# Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.

Chantal Menini

12 juin 2008

*Dans tout l'exposé lorsque nous parlerons de triangle, il est sous-entendu que le triangle est non aplati.*

## 1 Relations métriques dans un triangle rectangle (niveau collège).

*Nous supposons connus la notion d'angle géométrique, les symétries centrale et orthogonale et leurs propriétés, le théorème de Thales (facultatif voir à la fin), la caratérisation des parallélogrammes et des rectangles.*

### 1.1 Définition et premières relations.

**Définition 1.1** *Un triangle $ABC$ est* ***rectangle*** *en $A$ si l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est droit. Le coté opposé $[BC]$ est appelé* ***hypothénuse****.*
*Un triangle est* ***rectangle*** *s'il est rectangle en l'un de ses sommets.*

**Proposition 1.2** *Les deux angles d'un triangle rectangle qui ne sont pas droit sont complémentaires.*

**Preuve.** La somme des angles d'un triangle est l'angle plat. □

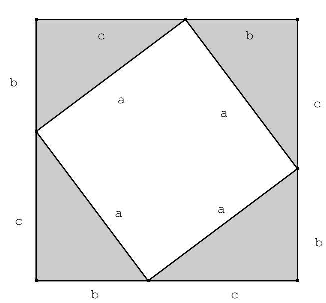
**Théorème 1.3** *Soient $ABC$ un triangle et $I$ le milieu de $[BC]$ alors, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $IA = IB = IC$.*

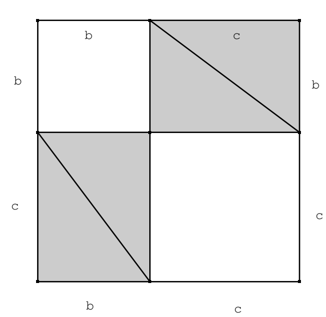
**Preuve.** Soit $A'$ le symétrique de $A$ par la symétrie centrale de centre $I$. Par construction le quadrilatère $ABA'C$ est un parallélogramme.
$ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $ABA'C$ est un rectangle (parallélogramme ayant un angle droit) soit si et seulement si ses diagonales sont de même longueur. □

**Corrolaire 1.4** *Un triangle $ABC$ est* ***rectangle*** *en $A$ si et seulement si $A$ est sur le cercle de diamètre $[BC]$ privé des points $B$ et $C$.*

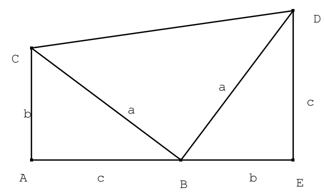
**Théorème 1.5** *(Théorème de Pythagore) Un triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $AB^2+AC^2 = BC^2$.*

**Preuve.** Montrons que $ABC$ est rectangle en $A$ implique $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Notons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.




Les figures parlent d'elles mêmes ; il reste juste à justifier que dans la figure de gauche le quadrialtère de coté $a$ est bien un carré, ceci résulte du fait que dans un triangle rectangle les deux angles qui ne sont pas droits sont complémentaires.
Une autre démonstration classique consiste à calculer l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze ci-dessous de deux manières différentes




en utilisant la formule somme des bases fois hauteur divisée par 2 soit ici $\mathcal{A} = (b+c) \times \frac{b+c}{2}$ puis en utilisant que c'est aussi la somme des aires des trois triangles $ABC$, $BED$ et $BDC$ qui valent respectivement $\frac{b+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ et $a^2/2$. Il faut justifier le calcul de l'aire de $BDC$, il résulte du fait que le triangle $BDC$ est rectangle en $B$ car les angles $\widehat{EBD}$ et $\widehat{CBA}$ sont complémentaires.
Pour montrer la réciproque nous introduisons un demi-cercle de diamètre $[BC]$. Nous notons $D$ le point de ce demi cercle tel que $CD = CA$. Grâce au théorème précédent $BCD$ est rectangle en $D$ et avec la partie directe du théorème de Pythagore $BD^2 + CD^2 = BC^2$, dont on déduit avec l'hypothèse $AB^2 + AC^2 = BC^2$ que $AB = BD$. Si $A = D$ c'est terminé, sinon $B$ et $C$ sont sur la médiatrice de $[AD]$ et donc le triangle $ABC$ est le symétrique du triangle $DBC$ par symétrie orthogonale d'axe $(BC)$, la symétrie conserve les angles géométriques donc $ABC$ est rectangle en $A$. □
Une première application du théorème de Pythagore est

**Proposition 1.6** *Soient $(d)$ une droite et $A$ un point n'appartenant pas à $(d)$. Il existe un unique point $H$ de $(d)$ tel que $AH = \min\{AM \mid M \in (d)\}$. $H$ est le point de $(d)$ tel que $(AH)\perp(d)$ et on dit que $\mathrm{d}(A,(d)) = AH$.*

**Preuve.** Soit $H$ le point de $(d)$ tel que $(AH)\perp(d)$, avec le théorème de Pythagore pour tout point $M$ de $(d)$ on a $AM^2 = AH^2 + HM^2$ soit $AM^2 \geq AH^2$ et il y a égalité si et seulement si $HM = 0$. □

## 1.2 Triangle rectangle et hauteur.

**Théorème 1.7** *Soient $ABC$ un triangle et $H$ la hauteur issue de $A$ alors, $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $H \in [BC]$ et $HA^2 = HB \times HC$.*

**Preuve.** Du théorème de Pythagore appliqué dans les triangles rectangles $AHB$ et $AHC$ nous déduisons que $2HA^2 + HB^2 + HC^2 = AB^2 + AC^2$ (1). Si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ alors $2HA^2 + HB^2 + HC^2 = BC^2$. Nous en déduisons que $HB \leq BC$ et $HC \leq BC$ donc le point $H$ est sur le segment $[BC]$.
De plus puisque $H \in [BC]$, $BC^2 = (BH + HC)^2 = BH^2 + CH^2 + 2HB \times HC$ et avec (1) nous avons équivalence entre $HA^2 = HB \times HC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ; soit, entre $HA^2 = HB \times HC$ et $ABC$ rectangle en $A$. □

**Proposition 1.8** *Soient $ABC$ un triangle et $H$ la hauteur issue de $A$ alors, $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $H \in [BC]$ et $BH \times BC = BA^2$ si et seulement si $H \in [BC]$ et $CH \times CB = CA^2$.*

**Preuve.** Nous savons déjà avec la proposition précédente que $ABC$ rectangle en $A$ implique $H \in [BC]$.
Du théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle $AHB$ nous déduisons que $HA^2 + HB^2 = AB^2$, ainsi sous l'hypothèse $H \in [BC]$, $HA^2 = HB \times HC$ équivaut à $HB \times (HB + HC) = AB^2$ et la première équivalence. La deuxième se traite de même en partant du triangle rectangle $AHC$. □

**Proposition 1.9** *Soient $ABC$ un triangle et $H$ la hauteur issue de $A$ alors, $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $HA \times BC = AB \times AC$.*

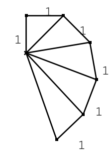
**Preuve.** Nous calculons l'aire $\mathcal{A}$ du triangle de deux façons différentes.
Avec la formule base fois hauteur divisée par 2, $\mathcal{A} = HA \times BC/2$.
Si $ABC$ est rectangle en $A$, alors $A$ est le pied de la hauteur issue de $B$ et $\mathcal{A} = AB \times AC/2$ et on a l'égalité annoncée.
Réciproquement si on a $HA \times BC = AB \times AC$, notons $B'$ le pied de la hauteur issue de $B$. L'aire du triangle $ABC$ est donc $\mathcal{A} = HA \times BC/2 = B'B \times AC/2 = AB \times AC/2$, d'où $B'B = AB$. Par construction $B'$ est le point de $(AC)$ tel que $\mathrm{d}(B,(AC)) = BB'$, $A \in (AC)$ donc par unicité de ce point $A = B'$ et le triangle est rectangle en $A$. □

**Proposition 1.10** *Soient $ABC$ un triangle rectangle en $A$ et $H$ la hauteur issue de $A$ alors $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.*

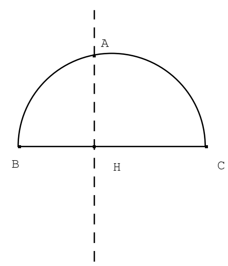
**Preuve.** Avec les propositions précédentes
$HA \times BC = AB \times AC$ implique $HA^2 \times BC^2 = AB^2 \times AC^2$ et avec Pythagore $HA^2 \times (AC^2 + AB^2) = AB^2 \times AC^2$.
On conclue en divisant par $AH^2 \times AB^2 \times AC^2$. □

### 1.3 Applications.

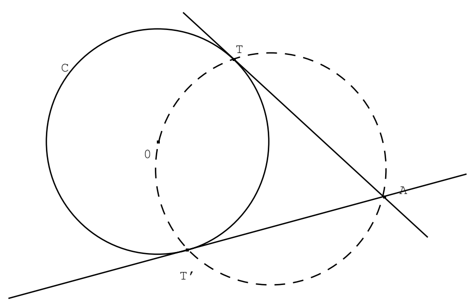
- Savoir reconnaitre si un triangle est rectangle ou non lorsque l'on connait la longueur de ses cotés (cf. le 3-4-5 des maçons).
- La construction des racines des entiers successifs (en particulier $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1).




- $a$ et $b$ étant deux entiers, la construction à la règle et au compas de $\sqrt{ab}$. On utilise le corrolaire 1.3 et le théorème 1.7. Ici $BH = a$, $HC = b$ et le point $A$ à l'intersection du demi-cercle de diamètre $[BC]$ et de la perpendiculaire en $H$ à $[BC]$ est tel que $AH = \sqrt{ab}$.




- Construction des tangentes à un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$, passant par un point extérieur $A$ à ce cercle (la tangente à $\mathcal{C}$ en un point $M$ de $\mathcal{C}$ est la perpendiculaire en $M$ au rayon $[OM]$). On trace le cercle de diamètre $[OA]$, il coupe $\mathcal{C}$ en $T$ et $T'$, les droites $(AT)$ et $(AT')$ sont les tangentes cherchées.




- Calcul de la hauteur dans un triangle équilatéral de coté $a$ : $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

## 2 Relations métriques dans un triangle rectangle (niveau lycée+).

*Nous nous plaçons dans le plan affine muni d'un repère $(O, I, J)$ et nous supposons que le plan vectoriel associé est muni d'un produit scalaire. Par exemple pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $(x, y)$ et $(x', y')$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ nous définissons le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.*
*Deux vecteurs sont dits* ***orthogonaux*** *si leur produit scalaire est nul.*
*La norme associée au produit scalaire est $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$ et nous noterons $AB = \|AB\|$.*

### 2.1 Définition et premières relations.

**Définition 2.1** *Un triangle $ABC$ est dit* ***rectangle*** *en $A$ si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Le coté opposé au sommet $A$ est appelé* ***hypothénuse****.*
*Un triangle est* ***rectangle*** *s'il est rectangle en l'un de ses sommets.*

**Théorème 2.2** *(Théorème de Pythagore) Un triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.*

**Preuve.** Avec la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

et le résultat. □

**Théorème 2.3** *Soient $ABC$ un triangle et $I$ le milieu de $[BC]$ alors, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $IA = IB = IC$.*

**Preuve.** Avec la relation de Chasles, la bilinéarité du produit scalaire et le fait que $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AI^2 - BC^2/4$$

et le résultat (nous avons établi pour cela une des assertions du théorème de la médiane). □

**Corrolaire 2.4** *Un triangle $ABC$ est* **rectangle** *en $A$ si et seulement si $A$ est sur le cercle de diamètre $[BC]$ privé des points $B$ et $C$.*

## 2.2 Triangle rectangle et hauteur.

**Théorème 2.5** *Soient $ABC$ un triangle et $H$ la hauteur issue de $A$ alors, $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $HA^2 = -\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$.*

**Preuve.** Avec la relation de Chasles, la bilinéarité du produit scalaire et le fait que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC} = 0$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH^2 + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$$

et le résultat. □

**Proposition 2.6** *Soient $ABC$ un triangle et $H$ la hauteur issue de $A$ alors, $ABC$ est rectangle en $A$ est équivalent à l'une des assertions suivantes*

*(i)* $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC} = BA^2$

*(ii)* $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB} = CA^2$

*(iii)* $HA \times BC = AB \times AC$.

**Preuve.** Les deux premières assertions se montrent toujours avec l'utilisation du produit scalaire et de la relation de Chasles. Par exemple pour (i)

$$BA^2 = \overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}.$$

La troisième comme dans la partie niveau collège. □

**Proposition 2.7** *Soient $ABC$ un triangle rectangle en $A$ et $H$ la hauteur issue de $A$ alors $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.*

**Preuve.** Comme au niveau collège. □

## 2.3 Applications.

Celles du niveau collège, on peut rajouter

- Calcul de la hauteur $h$ d'un tétraèdre régulier $ABCD$ de coté $a$ : le pied $G$ de la hauteur issue du sommet $A$ est l'isobarycentre de $(B, C, D)$ et $BCD$ est un triangle équilatéral d'où $BG^2 + h^2 = a^2$ et $BG = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.
- Construction de l'inverse d'un point par l'inversion de centre $O$ et rapport $k$. $M$ étant un point du plan différent de $O$ on cherche à construire un point $M'$ tels que 0, $M$, $M'$ soient alignés et $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = k$.
  Pour $k < 0$ on introduit le point $A$ tel que $AO = \sqrt{-k}$ et $\overrightarrow{AO}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{MO}$. $M'$ est alors le point de la droite $(OM)$ tel que $AMM'$ soit rectangle en $A$ (cf. théorème 2.5).
  Pour $k > 0$ il va falloir distinguer trois cas. Si $\sqrt{k} = OM$ alors $M' = M$. Si $\sqrt{k} > OM$ alors on va construire $M'$ pour que le triangle $OAM'$ soit rectangle en $A$ avec $M$ pied de la hauteur issue de $A$ et $OA = \sqrt{k}$ (cf. proposition 2.6 (i)). Si $\sqrt{k} < OM$ alors on va construire $M'$ comme pied de la hauteur issue de $A$ avec $OAM$ triangle rectangle en $A$ et $OA = \sqrt{k}$. □

# 3 Trigonométrie.

*Nous supposons que le plan affine euclidien est muni d'une orientation et nous supposons connue la définition d'un angle orienté de vecteurs et de ses mesures. Nous noterons $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ une mesure. Nous supposons connu l'action des transformations usuelles (translation, symétrie axiale et rotation) sur les angles orientés de vecteurs.*
*Nous appelons $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé direct du plan affine. Le cercle de centre $O$, passant par $I$ et orienté dans le sens direct est appelé* ***cercle trigonométrique****.*

## 3.1 Définitions et premières conséquences.

**Définition 3.1** *Soient $t$ un réel et $M$ le point du cercle trigonométrique tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = t\ [2\pi]$. On appelle* ***cosinus*** *et* ***sinus*** *de $t$ (notés $\cos t$ et $\sin t$), les coordonnées de $M$ dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$*

$$\overrightarrow{OM} = \cos(t)\overrightarrow{OI} + \sin(t)\overrightarrow{OJ}.$$

.

**Définition 3.2** *Le* ***cosinus*** *(respectivement* ***sinus****) d'un angle orienté de vecteurs est le* ***cosinus*** *(respectivement* ***sinus****) d'une mesure de cet angle. Nous noterons encore $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ (respectivement $\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$).*

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition

**Proposition 3.3**
1. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$ périodiques.*
2. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont à valeurs dans $[-1,1]$.*
3. *Pour tout réel $t$, $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$.*

**Proposition 3.4** *Valeurs remarquables.*

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos t$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin t$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $0$ |

**Preuve.**
Les valeurs en $0$, $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$ sont immédiates. Pour les autres valeurs commençons par remarquer que les coordonnées du point $M$ sont toujours positives, il suffit donc de calculer la valeur du cosinus ou sinus.
Introduisons $M'$ le symétrique de $M$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OI)$.

Si $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ alors le triangle $OM'M$ est équilatéral de coté 1 et l'ordonnée de $M$ est la moitié de la longueur d'un côté d'où la valeur du sinus puis du cosinus (pour le cosinus on peut aussi utiliser la hauteur du triangle équilatéral).

Si $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ alors le triangle $OM'M$ est rectangle et isocèle en $O$, l'abcisse (ou l'ordonnée) est donc la demi longeur de la diagonale d'un carré de côté 1 soit $\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

**Proposition 3.5** *Pour tout réel $t$*
1. $\cos(-t)=\cos(t)$ $\quad\sin(-t)=-\sin(t)$,
2. $\cos(\pi-t)=-\cos(t)$ $\quad\sin(\pi-t)=\sin(t)$,
3. $\cos(t+\pi)=-\cos(t)$ $\quad\sin(t+\pi)=-\sin(t)$,
4. $\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin(t)$ $\quad\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos(t)$.

**Preuve.** Dans l'ordre : par symétrie axiale d'axe $(OI)$, axiale d'axe $(OJ)$, centrale de centre $O$, axiale d'axe $(d)$ d'équation $y=x$. $\square$

**Corrolaire 3.6** $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ *et* $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Définition 3.7** *La fonction* ***tangente*** *(notée $\tan$) est définie sur $\mathbb{R}\setminus(\{\frac{\pi}{2}\}+\pi\mathbb{Z})$ par*

$$\tan(t)=\frac{\sin t}{\cos t}.$$

**Remarque 3.8** *On vérifie aisément que $\cos(t)=0$ équivaut à $t\in\{\frac{\pi}{2}\}+\pi\mathbb{Z}$.*

## 3.2 Trigonométrie et triangle rectangle.

==========si on a choisit une première partie niveau collège===========

**Proposition 3.9** *Soit $ABC$ un triangle, il est rectangle en $A$ si et seulement si*

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{AB}{BC}.$$

**Preuve.** Le cosinus étant une fonction paire nous pouvons supposer que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est direct.
Les translations et rotations ne changeant pas les angles orientés de vecteurs nous pouvons supposer que $B = O$ et $I \in [BA)$. Nous notons $C'$ le point intersection de $[BC)$ avec le cercle trigonométrique et $A'$ son projeté orthogonal sur $(BA)$.
Si $ABC$ est rectangle en $A$ alors $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA'$ (les angles non droits d'un triangle rectangle sont aigus). Les droites $(A'C')$ et $(AC)$ sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à $(BA)$ donc avec le théorème de Thales $\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{1}{BC}$ soit $BA' = \frac{AB}{BC}$.
Si $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{AB}{BC}$ nous en déduisons que le cosinus est positif et donc que $A' \in [BA)$, nous avons déjà par construction $C' \in [BC)$, nous concluons avec la réciproque du théorème de Thales. □

**Proposition 3.10** *Soit $ABC$ un triangle, il est rectangle en $A$ si et seulement si* $|\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = \frac{AC}{BC}$

**Preuve.** Pour l'implication nous utilisons le théorème de Pythagore et la proposition 3.9.
Pour la réciproque, en reprenant les notations de la preuve précédente nous avons $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'}$. Notons $A''$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$, avec le théorème de Thales $\frac{A''C}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$ d'où $AC = A''C$ et $A = A''$ par unicité du projeté orthogonal ; le triangle est rectangle en $A$. □

**Corrolaire 3.11** *Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ alors* $|\tan(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = \frac{AC}{AB}$.

**Preuve.** Conséquence des propositions 3.9 et 3.10 □

**Remarque 3.12** *Ici nous n'avons plus d'équivalence, si $ABC$ est rectangle en $A$ considérons $D$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$ et $C'$ l'image de $C$ par la symétrie d'axe $(AD)$. Alors $AC' = AC$ donc $|\tan(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'})| = |\tan(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = \frac{AC'}{AB}$ et la triangle $ABC'$ n'est pas rectangle en $A$.*

Nous rappelons qu'une mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ est la valeur absolue de la mesure principale (mesure appartenant à $]-\pi, \pi]$) de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, d'où le corrolaire

**Corrolaire 3.13** *Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$. Alors*

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}.$$

==========si on a choisit une première partie niveau lycée+===========

**Proposition 3.14** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

**Preuve.** Quitte à faire une rotation, nous pouvons supposer que $\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, puisque $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormée, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|x + 0y = \|\overrightarrow{u}\|x$. Par définition

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos(\widehat{\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{OI}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}}) = \frac{x}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

□

**Corrolaire 3.15** *Soit $ABC$ un triangle, il est rectangle en $A$ si et seulement si* $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{AB}{BC}$

**Preuve.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. □

**Proposition 3.16** *Soit $ABC$ un triangle, il est rectangle en $A$ si et seulement si* $|\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = \frac{AC}{BC}$.

**Preuve.** Comme ci-dessus. On pourrait aussi utiliser que $\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \times BC \times \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ mais cela dépasse le niveau lycée. □

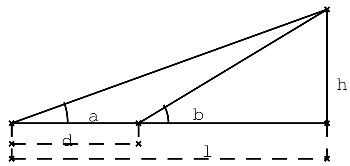
**Corrolaire 3.17** *Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ alors* $|\tan(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = \frac{AC}{AB}$.

Même preuve et remarque que ci-dessus.

# 4 Applications.

Nous avons déjà donné de nombreuses applications des relations métriques. Quelques applications de la trigonométrie.

- Si on a choisit de parler du produit scalaire, on peut continuer à l'exploiter pour montrer $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ : produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $(\cos(a), \sin(a))$ et $(\cos(b), \sin(b))$ que l'on calcule à l'aide de la définition analytique et à l'aide de son expression en fonction de $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
- Calcul des longueurs des cotés dans un triangle rectangle connaissant une mesure de ses angles et la longueur d'un seul coté.
- Calcul d'une hauteur dont la base est inaccessible.



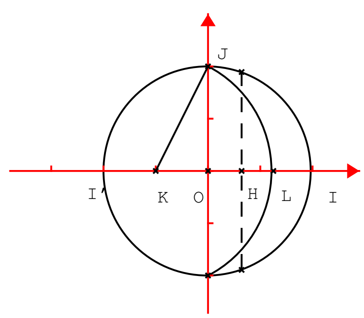

On cherche à calculer la hauteur $h$ la longueur $l$ étant inconnue, la longueur $d$ et les mesures d'angles $a$ et $b$ sont connues. $\tan a = \frac{h}{l}$ et $\tan b = \frac{h}{l-d}$ ce qui donne $h = \frac{d(\tan a)(\tan b)}{\tan b - \tan a}$.
- Un mélange de relation métriques et trigonométriques : calcul de la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis construction à la règle et au compas.

  Il faut commencer par calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$, une méthode possible n'utilisant pas les complexes est la suivante.

  Nous appelons $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé direct du plan affine et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre $O$. On construit sur $\mathcal{C}$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{2\pi}{5}$, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{5}$, $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{2\pi}{5}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}) = \frac{2\pi}{5}$ (nous avons un pentagone régulier). En remarquant que $A$ et $D$ ainsi que $B$ et $C$ sont symétriques par rapport à $(OI)$ nous obtenons que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OI}$. De même $I$ et $B$ ainsi que $C$ et $D$ sont symétriques par rapport à $(OA)$ donc $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. De cela, en utilisant la parité et la $2\pi$-périodicité de cos, nous déduisons que $1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5}) = 0$ puis que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de $4x^2 + 2x - 1 = 0$ (en utilisant $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1$). Soit $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (solution positive).

  Construction à la règle et au compas d'un point du cercle trigonométrique ayant pour abcisse $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

  On note $I'$ le point du cercle trigonométrique ayant pour abcisse $-1$ et $K$ le milieu de $[I'O]$. On note $L$ le point intersection du cercle de centre $K$ et rayon $OJ$ et du segment $[OI]$. Alors avec le théorème de Pythagore $KJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$ puis $OL = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Alors $H$ le milieu de $[OL]$ est tel que $OL = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(\frac{2\pi}{5})$. Les points du cercle trigonométrique d'abcisse $\cos(\frac{2\pi}{5})$ sont les points intersection de la perpendiculaire à $(OI)$ passant par $H$ et du cercle trigonométrique.

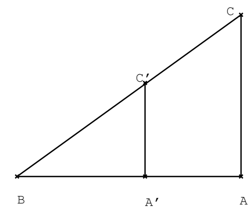



# 5 Commentaires.

- Les niveaux indiqués (collège-lycée) concernent les outils utilisés mais ne prétendent pas que tous les résultats annoncés sont classiquement faits à ce niveau
- Nous ne nous sommes pas contenté des relations trigonométriques dans le triangle rectangle car cela nous a semblé réducteur (dans le titre il est indiqué trigonométrie sans plus de précision à la différence de la leçon suivante où l'on peut lire “Relations métriques et trigonométriqes dans un triangle quelconque ...”).
- Comment déduire la théorème de Thales (dans un cas particulier) du théorème de Pythagore.

  **Proposition 5.1** *Soient $ABC$ un triangle rectangle en $A$, $A' \in [AB]$ et $C' \in [CB]$. Alors la droite $(A'C')$ est parallèle à la droite $(AC)$ si et seulement si* $\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.

**Preuve.**




Supposons $(A'C')$ parallèle à $(AC)$ alors le triangle $BA'C'$ est rectangle en $A'$ et notons $x = \frac{BA'}{BA}$ et $y = \frac{BC'}{BC}$.
L'aire du triangle $ABC$ se calcule de deux façons différentes
$2\mathcal{A}(ABC) = AB \times AC = A'B \times A'C' + AA' \times (AC + A'C') = xBA \times A'C' + (1-x)BA \times (AC + A'C')$ dont on déduit $A'C' = xAC$.
Du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $BA'C'$ on déduit que $x^2BA^2 + x^2AC^2 = y^2BC^2$ soit (avec Pythagore dans le triangle rectangle $BAC$) $x^2 = y^2$ et $x = y$.
Si nous supposons maintenant l'égalité des rapports de distances, appelons $C''$ le point de $[BC]$ situé sur la perpendiculaire à $(BA)$ issue de $A'$. Avec la partie directe du théorème de Thales nous avons $\frac{BC''}{BC} = \frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC}$ par hypothèse. Donc $BC'' = BC'$ et $C'' = C'$ car ces deux points sont sur le segment $[BC]$. On en déduit que $(A'C')$ est perpendiculaire à $(BA)$ et $(A'C')$ est parallèle à $(AC)$. $\square$