

Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.

Chantal Menini

18 mai 2009

Avant de vous lancer dans cet exposé assurez-vous que vous savez définir ce qu'est un *espace euclidien* et une *orientation*.

Il y a au moins deux plans possibles pour cet exposé. Le premier consiste à se limiter à la dimension 3 et de donner la définition géométrique du produit vectoriel, les premières propriétés puis d'en déduire sa définition analytique. Le deuxième consiste à commencer par donner une définition du produit vectoriel qui est valable pour toute dimension $n \geq 3$, d'en déduire les premières propriétés et sa définition analytique puis de faire le lien avec la définition géométrique. Ensuite ces deux plans se rejoignent dans l'étude de propriétés supplémentaires et d'applications. Ces deux plans ont chacun des avantages et des inconvénients, à vous de vous servir de tout cela pour faire votre propre plan.

1 Première façon.

1.1 Définition géométrique.

On note $\vec{E}$ l'espace euclidien orienté de dimension 3.

Définition 1.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$, le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur de $\vec{E}$ défini par les conditions suivantes :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$,
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k}$ où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit directe.

Remarque 1.2 1. On dit aussi que le vecteur $\vec{k}$ défini ci-dessus est directement orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Avec cette définition on ne se préoccupe pas de l'orientation choisie pour le plan vectoriel $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'en dépend pas puisque intervient la valeur absolue du $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

3. On peut aussi choisir $(\vec{v}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{k}_1$ le vecteur orthogonal de sorte que la base $(\vec{v}, \vec{j}, \vec{k}_1)$ soit orthonormée directe, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k}_1$ où l'orientation de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est celle induite par $\vec{k}_1$. Pour vous convaincre que vous avez bien la même définition, considérer le cas où la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est directe et le cas où elle est indirecte (signe du $\sin$, lien entre $\vec{k}$ et $\vec{k}_1$?).

Si on opte pour cette définition du produit vectoriel, il faut penser à s'assurer qu'elle ne dépend pas de la base $(\vec{v}, \vec{j}, \vec{k}_1)$ choisie.

Proposition 1.3 1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

2. Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

3. Linéarité : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + a\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + a\vec{u} \wedge \vec{w}$.

Remarque 1.4 On a aussi $(\vec{v} + a\vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + a\vec{w} \wedge \vec{u}$ grâce à l'antisymétrie.

Preuve.

La première assertion est une conséquence directe de la définition.

La deuxième assertion est immédiate si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. S'ils sont libres, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ directe implique

$(\vec{v}, \vec{u}, -\vec{k})$ directe et $|\sin(\vec{u}, \vec{v})| = |\sin(\vec{v}, \vec{u})|$ d'où le résultat.

La troisième assertion est immédiate si $\|\vec{u}\| = 0$, sinon nous allons commencer par donner une autre expression du produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ lorsque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Soit $\vec{v}_1$ un vecteur unitaire du plan vectoriel $Vect(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{k}_1$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}_1$ tels que $(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}_1, \vec{k}_1)$ soit une base orthonormée directe.

Considérons maintenant P la projection orthogonale sur $Vect(\vec{u})^\perp$ alors $P(\vec{v}) = \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{v}_1$ (on rappelle que $Vect(\vec{u}, \vec{v})$ est muni de l'orientation induite par $\vec{k}_1$ donc $(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}_1)$ en est une base orthonormale directe).

Puis considérons $R = [\vec{u}, \pi/2]$ la rotation vectorielle de vecteur $\vec{u}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et H l'homothétie vectorielle de rapport $\|\vec{u}\|$. Alors $R(\vec{v}_1) = \vec{k}_1$ et $H \circ R \circ P(\vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k}_1$.

Pour conclure il reste à voir que si $(\vec{u}, \vec{v})$ a la même orientation que $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ alors $\sin(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ et $\vec{k} = \vec{k}_1$, si $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ n'ont pas la même orientation alors $\sin(\vec{u}, \vec{v}) < 0$ et $\vec{k} = -\vec{k}_1$.

Ainsi $\vec{u} \wedge \vec{v} = H \circ R \circ P(\vec{v})$ y compris lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires puisqu'alors $P(\vec{v}) = \vec{0}$.

H , R et P sont des applications linéaires d'où l'assertion 3 de la proposition. $\square$

Proposition 1.5 Soient $\vec{v}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs unitaires de $\vec{E}$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $(\vec{v}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$.
2. $\vec{v} \wedge \vec{j} = \vec{k}$.
3. $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{v}$.
4. $\vec{k} \wedge \vec{v} = \vec{j}$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la définition. $\square$

Remarque 1.6 On peut aussi déduire de la proposition précédente que le produit vectoriel n'est pas associatif puisque $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{k}) = \vec{v} \wedge (-\vec{j}) = -\vec{k}$ et $(\vec{v} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{k} = \vec{0} \neq -\vec{k}$.

1.2 Expression analytique.

Proposition 1.7 Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathcal{B}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel ainsi que les résultats de la proposition 1.5. $\square$

1.3 Produit mixte.

Définition 1.8 Le **produit mixte** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$ est le réel noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}]$ et valant

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}] = (\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{k})$$

où $(\cdot \mid \cdot)$ désigne le produit scalaire de $\vec{E}$.

Proposition 1.9 Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de $\vec{E}$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}$ trois éléments de $\vec{E}$, alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}] = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}).$$

Preuve. Supposons que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) , (x', y', z') et (a, b, c) dans $\mathcal{B}$, alors avec la proposition 1.7

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{k}) &= a \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & x' & a \\ y & y' & b \\ z & z' & c \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}). \end{aligned}$$

$\square$

Corrolaire 1.10 L'application définie de $(\vec{E})^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \mapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}]$$

est une forme multilinéaire alternée.

2 Deuxième façon.

On note $\vec{E}$ l'espace euclidien orienté de dimension 3. On suppose connue la définition de la forme multilinéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}$ désigne une base de $\vec{E}$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes de $\vec{E}$ alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

2.1 Définition.

Théorème 2.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$ alors il existe un unique vecteur $\vec{w}$ tel que

$$\forall \vec{x} \in \vec{E} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{w} | \vec{x})$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$ et $(\cdot | \cdot)$ désigne le produit scalaire de $\vec{E}$.

Définition 2.2 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$, le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur tel que

$$\forall \vec{x} \in \vec{E} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{x})$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$.

Preuve. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$, alors l'application définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \vec{E} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\vec{E}$ (par multilinéarité du déterminant).

De plus on sait qu'il existe un isomorphisme de $\vec{E}$ sur son dual $\vec{E}^*$ donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \vec{E} &\rightarrow \vec{E}^* \\ \vec{a} &\mapsto (\vec{a} | \cdot) \end{aligned}$$

où $(\vec{a} | \cdot)$ désigne la forme linéaire $(\vec{a} | \cdot) : \vec{x} \mapsto (\vec{a} | \vec{x})$.

Ainsi, il existe un unique vecteur $\vec{w}$ tel que $\mathcal{L} = (\vec{w} | \cdot)$, ce qui termine la preuve.

Si on ne veut pas trop parler d'isomorphisme, on peut aussi faire la démonstration directe suivante (qui est en fait une démonstration de l'existence de cet isomorphisme ...).

Avec les notations précédentes, on cherche à trouver un vecteur $\vec{w}$ tel qu'il y ait égalité des formes linéaires $\mathcal{L} = (\vec{w} | \cdot)$. Une condition nécessaire et suffisante d'existence est que ces deux formes linéaires coïncident sur la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\vec{E}$. Nous obtenons ainsi l'existence et l'unicité du vecteur $\vec{w}$ solution puisque $\vec{w} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{L}(e_i) e_i$ est l'unique vecteur solution. $\square$

Remarque 2.3 1. On appelle aussi **produit mixte** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$ le réel noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}]$ et valant

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}] = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) = (\vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{k})$$

2. En dimension $n \geq 3$ la définition du produit vectoriel $\vec{e}_1 \wedge \dots \wedge \vec{e}_{n-1}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que

$$\forall \vec{x} \in \vec{E} \quad \det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{x}) = (\vec{w} | \vec{x}).$$

Proposition 2.4 1. L'application produit vectoriel

$$\begin{aligned} \cdot \wedge \cdot : \vec{E} \times \vec{E} &\rightarrow \vec{E} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

est bilinéaire et antisymétrique.

2. $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})^\perp$

Preuve. La première assertion résulte directement de la bilinéarité et de l'antisymétrie du déterminant. La deuxième du fait que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0 = (\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{u})$ et de même $(\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{v}) = 0$ $\square$

2.2 Expression analytique.

Proposition 2.5 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de $\vec{E}$. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathcal{B}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$$

Preuve. Cela découle directement du fait que $\vec{w} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{L}(\vec{e}_i) \vec{e}_i$ avec $\mathcal{L}(\vec{e}_i) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_i)$. $\square$

2.3 Expression géométrique.

Proposition 2.6 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$, le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur de $\vec{E}$ défini par les conditions suivantes :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$,
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k}$ où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit directe.

Preuve.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ par antisymétrie du produit vectoriel.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, prenons $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de $\vec{E}$ telle que $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Nous savons déjà que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \lambda \vec{e}_3$, il reste à déterminer le scalaire λ .

Par définition du sinus, $\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$. De plus $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3) = \det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\vec{u}, \vec{v})$ et donc par définition du produit vectoriel

$$(\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{e}_3) = \lambda = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$

Pour conclure il reste à remarquer que si la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est directe alors $\sin(\vec{u}, \vec{v}) > 0$ et $\vec{k} = \vec{e}_3$, si la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est indirecte alors $\sin(\vec{u}, \vec{v}) < 0$ et $\vec{k} = -\vec{e}_3$. $\square$

3 Autres propriétés.

3.1 Double produit vectoriel.

Proposition 3.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$,

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (\vec{u} \mid \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \mid \vec{v}) \vec{w} \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= (\vec{u} \mid \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \mid \vec{w}) \vec{u}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2 On retrouve que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Preuve. La deuxième égalité découle de la première par antisymétrie du produit vectoriel. Pour montrer la première égalité, on choisit une base orthonormée directe de sorte que dans cette base on ait $\vec{u}(\alpha, 0, 0)$, $\vec{v}(a, b, 0)$ et $\vec{w}(x, y, z)$ puis on utilise l'expression analytique du produit vectoriel pour conclure. Soit :

$\vec{v} \wedge \vec{w}$ a pour coordonnées $(bz, -az, ay - bx)$ puis $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ a pour coordonnées $(0, \alpha(bx - ay), -\alpha az) = \alpha x(a, b, 0) - \alpha a(x, y, z)$. On termine en remarquant que $(\vec{u} \mid \vec{w}) = \alpha x$ et $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \alpha a$. $\square$

3.2 Egalité de Lagrange.

Proposition 3.3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \mid \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

Preuve. Cela découle du fait que $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$. $\square$

4 Applications.

Nous nous plaçons pour les applications dans l'espace affine euclidien E d'espace vectoriel associé $\vec{E}$. $\vec{E}$ est supposé muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Lorsque nous travaillons dans le plan, il est sous entendu qu'il peut être vu comme sous espace d'un espace affine de dimension 3 afin que le produit vectoriel ait bien un sens.

4.1 Calculs d'aires et de volumes.

4.1.1 Aire d'un triangle.

Proposition 4.1 L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

Preuve. Soit H le pied de la hauteur du triangle issue de C alors l'aire du triangle est $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} HC \times AB = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$. $\square$

4.1.2 Aire d'un parallélogramme.

Proposition 4.2 L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$.

Preuve. $\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABD}$.

Pour démontrer que $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{BCD}$ on peut utiliser la symétrie centrale de centre le parallélogramme ou encore que $2\mathcal{A}_{BCD} = \|\vec{BC} \wedge \vec{BD}\|$ et $\vec{BC} \wedge \vec{BD} = (\vec{BA} + \vec{AC}) \wedge (\vec{BA} + \vec{AD}) = \vec{AC} \wedge \vec{AD} = \vec{AB} \wedge \vec{AD}$. $\square$

4.1.3 Volume d'un parallélépipède.

Proposition 4.3 Soient A, B, D et I quatre points non coplanaires de E et P le parallélépipède d'arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AI]$. Le volume du parallélépipède P est $\mathcal{V}_P = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AI}]|$.

Preuve. Notons I' le projeté orthogonal de I sur le plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et D alors $\mathcal{V}_P = II' \times \mathcal{A}_{ABCD}$ si l'on note C le point défini par $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

$$II' = |(\vec{AI} \mid \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AD}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|})| \text{ d'où } \mathcal{V}_P = |(\vec{AI} \mid \vec{AB} \wedge \vec{AD})| = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AI}]|. \quad \square$$

4.2 Equations de droites et de plans.

4.2.1 Equation d'une droite.

Proposition 4.4 Le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si

$$\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}.$$

Remarque 4.5 On retrouve ainsi l'équation d'une droite du plan, si A a pour coordonnées (x_0, y_0) et $\vec{u}$ a pour coordonnées (a, b) l'équation de $\mathcal{D}$ est

$$\mathcal{D} : b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

En effet M de coordonnées $(x, y, 0)$ (si l'on considère le plan comme sous espace d'un espace affine E de dimension 3) appartient à la droite si et seulement si $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, et $\vec{AM} \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées $(0, 0, b(x - x_0) - a(y - y_0))$. Il y a bien sûr d'autres outils pour montrer ce résultat.

Preuve. Cela découle du fait que M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont liés soit si et seulement si $\vec{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. $\square$

4.2.2 Equation d'un plan de l'espace.

Proposition 4.6 *Le point M appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si*

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0.$$

Preuve. Ce résultat est immédiat si l'on a choisi la seconde présentation.

Si l'on a choisi la première présentation, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$, M appartient au plan si et seulement si $(\overrightarrow{AM} \mid \vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$ soit si et seulement si $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. $\square$

4.3 Calcul de distances.

4.3.1 Distance d'un point à une droite

Proposition 4.7 *La distance d'un point M à une droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est*

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Preuve. Commençons par rappeler la définition de la distance d'un point à une droite

$$d(M, \mathcal{D}) = \inf\{MN, N \in \mathcal{D}\}.$$

Si l'on appelle H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ alors pour tout point N de la droite, $MN^2 = MH^2 + HN^2$ et MN est minimal pour $N = H$, d'où, $d(M, \mathcal{D}) = MH$.

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$ puisque $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Et $\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \times \|\vec{u}\|$ puisque $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. $\square$

Remarque 4.8 *Lorsque nous sommes dans le plan et que la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $\mathcal{D} : bx - ay + c = 0$, en reprenant les notations de la remarque 4.5, $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et*

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = |b(x - x_0) - a(y - y_0)| = |bx - ay + c|$$

$$d'où d(M, \mathcal{D}) = \frac{|bx - ay + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4.3.2 Distance d'un point à un plan

Proposition 4.9 *La distance d'un point M à un plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est*

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

Preuve. On montre de même que $d(M, \mathcal{P}) = MH$ où H est le projeté orthogonal M sur $\mathcal{P}$. $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ d'où $MH \times \|\vec{n}\| = |(\overrightarrow{AM} \mid \vec{n})|$ et $|(\overrightarrow{AM} \mid \vec{n})| = |[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}]|$. $\square$

4.3.3 Distance entre deux droites non coplanaires.

Proposition 4.10 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires. $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) passant par le point A (resp. A') et de vecteur directeur $\vec{u}$ (resp. $\vec{u}'$). Alors la distance entre ces deux droites est*

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}.$$

Preuve. Commençons par montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Si Δ existe alors nécessairement $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ est un vecteur directeur de cette droite. Alors Δ appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. De même Δ appartient au plan $\mathcal{P}'$ passant par A' et de vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ et $\Delta \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Réciproquement, considérons les plans définis ci-dessus. Ces plans ne sont pas parallèles puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont libres (en effet $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Vect}(\vec{u}', \vec{v})$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ liés puisque $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux à $\vec{v}$). Leur intersection est donc une droite que l'on note Δ , d'où l'unicité et c'est une perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (pourquoi?).

Calculons maintenant $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \inf\{MM', M \in \mathcal{D}, M' \in \mathcal{D}'\}$, notons $I = \mathcal{D} \cap \Delta$ et $I' = \mathcal{D}' \cap \Delta$ alors :

$$MM'^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{I'M'}\|^2 + II'^2$$

et MM' est minimal pour $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{I'M'} = \vec{0}$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{MI} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{I'M'} = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{MI}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{I'M'}$ est colinéaire à $\vec{u}'$. On vient donc de montrer que

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = II'.$$

On conclue en utilisant que $II' = |(\overrightarrow{AA'} \mid \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})|$ et l'expression du produit mixte (on peut aussi remarquer que $II' = d(A, \mathcal{P}(A', \vec{u}, \vec{u}'))$ et utiliser la résultat sur la distance d'un point à un plan). $\square$

5 Commentaires.

- Le second choix de plan nécessite d'être "à l'aise" avec les formes linéaires mais présente le gros avantage de donner de façon immédiate la bilinéarité et antisymétrie du produit vectoriel. De plus c'est la définition quelquesoit la dimension $n \geq 3$.
- On l'avait dit dès le début il faut savoir ce qu'est une *orientation* et, vous l'aurez constaté, ce qu'est une *orientation induite*. Mais aussi d'avoir les idées claires sur la définition d'un angle, une mesure de cet angle, le cosinus et le sinus.
- On peut bien sûr mettre des applications numériques dans la présentation de calculs d'aires, etc... mais surtout on doit être capable de mettre en oeuvre ces calculs numériques sur un exemple proposé par le jury.
- C'est bien trop long, à vous de faire un choix dans les applications.

6 Lien avec d'autres exposés.

On réexpoitra bien sûr les applications (et vice versa) dans l'exposé 36 "Applications du produit scalaire et du produit vectoriel ..."

7 Bibliographie.

Pour le premier plan et beaucoup d'applications des vieux livres de terminale C, pour le deuxième plan des livres post-bac par exemple "Cours de mathématiques spéciales" T2 de Ramis.