55 - EXEMPLES D'UTILISATION DU TABLEUR.

CHANTAL MENINI

1. Un plan possible

Les exemples qui vont suivre sont des pistes possibles et en aucun cas une présentation exhaustive. De même je n'ai pas fait une étude systématique des ouvrages du secondaire et STS, il est donc très probable qu'il y ait des références plus pertinentes que celles données. C'est un appui pour construire votre propre leçon.
Pour la construire, si possible varier les domaines mathématiques et niveaux d'enseignement, ainsi que les types d'utilisations du tableur.
Tous les exemples présentés ici sont sur tableur Libre Office, on peut bien sûr aussi utiliser le tableur de Geogebra ou XCas.

2. Traitement de données - Statistique

Niveau : quatrième (source Transmath)
Intérêt : sensibilisation au type de représentation
A partir du fichier Nathan_C8_tachecomplexe_Precipitation.ods donner deux graphiques, le premier permettant d'accréditer l'opinion que les précipitations ont peu varié en 100 ans, le second qu'elles ont beaucoup varié en 100 ans.
On peut varier sur ce thème, montrer aussi que certaines représentations sont plus "lisibles" que d'autres, on utilise l'assistant graphique. On peut regrouper par classes (utiliser la fonction **SOMME**), **changer de type de diagramme**, **changer d'échelle** (double-clic sur le diagramme pour avoir un tour gris puis clic droit sur l'axe dont on veut changer l'échelle).
voir le fichier Precipitation.ods

Niveau : fin collège, lycée (source IREM Pays de Loire)
Intérêt : introduction des indices, travail sur la proportion et les pourcentages
Fichier : PopulationCorrige.ods

(1) On commencera par remarquer la difficulté de représentation des données brutes sur un même graphiques (en raison de l'importante différence d'effectifs).
(2) On introduira les indices pour chaque population, l'année de référence (indice 100) étant l'année 1851, les indices des autres années étant calculés proportionnellement à leur population. Puis on représentera sur un même graphique l'évolution des indices. Pour cela il sera nécessaire de créer de **nouvelles colonnes**, d'utiliser **l'adressage absolu** et **l'assistant diagramme**.
(3) On pourra utiliser ce travail pour répondre aux questions :
   – Quels sont les pourcentages d'augmentation ou de diminution de 1851 à 1872 pour la population de France, de Corrèze et de Loire-Atlantique ?
   – Quels sont les pourcentages d'augmentation ou de diminution de 1968 à 1982 pour la population de France, de Corrèze et de Loire-Atlantique ?

Niveau : BTS
Intérêt : Ajustement affine par la méthode des moindres carrés, application à un test empirique de normalité avec la droite de Henry
Fichier : droite Henry.ods
Source : TP p347 Indice TS, éditeur Bordas.
Les grandes lignes de la *démarche empirique* sont les suivantes. On dispose de données sous formes de classes et d'effectifs, l'histogramme de la série "fait penser à un histogramme pour une loi normale". Si on appelle X la variable aléatoire pour laquelle les valeurs observées sont des réalisations alors on est

Date: 20 mars 2015.

conduit à penser qu'elle suit une loi $N(\mu, \sigma^2)$ et on cherche à déterminer les paramètres μ et σ à l'aide d'un ajustement affine.
Pour cela on note pour i compris entre 1 et n, la classe $[a_{i-1}, a_i[$ et F_i l'effectif cumulé de cette classe.
Avec notre hypothèse de travail

$$P(X \leq a_i) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a_i-\mu}{\sigma}\right) \simeq F_i.$$

Si l'on note q_i le quantile défini par $P(Z \leq q_i) = F_i$ avec Z variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$ alors si la loi de X est "proche" (là encore de façon complètement empirique) d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$ le nuage de points de coordonnées (a_i, q_i) $(1 \leq i \leq n)$ doit avoir une forme allongée puisque $q_i \simeq \frac{a_i-\mu}{\sigma}$.
On fait un ajustement affine selon les moindres carrés de Y en X pour la série $(a_i, q_i)_{1\leq i\leq n}$, on obtient la droite d'équation $y = ax + b$, on estimera alors que $\frac{1}{\sigma} \simeq a$ et $-\frac{\mu}{\sigma} \simeq b$.

3. Outil de simulation

Les exemples sont nombreux, en voici deux possibles que l'on peut pousser plus ou moins loin.
Niveau : troisième - seconde
Le premier fichier : des.ods
simule la modélisation de l'expérience aléatoire :
Henri et Louis lancent tous les deux un dé équilibré numéroté de 1 à 6, Louis gagne s'il obtient un nombre strictement supérieur à celui de Henri.
et illustre la convergence des fréquences vers la probabilité de réalisation de l'événement.

(1) A l'aide du tableur faire 2000 simulations de la modélisation d'une partie, pour cela on pourra utiliser la fonction **ALEA.ENTRE.BORNES**.
(2) Créer une nouvelle colonne avec la valeur 1 si Louis gagne et 0 sinon, on pourra utiliser la fonction **SI**.
(3) Compter le nombre de parties gagnées par Louis pour n parties jouées (n variant de 1 à 2000), on pourra utiliser la fonction **SOMME** et **l'adressage absolu**.
(4) Représenter sur un diagramme les points ayant pour abscisse le nombre n de parties jouées et pour ordonnée la fréquence de victoire de Louis pour ces n parties.
(5) Que mettez-vous ainsi en évidence ? Recommencer la simulation en appuyant sur **Ctrl + Maj + F9**.
(6) Prolongement possible : Quelle est la probabilité que Louis gagne lors d'une partie ?

Le deuxième fichier : LievreTortue.ods
simule la modélisation de l'expérience aléatoire : *A chaque tour, on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Si le 6 sort alors le lievre gagne la partie, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle a avancé 6 fois.*

(1) A l'aide du tableur simuler une modélisation d'une partie en faisant afficher lievre si c'est celui-ci qui gagne et sinon tortue. Pour cela on pourra utiliser les fonctions **ALEA.ENTRE.BORNES**, **SI** et **NB.SI**.
(2) Simuler 1000 parties puis faire un tableau avec la fréquence de victoire du lievre et de la tortue lors de 10, 100 et 1000 parties. Pour cela on pourra utiliser la fonction **NB.SI**.
(3) Avec le formatage conditionnel appliqué à la colonne (ou ligne) où s'affichent le nom du vainqueur de chaque partie, on peut mettre un fond rouge lorsque la tortue gagne et un fond vert lorsque c'est le lievre.
(4) Prolongement possible : Sur 5 feuilles différentes faire 5 simulations identiques à la première et rassembler les valeurs prises par les fréquences pour (10,100 et 1000 expériences) afin d'illustrer la fluctuation d'échantillonnage (Ctrl+Shift+F9).
(5) On peut terminer par le calcul la probabilité de victoire du lievre et de la tortue lors d'une partie.

Niveau : Terminale
Intérêt : Estimation d'une probabilité que l'on croit souvent beaucoup plus petite par intervalle de confiance.

fichier : anniversaires.ods
Le problème : dans une classe de 32 élèves prise au hasard quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour ? Pour modéliser on supposera que toutes les années ont 365 jours et qu'il y a équiprobabilité des naissances chacun de ces jours.
Ce problème peut donner lieu à une prise de décision (on a demandé aux élèves de proposer une probabilité et on décide avec par exemple l'échantillon des classes du lycée si l'on a des éléments pour écarter cette hypothèse ou pas -feuille 2 du tableur avec la binomiale pour déterminer un intervalle de fluctuation lorsqu'on a un échantillon de taille $n = 19$-).
Ensuite on cherche à estimer cette probabilité inconnue (voir feuille 1 du tableur) avec l'intervalle de confiance $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.
La commande utilisée pour déterminer s'il y a ou pas 2 "naissances" le même jour est MODE(*plage de cellules*) : renvoie la valeur qui apparaît le plus souvent dans la plage de données, s'il existe plusieurs valeurs avec la même fréquence, la plus petite est renvoyée. Une erreur se produit lorsqu'aucune valeur n'apparaît au moins deux fois, il est alors affiché "# VALEUR ! ".
Un prolongement possible puisque l'on a un tableur à notre disposition est le calcul de la valeur de la probabilité cherchée (feuille 3) : difficile en terminale car la dénombrement n'est plus du tout vu.

Niveau : terminale
Intérêt : simulation de sondage, illustration d'un résultat de cours
Fichier : sondagebis.ods
Source : Math'x TS
On a fait une feuille de calcul simulant 100 sondages aléatoires de taille 1000 le jour de l'élection de Barack Obama en 2008, où la proportion d'opinions favorables dans la population est égale à $p = 0.55$. De plus pour chaque sondage simulé, fournissant une fréquence d'opinions favorables f, on représente l'intervalle de confiance au niveau 0.95 : $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

(1) En B30 écrire "sondage 1", en A31 écrire "tirage 1" et en B31 entrer une formule permettant d'avoir la valeur 1 avec une probabilité de 0.55 et 0 sinon (on pourra utiliser les fonctions **ENT, ALEA** ou **SI**). Tirer vers le bas afin d'avoir 1000 tirages puis tirer vers la droite afin d'avoir 100 sondages de taille 1000.
(2) Sur le haut de la feuille faire un tableau donnant pour chaque sondage la fréquence d'opinions favorables, la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle de confiance. Faire un test permettant d'afficher "NON" si l'intervalle de confiance ne contient pas 0.55.
(3) Faire un diagramme avec les points d'abscisse le numéro du sondage et d'ordonnée la fréquence d'opinion favorables. Une fois le diagramme affiché lorsque les bords sont grisés faire un clic droit sur l'un des points puis **"afficher les barres d'erreur"**. Sélectionner alors "positif et négatif" puis valeur constante (valeur égale ici à $\frac{1}{\sqrt{1000}}$).
(4) Combien comptez-vous d'intervalles qui ne contiennent pas 0.55, est-ce normal ?
(5) Prolongement de niveau BTS : Est-il possible d'avoir deux intervalles disjoints ? Comment pourriez-vous estimer la probabilité de cet événement ?

4. Outil d'investigation

Niveau : Troisième - Seconde
Intérêt : travail algébrique et graphique sur les fonctions, conjecture d'un maximum
Fichier : ZoneBaignade.ods
Un grand classique : la zone de baignade, énoncé trouvé sous la forme ci-dessous dans le Transmath 4e. Il pourra être l'occasion de donner un exemple de fonction autre que affine en troisième, de travailler sur les différents types de représentation, et conjecturer la valeur de l'aire maximale en affinant le balayage. En seconde la conjecture pourra être démontrée en utilisant l'axe de symétrie de la parabole.
Enoncé : *Tony est maître nageur sur la plage de Carnon dans le département de l'Hérault. Il dispose de 150 m de lignes d'eau pour délimiter une zone de baignade rectangulaire. Il attend vos conseils pour que la zone de baignade ait une aire la plus grande possible.*

Troisième - Première
Intérêt : travail algébrique et graphique sur les fonctions, conjecture d'un maximum

Fichier : Boitesanscouvercle.ods
D'après IREM Pays de Loire, mais c'est un autre grand classique et il se trouve dans de nombreux ouvrages (on pourra aussi trouver une analyse de cette activité en partant d'une feuille carrée dans la brochure "Les fonctions" IREM d'Aquitaine).
Ici la lecture graphique ou le tableur pour estimer la valeur maximale de V_1 sont indispensables tant que l'on n'a pas la dérivation.
Enoncé : *On dispose d'une feuille de de dimensions 24 cm sur 16 cm, à chaque angle on découpe un carré puis on plie la feuille de façon à avoir une boite sans couvercle. Que dire du volume de la boite sans couvercle ainsi construite ?*
Avec 3 des 4 carrés découpés on construit un nouvelle boite de base l'un des carrés et de côtés les carrés coupés en deux, étudier son volume.

(1) Donner une piste de recherche à l'aide du tableur. On pourra aussi faire apparaitre les graphes de deux fonctions.
(2) Prolongement : trouver le volume maximal possible pour la première boite construite."

Niveau : première
Intérêt : modes de génération d'une suite, courbe de tendance, conjecture
Source : d'après document ressource "Analyse"
Fichier : Pies.ods
Partie A : essais de modélisation.
Un groupe de biologistes a relevé pendant quatre ans, le premier janvier de chaque année depuis 2000, le nombre de pies vivant sur une île d'une superficie de 60 km^2.
Il a obtenu les résultats suivants

Année	Population
2000	300
2001	270
2002	243
2003	220

Les mesures ont été stoppées pendant quelques années, puis ont repris en 2010. On comptait 105 pies sur l'île le premier janvier 2010.

(1) Entrer les données dans une feuille de calcul.
(2) Proposer une modélisation de la situation à l'aide d'une suite (p_n).
(3) En utilisant ce modèle, quel serait la population en 2010 ?
(4) Peut-on valider cette modélisation ?

Partie B : Premier modèle les biologistes n'interviennent pas.
Les biologistes ont admis que le nombre d'oiseaux diminuait de 10% chaque année, à cause des prédateurs et de la régulation des naissances et des décès.

(1) Quelle est dans ce cas la nature de la suite (p_n) ?
(2) Comment évolue la population de pies ?
(3) En quelle année la population disparaît-elle de l'île si la situation perdure ?

Partie C : Deuxième modèle les biologistes interviennent.
Pour tenter de modifier la situation, les biologistes décident d'installer un nombre a d'oiseaux de cette espèce le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010. Ils estiment que le risque d'extinction est évité si la population se stabilise autour de 200 oiseaux sur l'île.

(1) Regarder l'évolution de la population en prenant $a = 5$ puis $a = 10$, $a = 20$ et $a = 30$.
(2) Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour éviter l'extinction ?
(3) Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années sa valeur de l'an 2000 ?

Pour répondre aux questions de la partie A on pourra faire un graphique et introduire une **courbe de tendance**, pour cela lorsque le contour du graphique est grisé faire un clic droit sur l'un des points du graphique et sélectionner *introduire une courbe de tendance*.

Répondre aux questions des parties B et C en créant deux nouvelles listes donnant les termes de la suite. Pour la partie C, dans une cellule mettre la valeur de a et puis la modifier en fonction de ce qui est demandé, penser à utiliser **l'adressage absolu $**.
Prolongement : donner l'expression du terme général de la suite lorsqu'il n'y a pas intervention des biologistes et lorsqu'il y a intervention des biologistes (elle dépendra alors du paramètre a).

Niveau : première-terminale
Intérêt : suite donnée par une relation de récurrence pour laquelle on va conjecturer l'expression de son terme général en fonction de n.
Source : brochure IREM Paris VII
Fichier : suiterecurrente.ods
On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

(1) En utilisant un tableur (ou une calculatrice) calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?
(2) n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connait la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1}. Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

    A l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.

    Démontrer cette formule.

5. Outil de calcul

5.1. **En analyse. Niveau : Première** Comparaison placements à intérêt simples, composés, avec apport régulier (voir leçon suites arithmétiques et géométriques)
Niveau : Première-Terminale
Intérêt : Recherche d'une solution approchée d'une équation par balayage
Source : Math'X TS p57 (encore un grand classique)
Fichier : BilleCylindre.ods
Enoncé tel qu'on le trouve dans l'ouvrage cité :
On considère un cylindre de rayon intérieur 10 cm et de hauteur intérieure 20 cm. Il contient de l'eau sur une hauteur de 4 cm.
On place une boule au fond du récipient et on constate que l'eau recouvre exactement la boule (la boule, de densité plus grande, ne flotte pas).
Déterminer, à 0,1 mm près, le rayon de la boule.
Avec le tableur et le balayage nous trouvons $r \simeq 2,05$ cm (feuille 1). Le théorème des valeurs intermédiaires permet de justifier l'existence de la solution, la stricte monotonie sur un intervalle bien choisi permet de justifier l'unicité.
A noter que si l'on fait varier le rayon intérieur du cylindre (feuille 2) on peut avoir deux solutions à ce problème. Penser tout de même à modifier si nécessaire la hauteur du cylindre pour que l'eau ne déborde pas lorsqu'on met la bille.

5.2. **En arithmétique. Niveau : troisième**
Intérêt : calcul de pgcd par différences successives puis par divisions euclidiennes successives, application à la résolution d'un problème
Fichier : pgcd.ods
Sur le tableur, écrire l'algorithme de calcul du pgcd par soustraction successives ainsi que par divisions euclidiennes successives.
On pourra utiliser les fonctions **MIN**, **MAX** ou **MOD**.
Source : Phare 3^e
On veut remplir intégralement (sans vide) un récipient de forme parallélépipède rectangle de dimensions en millimètres 448x364x280 par des cubes dont les longueurs d'arêtes sont de dimension en nombre entier de millimètres. Quelle est le plus grande longueur d'arête possible ? Quel est alors le nombre de cubes mis dans le récipient ?

Niveau : Terminale S spé Maths
Intérêt : codage, décodage avec le tableur
Fichiers : Chiffrement.ods
Chiffrements de César et Affine, Indice TS ou math'x TS

(1) Dans le chiffrement de Jules César, chaque lettre est remplacée par la lettre qui la suit trois rangs plus loin dans l'alphabet, les trois dernières lettres étant remplacées, par permutation circulaire, par les trois premières lettres de l'alphabet. Que devient le mot EGYPTE une fois crypté ?

(2) Chaque lettre, en majuscule, est remplacée par son rang entre 0 et 25 dans l'alphabet, les autres signes (espaces, trait d'union,etc.) sont supprimés. On note x le rang de la lettre en clair, $0 \leq x \leq 25$.Le rang $r(x)$ de la lettre chiffrée est alors le reste de la division euclidienne de $ax + b$ par 26. Le couple (a, b) est appelé clé du codage.

On va automatiser la codage à l'aide du tableur, pour cela on aura besoin de deux fonctions
CODE() qui fournit le code ASCII de la lettre écrite, par exemple CODE(A) fournit 65
CAR() qui donne la lettre associée à un code ASCII, ainsi CAR(65) donne A.
La fonction **MOD()** aussi sera bien utile.

(1) Automatiser dans le cas du chiffrement de César, prévoir de pouvoir modifier le décalage. Faire une ligne avec le texte en clair, en dessous le calcul du rang de chaque lettre, en dessous le rang après chiffrement et pour dernière ligne le texte chiffré. Quelles fonctions rentrer pour avoir le rang de A égal à 0 ?

    Tester avec le mot EGYPTE.

(2) Même travail pour le chiffrement affine, prévoir de pouvoir modifier a et b.

    Tester sur le mot CESAR et différentes valeurs de a et b.

(3) Prolongement : Pour $a = 2$ et $b = 7$ que constatez-vous ? Expliquer pourquoi il y a non injectivité de l'application qui à x associe $r(x)$ pour ce choix de a et b.

Chiffrement de Hill, math'x TS, Document ressources Mathématiques série S enseignement de spécialité
On choisit quatre entiers,a, b, c et d constituant la clé du chiffrement.
Les lettres de l'alphabet sont codées de 0 à 25. A un bloc de deux lettres correspond donc un couple (x, y) d'entiers compris entre 0 et 25. On calcule les codes du message chiffré en associant au couple (x, y) le couple (x', y') tel que

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

On calcule les restes de x' et y' dans la division euclidienne par 26 et on leur associe un bloc de deux lettres.

- Faire ce travail sur tableur, on doit pouvoir modifier la clé.
- Tester pour le mot ETUDIER (que l'on complètera à la fin avec une lettre arbitraire pour avoir des blocs de 2 lettres) avec la clé $a = -5$, $b = 8$, $c = -2$ et $d = 3$ puis avec la clé $a = 6$, $b = 7$, $c = -8$ et $d = 5$.
- Prolongement : Comment feriez-vous pour décoder, cela est-il toujours possible ?