$ réel (ce qui permet aussi d'en déduire que $n^p \underset{+\infty}{\ll} a^n$ puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0)
- $u_n = \frac{x^n}{n!}$ avec $x > 0$ (pour l'instant ...)
- $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+1})^n = 1/e < 1$ (rappel 1^∞ est une forme indéterminée).

Commentaire : si vous donnez le dernier exemple pensez à rejeter un oeil sur la formule de Stirling.

2.3. **Séries à termes quelconques (réels).**

2.3.1. *Séries alternées.*

Définition 2.11. *La série $\sum u_n$ est dite* **alternée** *si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.*

Théorème 2.12. *(Séries alternées)*
Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si l'on note S sa somme alors
$$|S_n - S| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemples : Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ convergent.
Nous pouvons maintenant donner un contre-exemple au théorème de comparaison pour des séries à termes quelconques.

Remarque 2.13. *On pose pour tout entier non nul n, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Alors*
- $u_n \sim v_n$
- $\sum u_n$ *converge*
- $\sum v_n$ *diverge*

Définition 2.14. *La série $\sum u_n$ est dite* **absolument convergente** *si la série $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 2.15. *Si une série numérique est absolument convergente alors elle est convergente.*

Remarque 2.16. *La réciproque est fausse, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.*

Exemple : Pour tout réel x la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.
Commentaire : Ne pas dévier sur les séries entières qui sont hors sujet, on peut quand même savoir que par définition la somme de cette série est e^x et que les propriétés sur les produits de séries absolument convergentes permettent d'obtenir $e^{x+y} = e^x e^y$. Si on suppose déjà connue la fonction exponentielle comme étant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, solution de $f(0) = 1$ et $f' = f$ alors par exemple avec la formule de Taylor avec reste intégral on peut obtenir que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. On peut le trouver sous forme d'exercice dans Analyse de Warusfel et al. ed. Vuibert n° 91 p319.

2.4. **Exercices.** **Exercice 1.** Achille et la tortue (Paradoxe de Zénon)
Achille fait la course avec une tortue (course rectiligne), il lui laisse 100m d'avance. Achille avance à la vitesse V m.s^{-1} et la tortue v m.s^{-1} (bien sûr $v < V$). Lorsqu'Achille arrive au point de départ de la tortue noté T_0, celle-ci aura avancé et sera au point noté T_1, lorsqu'il arrive au point T_1 elle aura encore avancé et sera au point T_2 et ainsi de suite. La tortue ne sera jamais rattrapée.
Nous savons que la tortue sera rattrapée (du moins si l'arrivée est suffisamment loin), déterminer à quelle distance de D Achille rattrape la tortue et la durée de la course jusqu'au point de dépassement. Voir par exemple Hyperbole TES et L (programmes 2012 p36) ed. Nathan, avec $V = 10$ m.s^{-1} et $v = 0.1$ m.s^{-1}.
Les grandes lignes, on note t_n le temps que met Achille pour arriver en T_n (position de la tortue à la n^{ieme} étape), alors

$$t_n - t_{n-1} = \frac{T_{n-1}T_n}{V} \quad T_{n-1}T_n = v(t_{n-1} - t_{n-2}).$$

La suite $(t_n - t_{n-1})$ est géométrique de raison $\frac{v}{V}$ et de premier terme $t_1 - t_0$. Ainsi en sommant les termes

$$t_n = t_0 + (t_1 - t_0)\frac{1-(v/V)^n}{1-v/V} \quad t_1 - t_0 = \frac{v}{V}t_0 \quad t_0 = \frac{100}{V}$$

et a pour limite $\frac{100}{V-v}$ lorsque n tend vers $+\infty$, temps (en secondes) que met Achille pour rattraper la tortue.

Exercice 2. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$
La clé $\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$ égalité que l'on intègre sur $[0,1]$. Devient très dur à poser en terminale car la fonction arctan n'est pas connue ni la formule générale de dérivée des fonctions composées (voir par exemple Analyse de Warusfel et al. ed. Vuibert n° 90 p318 ou Terracher TS ed. Hachette).
Cette somme peut aussi se calculer avec les séries de Fourier.

Exercice 3.
$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$
Même clé : trouver la bonne suite géométrique, voir par exemple les livres ci-dessus.

Exercice 4.
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$
Pour une preuve niveau terminale, toujours les mêmes livres. La clé est de remarquer que la suite $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ est croissante et majorée.
On peut aussi montrer seulement la divergence de la série harmonique (sans obtenir d'équivalent), la connaissance du ln n'est alors pas nécessaire ; voir par exemple Repère TS (programme 2012 p44) ou Déclic TS (programme 2012 p43) ed. Hachette ou encore ci-dessous.

Exercice 5. Une histoire de cubes
Variante de niveau première (ancien programme) : Terracher Analyse 1e S ed. Hachette, on montre que $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ convergent. La divergence de $\sum \frac{1}{n}$ est montrée en utilisant que $\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq 2$, la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ en utilisant que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ (penser à l'interprétation possible de l'inégalité $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ en terme de comparaison aire et intégrale).

Exercice 6. Développement décimal périodique
$0,999999999\ldots = 1$ ou variantes, voir par exemple Terracher Analyse 1e S ou Repère TS (programme 2012 p39) ou Déclic TS (programme 2012 p37) ed. Hachette (rappel : les rationnels sont les réels qui ont des développement décimaux périodiques à partir d'un certain rang, voir par exemple Mathématiques L1 ed. Pearson Education)

3. Développements

Afin de ne pas aller “trop loin” au niveau des résultats donnés sur les séries nous avons suivi de près le livre de BTS Sigma, tome 1, ed. Foucher. Dans ce livre seuls les résultats du paragraphe 2.1 sont démontrés. Ceci est conforme à l'esprit du programme de BTS mais un étudiant présentant le capes de mathématiques ne peut se contenter de savoir faire ces seules démonstrations dans la mesure où les autres utilisent des outils sur les suites du niveau terminale. Les démonstrations de tous les résultats annoncés s'ils ne sont pas demandés comme développement peuvent faire l'objet de questions lors de l'entretien.
Toujours pour rester au plus près du programme de BTS, nous n'avons pas parlé de séries à termes complexes. La définition de série convergente est la même, le module remplace la valeur absolue, même

résultat pour les séries géométriques ainsi que pour l'absolue convergence. Si on en parle on doit aussi remarquer que dans le cas complexe, la convergence de la série $\sum u_n$ équivaut à la convergence des deux séries $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$.
Les démonstrations des résultats données dans le plan peuvent se trouver dans n'importe quel ouvrage de L2 traitant des séries. Nous allons donner les points clés de certaines d'entre-elles. Pour les démonstrations détaillées voir par exemple Matématiques L2 ed. Pearson Education ou le Précis de Bréal "Analyse MP".

Les grandes lignes :

Premier théorème de comparaison : Lorsqu'une série est à termes positifs alors la suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante. Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

Deuxième théorème de comparaison : Si $u_n \sim v_n$ alors il existe $C > 0$, $c > 0$ et un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $cu_n \leq v_n \leq Cu_n$ puis on applique le premier théorème de comparaison.
Remarque : ce type de résultat s'accompagne classiquement d'un complément qui est l'équivalence des restes dans le cas de convergence et équivalence des sommes partielles dans le cas de divergence. Il n'a pas été indiqué dans le plan car plus "pointu", y jeter un oeil tout de même si on maitrise bien tout le reste.

Séries de Riemann : divergence grossière si $\alpha \leq 0$ car alors le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0. Pour $\alpha > 0$, on note $u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ alors $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$ et on applique le théorème de comparaison en remarquant que $\sum_{k=1}^n u_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$. On calcule cette intégrale puis sa limite (penser à distinguer la cas $\alpha = 1$).
Remarque : Ce résultat est un cas particulier du théorème de comparaison série $\sum f(n)$ et intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\, dt$ lorsque f est continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Critère de d'Alembert : Comparaison à une suite géometrique de raison $q = \frac{l+1}{2}$, $0 < q < 1$ lorsque $l < 1$ et $q > 1$ lorsque $l > 1$.
Remarque : Nous n'avons pas mis le critère de Cauchy qui n'est pas au programme des BTS, savoir tout de même que si la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge et a pour limite l alors la suite $\sqrt[n]{u_n}$ converge aussi et a même limite. La réciproque est fausse, la suite donnée pour montrer que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ n'a pas nécessairement de limite convient.

Séries alternées : Joli exemple d'utilisation du théorème des suites adjacentes qu'il faudra au préalable détailler puisqu'il ne fait plus partie du programme de terminale (mais se démontre aisément avec les résultats sur les suites croissantes et majorées (resp. décroissantes et minorées). Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent et ont la même limite notée S. Ce qui permet d'en déduire que la série $\sum u_n$ converge et que $|S_{2n} - S| \leq |S_{2n} - S_{2n+1}| = |u_{n+1}|$ et $|S_{2n+1} - S| \leq |S_{2n+1} - S_{2n+2}| = |u_{n+2}|$.

Absolue convergence.
Une première démonstration valable uniquement pour les suites à valeurs réelles.
On pose $v_n = |u_n| - u_n$, on a alors $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$ et avec le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge. $u_n = |u_n| - v_n$, les séries de termes généraux $|u_n|$ et v_n convergent donc la série de terme général u_n converge.
Une démonstration valable dans tout espace de Banach (piqure de rappel avant l'écrit) : On note $w_n = |u_n|$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n w_k$. La suite (T_n) converge donc elle est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ :\ \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N},\ |T_{n+p} - T_n| \leq \varepsilon$$

or

$$|S_{n+p} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k = T_{n+p} - T_n$$

donc la suite (S_n) est de Cauchy et elle converge car $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ si on a parlé du cas complexe) est complet.