Description mathématique d'une expérience aléatoire : événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).

Chantal Menini

7 mai 2009

1 Introduction.

Qu'est ce qu'une *expérience aléatoire* ? C'est une expérience dont l'issu (le résultat) n'est pas certain (par exemple nombre qui apparait lorsque l'on jette un dé, résultat d'une mesure où l'aléatoire provient des erreurs de mesures, etc...). On va donc chercher à donner un *modèle mathématique* pour cette expérience qui prendra en compte l'ensemble des issus possibles (en fonction de ce que l'on veut observer) et la *probabilité* d'obtention d'une issue. Comment est déterminée cette probabilité ? Nous le verrons plus loin, c'est une application qui doit vérifier des propriétés bien précises, le choix de la probabilité fait partie du choix du modèle.

2 Evénements.

Définition 2.1 *Lors d'une expérience aléatoire, on appelle* ***univers*** *l'ensemble des issus possibles de cette expérience. On appelle* ***événement élémentaire*** *tout élément de l'univers et* ***événement*** *toute partie de l'univers.*

Exemple 1 : Pour l'expérience : on jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et l'on observe le numéro obtenu on modélisera en prenant pour univers $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, l'événement "obtenir 3" est l'événement élémentaire $\{3\}$, l'événement "obtenir un nombre pair" est l'événement $\{2, 4, 6\}$.
Exemple 2 : Pour l'expérience : on jette deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6 (l'un est rouge et l'autre est bleu) et l'on observe les numéros obtenus on modélisera en prenant pour univers $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$; maintenant si l'on observe la somme obtenue après le jet de ces deux dés on modélisera en prenant pour univers $\Omega = \{2, \dots, 12\}$.
Exemple 3 : Si l'on reprend l'exemple évoqué en introduction d'erreur de mesure alors l'univers sera par exemple pour un pèse-personne l'intervalle $[-100, 100]$ ce qui ne rentre pas dans le cadre de cette leçon car non fini.
Dans toute la suite de la leçon nous supposerons l'univers fini.
Tableau de correspondances probabilistes et ensemblistes, l'univers est noté Ω.

Vocabulaire des événements	**Propriété ensembliste**
Evénement élémentaire $\{\omega\}$	$\omega \in \Omega$
Evénement A	$A \subset \Omega$
Evénement certain	Ω
Evénement impossible	$\emptyset$
Evénement contraire de A (noté $\overline{A}$)	$\Omega \backslash A$
A implique B	$A \subset B$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A est réalisé	$\omega \in A$

3 Probabilité.

3.1 Définition et propriétés.

Définition 3.1 *Soit Ω un ensemble fini non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. On appelle* ***probabilité*** *sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant*

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $\forall A,\ B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tels que* $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé ***espace probabilisé****.*

Proposition 3.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors*

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
3. P *à valeurs dans* $[0, 1]$,
4. *Si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$ *et* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Preuve.

1. $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ d'où $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$.
2. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ d'où $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.
3. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ et $P(\overline{A}) \geq 0$ donc $P(A) \leq 1$.
4. $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ d'où $P(B) = P((B \setminus A) \cup A) = P(B \setminus A) + P(A)$ et $P(B \setminus A) \geq 0$.
5. $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ d'où $P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$. □

Proposition 3.3 ***Formule de Poincaré.***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soit $N \geq 2$, pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{N-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_N).$$

Preuve. Nous avons montré cette assertion pour $N = 2$ dans la proposition précédente, on la montre pour tout entier $N \geq 2$ par récurrence sur N (pas de difficulté particulière mais un peu embêtant à écrire). On peut aussi donner une démonstration faisant intervenir un calcul d'espérances de variables aléatoires, nous l'avons indiqué dans les commentaires car il ne rentre pas dans le cadre de la leçon. □

Corrolaire 3.4 ***Formule de Poincaré simplifiée.***
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $N \geq 2$. Si pour toute suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\},\ \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N,\ P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = p_k$$

alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \binom{N}{k} p_k.$$

3.2 Probabilité et dénombrement.

Proposition 3.5 *Soient $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et n réels positifs p_1,..., p_n tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout entier i compris entre 1 et n.*

Preuve. Soit A un événement alors nécessairement (en appliquant l'axiome (ii) de la définition 3.1) nous avons $P(A) = \sum\limits_{\substack{i\,/\\ \omega_i \in A}} p_i$, d'où l'unicité de P en cas d'exitence.

Il reste à vérifier que l'application P définie ci-dessus est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Elle est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs positives. $P(\Omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ et clairement $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Remarque 3.6 *Nous dirons que la donnée des p_i comme dans la proposition précédente défini une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

Définition 3.7 *P est appelée **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Proposition 3.8 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé avec P la probabilité uniforme. Alors pour tout événement A*

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Preuve. Si $\mathrm{card}(\Omega) = n$ alors pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = p$ avec $1 = \sum_{\omega \in \Omega} p = np$, d'où $P(\{\omega\}) = 1/n$ et $P(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. $\square$

Exemple : Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, l'application P_1 définie par $P_1(\{1\}) = 1$ et $P_1(\{i\}) = 0$ pour $i \in \{2, \ldots, 6\}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. La probabilité uniforme P_2 est telle que $P_2(\{i\}) = 1/6$ pour $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

Exercice : Pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est telle que la probabilité des nombres pairs est le double de la probabilité des nombres impairs, trouver P.

4 Evénements indépendants et espace produit.

Définition 4.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, les événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dits **indépendants dans leur ensemble** si pour tout entier k compris entre 2 et n*

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \ldots \times P(A_{i_k})$$

avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Remarque 4.2 *Des événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.*
L'indépendance dans leur ensemble de N événements implique l'indépendance deux à deux de ces événements mais la réciproque est fausse. Un contre-exemple classique est : on lance deux pieces de monnaies discernables, équilibrées et ce de façon indépendante, on considère les trois événements $A =$"on obtient pile sur la première piece", $B =$"on obtient face sur la deuxième piece" et $C =$"les deux pieces tombent du même coté". Alors A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble (cf. $A \cap B \cap C = \emptyset$).

Proposition 4.3 *Etant donnés N espaces probabilisés $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i)$ et $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$ l'espace produit, il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout A_i événement de Ω_i*
- *$P(\Omega_1 \times \cdots \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \Omega_N) = P_i(A_i)$,*
- *les événements $(\Omega_1 \times \cdots \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \Omega_N)_{1 \leq i \leq N}$ soient indépendants dans leur ensemble.*

Elle est définie par $P(A_1 \times \cdots \times A_N) = P_1(A_1) \times \cdots \times P_N(A_N)$.

Définition 4.4 *La probabilité P définie dans la proposition précédente est appellée **probabilité produit**.*

Preuve. L'expression de $P(A_1 \times \cdots \times A_N)$ résulte du fait que $(A_1 \times \cdots \times A_N) = \bigcap\limits_{1 \leq i \leq N} \Omega_1 \times \cdots \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \Omega_N$ et de l'hypothèse d'indépendance. D'où l'unicité en cas d'existence.
Réciproquement l'application P définie ci-dessus est positive et
$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \prod_{1 \leq i \leq N} \sum_{\omega_i \in \Omega_i} P_i(\{\omega_i\}) = 1$, elle définit donc une unique probabilité sur Ω et un même type de calcul nous donne $P(A_1 \times \cdots \times A_N) = P_1(A_1) \times \cdots \times P_N(A_N)$. Elle vérifie alors clairement les deux assertions de la proposition. $\square$

Remarque 4.5 *Si pour tout i, P_i est la probablité uniforme sur Ω_i alors la probabilité produit est la probabilité uniforme sur $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$.*

Exemple. N lancés successifs et indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée sera modélisé par $\Omega = \{P, F\}^N$ et la probabilité d'un événement élémentaire est $\left(\frac{1}{2}\right)^N$.

5 Des exemples classiques.

1. Probabilité d'obtenir une certaine main dans un jeu de cartes, les exemples précédents avec les dés (la probabilité d'obtenir une certaine somme en lançant deux dés nous donne un exemple de probablité non uniforme), etc ...
2. Les anniversaires.
   Dans un classe de N élèves qu'elle est la probabilité que deux élèves, au moins, fêtent leur anniversaire le même jour (ils sont nés la même année et ce n'est pas une année bissextile).
   Sans plus de renseignement pour modéliser nous allons aussi faire l'hypothèse que les naissances se répartissent de façon uniforme sur une année. L'univers sera alors $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^N$ et la probabilité P la probabilité uniforme. Nous allons calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A_N}$,
   $$P(\overline{A_N}) = \frac{\text{card}(\overline{A_N})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - N + 1)}{365^N}.$$
   On obtient par exemple $P(A_{22}) \simeq 0.48$, $P(A_{23}) \simeq 0.51$ et $P(A_{30}) \simeq 0.71$.
3. Distance la plus probable.
   On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour r compris entre 1 et $n-1$, trouver la probabilité que deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r-1$ personnes).
   On modélise en prenant pour univers Ω l'ensemble des files d'attente possibles, soit, l'ensemble des n-uplets sans répétition possibles, $\text{card}(\Omega) = n!$. Les numéros d'ordre étant attribués au hasard, on prend à nouveau pour P la probabilité uniforme et en notant B_r l'événement "les amis sont distants de r places nous obtenons
   $$P(B_r) = 2\frac{n-r}{n!} \times (n-2)! = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}.$$
   On remarquera que contrairement à ce que l'on peut dire intuitivement, la distance la plus probable est la distance 1 (les amis se suivent).
4. Les rencontres.
   n personnes déposent leur parapluie à l'entrée d'un restaurant. En partant, chacune récupère un parapluie au hasard, qu'elle est la probabilité qu'aucune d'entre elle ne reparte avec son parapluie ?
   On modélise avec pour univers Ω l'ensembles des suites possibles de parapluies, soit, l'ensemble des n-uplets sans répétition possibles, $\text{card}(\Omega) = n!$. Les parapluies sont pris au hasard, P est la probabilité uniforme. On note $A_i =$"la i^e personne récupère son parapluie" et $C =$"aucune personne ne repart avec son parapluie", alors
   $$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$
   Ce résultat est obtenu à l'aide de la formule de Poincaré simplifiée puisque pour tout $1 \leq k \leq n$, $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.
5. Problème du chevalier de Méré. Est-il plus avantageux, lorsqu'on joue aux dés, de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ou bien sur l'apparition d'au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?
   Tout d'abord pourquoi 24 ? Lorsque l'on lance un dé on a 6 issues possibles et lorsque l'on lance deux dés on

a 36=6x6 issues possibles, 24=6x4.
On modélise ce problème dans le premier cas en prenant pour univers $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}^4$ et la probabilité uniforme sur Ω_1. Ainsi la probabilité de ne pas avoir de 6 lors des 4 lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ et la probabilité d'avoir au moins un 6 est $p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.5177$.
Dans le second cas, on le modélise en prenant pour univers $\Omega_2 = (\{1,2,3,4,5,6\}^2)^{24}$ et la probabilité uniforme sur Ω_2. Ainsi la probabilité de ne pas avoir de double 6 lors des 24 lancers est $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ et la probabilité d'avoir au moins un double 6 est $p_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$. Le premier jeu est plus avantageux que le second et il n'y a pas de principe "d'homotéthie".

6 Commentaires.

- Il ne semble pas indispensable de parler d'espace produit dans cette leçon, il est tout de même bon d'avoir compris que l'indépendance d'épreuves successives conduit à une modélisation avec la probabilité produit.
- Une preuve de la formule de Poincaré avec les espérances. Avec les notations de la proposition, pour tout événement B on introduit les variables aléatoires $\mathbf{1}_B$ valant 1 si ω appartient à B et 0 sinon (c'est la fonction indicatrice de l'ensemble B). Alors $E(\mathbf{1}_B) = P(B)$ et $\mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}} = \mathbf{1}_{A_{i_1}} \times \cdots \times \mathbf{1}_{A_{i_k}}$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup \ldots \cup A_N) &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_N}) \\
&= 1 - E\big((1-\mathbf{1}_{A_1})\ldots(1-\mathbf{1}_{A_N})\big) \\
&= 1 - E\big(1 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\ldots\mathbf{1}_{A_{i_k}}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N}(-1)^{(k-1)} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le N} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}).
\end{aligned}$$

7 Quelques références.

Ouvrard J-Y., *Probabilités 1 - Capes Agrégation*, Cassini.
Isaac R., *Une initiation aux probabilités*, Vuibert.
www.bibmath.net/dico/