Exemples de représentation paramétrique de coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.

Chantal Menini

14 mai 2009

Nous nous plaçons dans le plan affine euclidien noté P muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Nous rappelons que l'application f définie d'un intervalle (ou union d'intervalles) I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est dite *paramétrisation* de la courbe $\mathcal{C}$ du plan si $\mathcal{C} = \{M(t) \mid t \in I\}$ où $M(t)$ est le point du plan de coordonnées $f(t)$. Il n'y a pas unicité de la paramétrisation, elle sera dite *simple* si f est injective et *régulière* si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(t) \neq 0$ pour tout t de l'intervalle I . Lorsque la paramétrisation est simple et régulière, la courbe admet une tangente en tout point $M(t)$ et le vecteur de coordonnées $f'(t)$ est un vecteur directeur de cette tangente.

1 Paramétrisations et premières conséquences.

1.1 Parabole.

On considère la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ et on choisit le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ de sorte que F soit de coordonnées $(c, 0)$ et $\mathcal{D}$ d'équation $x = -c$. Alors l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $y^2 = 2px$ avec $p = 2c$ ce qui nous donne immédiatement la paramétrisation suivante.

Proposition 1.1 Une paramétrisation de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ est

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t\right). \end{aligned}$$

Proposition 1.2 Soit $\mathcal{P}$, d'équation cartésienne $y^2 = 2px$, alors l'équation de sa tangente au point $M_0(x_0, y_0)$ est

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Preuve Avec la paramétrisation choisie, $M_0(x_0, y_0) = M(y_0)$ et f étant simple et régulière, un vecteur directeur de la tangente en $M(y_0)$ a pour coordonnées $(\frac{y_0}{p}, 1)$. $M(x, y)$ appartient à la tangente si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{y_0}{p} \\ y - y_0 & 1 \end{vmatrix} = (x - x_0) + \frac{y_0^2}{p} - \frac{y_0 y}{p} = 0$$

et le résultat en utilisant que $\frac{y_0^2}{p} = 2x_0$. □

Proposition 1.3 Soit M un point de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, on note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ alors la tangente à $\mathcal{P}$ au point M notée $\mathcal{T}_M$ est la médiatrice du segment $[FH]$.

Preuve H a pour coordonnées $(-c, y_0)$ donc $\overrightarrow{FH}(-p, y_0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}_M$ d'équation $y_0 y = p(x + x_0)$. De plus le milieu $I(0, \frac{y_0}{2})$ du segment $[HF]$ est sur la tangente (ou encore par définition de la parabole $\mathcal{T}_M$ contient le point M situé à égale distance du foyer F et de la directrice $\mathcal{D}$ et donc à égale distance de F et H). □

Remarque 1.4 Cette propriété permet une construction de la parabole par point et tangente. Le foyer et la directrice étant donnés, en un point H de $\mathcal{D}$ on trace la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par H et on trace la médiatrice au segment $[FH]$, notée d_H . Le point d'intersection de ces deux droites est un point de la parabole et d_H est la tangente en ce point.

Corrolaire 1.5 Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et directrice $\mathcal{D}$, soient M un point de $\mathcal{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Lorsque M est distinct du sommet de la parabole, la tangente $\mathcal{T}_M$ à la parabole au point M est la bissectrice intérieure du triangle HMF et la normale $\mathcal{N}_M$ est la bissectrice extérieure.

Remarque 1.6 C'est une propriété de la parabole souvent utilisée en optique, tout rayon touchant la parabole, perpendiculairement à la directrice, se réfléchit en un rayon passant par le foyer.

1.2 Ellipse.

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' et on choisit le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ de sorte que, lorsque F et F' sont distincts, O soit le milieu du segment $[FF']$ (centre de l'ellipse) et $\vec{i}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{FF'}$; sinon $O = F = F'$ et $\vec{i}$ vecteur normé quelconque. Alors l'équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a \geq b > 0$ (on rappelle qu'alors F a pour coordonnées $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$).

Proposition 1.7 Une paramétrisation de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est

$$f : \begin{array}{ll} [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (a \cos t, b \sin t). \end{array}$$

Preuve. Il est clair que $\{M(t), t \in [0, 2\pi[\} \subset \mathcal{E}$, réciproquement soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse alors le couple $(X, Y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ vérifie $X^2 + Y^2 = 1$ et on sait qu'il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $(\cos t, \sin t) = (X, Y)$. $\square$

Proposition 1.8 Soit l'ellipse $\mathcal{E}$, d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors l'équation de sa tangente au point $M_0(x_0, y_0)$ est

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Preuve Avec la paramétrisation choisie, $M_0(x_0, y_0) = M(t_0)$ et f étant simple et régulière, un vecteur directeur de la tangente en $M(t_0)$ a pour coordonnées $(-a \sin t_0, b \cos t_0) = ab(-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2})$. $M(x, y)$ appartient à la tangente si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & -\frac{y_0}{b^2} \\ y - y_0 & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0$$

et le résultat en utilisant que $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. $\square$

Définition 1.9 On appelle **cercle principal** de l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ le cercle de centre O le milieu des foyers et de rayon a .

On appelle **cercle secondaire** de l'ellipse le cercle de centre O et de rayon b .

Proposition 1.10 Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(a \cos t, b \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. On note N le point du cercle principal de coordonnées $(a \cos t, a \sin t)$, alors la tangente à $\mathcal{E}$ au point M et la tangente au cercle principal au point N sont sécantes avec l'axe focal en un même point.

Preuve. On commencera par remarquer que si $a = b$ alors le cercle principal est confondu avec l'ellipse et il n'y a rien à montrer.

Sinon avec les conditions sur le paramètre t , la tangente en M à $\mathcal{E}$ coupe l'axe focal (qui est l'axe des abscisses avec notre choix de repère) en un point T de coordonnées $(\frac{a}{\cos t}, 0)$ et l'équation de la tangente en N au cercle principal est $x \cos t + y \sin t = a$, elle coupe aussi l'axe des abscisses au point T . $\square$

Remarque 1.11 Cela donne une méthode de construction de l'ellipse par point et tangente.

On trace $\mathcal{C}_a$ le cercle principal et $\mathcal{C}_b$ le cercle secondaire. Pour $t \in [0, 2\pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, on note N le point de $\mathcal{C}_a$ de coordonnées $(a \cos t, a \sin t)$ et P le point intersection entre le segment $[0, N]$ et $\mathcal{C}_b$. Alors P a pour coordonnées $(b \cos t, b \sin t)$ et le point M ayant même abscisse que N et même ordonnée que P est un point de l'ellipse.

Puis on trace Δ_N la tangente à $\mathcal{C}_a$ au point N et on note T son intersection avec l'axe des abscisses, alors, si $t \neq 0$ ou $t \neq \pi$, la droite (MT) est la tangente à $\mathcal{E}$ au point M (si $t = 0$ ou $t = \pi$ c'est Δ_N la tangente).

Les deux points que l'on ne peut obtenir ainsi sont les sommets de coordonnées respectives $(0, b)$ et $(0, -b)$ qui se construisent aisément ainsi que leur tangente (tangente parallèle à l'axe des abscisses).

1.3 Hyperbole.

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers F et F' et on choisit le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ de sorte que, O soit le milieu du segment $[FF']$ (centre de l'hyperbole) et $\vec{i}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{FF'}$. Alors l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$ (on rappelle qu'alors F a pour coordonnées $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$).

Proposition 1.12 Une paramétrisation de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t \right).$$

Preuve. Il est clair que $\{M(t), t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\} \subset \mathcal{H}$. Réciproquement soit $M(x, y)$ un point de l'hyperbole alors $x \neq 0$ et le couple $(X, Y) = \left(\frac{a}{x}, \frac{ay}{bx} \right)$ vérifie $X^2 + Y^2 = 1$ et $X \neq 0$; on sait qu'il existe un unique $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ tel que $(\cos t, \sin t) = (X, Y)$. $\square$

Proposition 1.13 Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$, d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors l'équation de sa tangente au point $M_0(x_0, y_0)$ est

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Preuve Avec la paramétrisation choisie, $M_0(x_0, y_0) = M(t_0)$ et f étant simple et régulière, un vecteur directeur de la tangente en $M(t_0)$ a pour coordonnées $\left(a \frac{\sin t_0}{\cos^2 t_0}, b \frac{1}{\cos^2 t_0} \right) = bx_0 \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2} \right)$. $M(x, y)$ appartient à la tangente si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{y_0}{b^2} \\ y - y_0 & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0$$

et le résultat en utilisant que $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. $\square$

Remarque 1.14 Si l'on note $\mathcal{H}_1 = \{M(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x > 0\}$ et $\mathcal{H}_2 = \{M(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x < 0\}$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. Un autre paramétrage classique possible de l'hyperbole est donné par $f_1 \vee f_2$ où

$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\epsilon_i a \sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}}, t).$$

ou encore donné par $g_1 \vee g_2$ où

$$g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\epsilon_i a \cosh t, b \sinh t).$$

avec $\epsilon_1 = 1$ et $\epsilon_2 = -1$.

Chacun d'eux conduisant bien sûr à la même équation cartésienne de la tangente.

Afin d'établir une propriété intéressante de la tangente nous allons utiliser une équation cartésienne de l'hyperbole dans un autre repère qui sera celui de ses asymptotes. Cette fois-ci ce ne sera pas nécessairement un repère orthogonal. On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs des asymptotes de l'hyperbole et toujours O son centre. Alors dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ est $xy = k$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ ce qui nous permet d'obtenir la paramétrisation évidente suivante.

Proposition 1.15 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de centre O et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs de ses asymptotes. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ une paramétrisation de $\mathcal{H}$ est donnée par

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(t, \frac{k}{t} \right).$$

Proposition 1.16 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de centre O et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs de ses asymptotes. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de sa tangente au point $M_0(x_0, y_0)$ est

$$y_0 x + x_0 y = 2k.$$

Preuve. La paramétrisation est simple et régulière et un vecteur directeur de la tangente au point $M_0(x_0)$ a pour coordonnées $(1, -\frac{k}{x_0^2}) = \frac{1}{x_0}(x_0, -y_0)$ puis on termine comme précédemment. $\square$

Proposition 1.17 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de centre O et d'asymptotes Δ et Δ' . Soient M un point de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}_M$ la tangente à $\mathcal{H}$ au point M . On note $N = \mathcal{T}_M \cap \Delta$ et $N' = \mathcal{T}_M \cap \Delta'$ alors $M = m[N, N']$.

Preuve. Dans le repère des asymptotes, nous avons comme dans la proposition 1.16, que si M a pour coordonnées (x_0, y_0) alors $N(2x_0, 0)$ et $N'(0, 2y_0)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 1.18 Nous obtenons ainsi une méthode de construction de la tangente, le point M étant connu. Avec les notations ci-dessus, on construit Q le projeté de M sur Δ parallèlement à Δ' et Q' le projeté de M sur Δ' parallèlement à Δ , alors (par Thalès) $Q = m[O, N]$ et $Q' = m[O, N']$, (NN') est la tangente à $\mathcal{H}$ en M .

2 Conséquences de la définition bifocale.

Nous savons que la définition bifocale de l'ellipse $\mathcal{E}$ (resp. de l'hyperbole $\mathcal{H}$) de foyers F et F' est $\mathcal{E} = \{M \in P \mid MF + MF' = 2a\}$ (resp. $\mathcal{H} = \{M \in P \mid |MF - MF'| = 2a\}$).

Nous savons aussi grâce à la première partie qu'il existe une paramétrisation simple et régulière de ces ensembles. Ceci va nous permettre de donner d'autres propriétés des tangentes et normales sans pour autant avoir besoin d'une expression explicite de ce paramétrage.

2.1 Résultats

Lemme 2.1 Soient F un point fixe du plan et $\mathcal{C}$ une courbe, ne contenant pas F , paramétrée par f fonction dérivable sur I . Alors si l'on note M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $f(t)$

$$\frac{dMF}{dt} = \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} \cdot \frac{d\overrightarrow{MF}}{dt}$$

où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Preuve. La fonction $t \mapsto MF$ est dérivable car pour tout t , $MF \neq 0$. De plus $MF^2 = \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MF}$ et par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$2MF \frac{dMF}{dt} = 2\overrightarrow{MF} \cdot \frac{d\overrightarrow{MF}}{dt}$$

et le résultat en divisant par MF . $\square$

Théorème 2.2 Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de foyers F et F' distincts, alors la tangente $\mathcal{T}_M$ à $\mathcal{E}$ au point M est la bissectrice extérieure au triangle FMF' . La normale est la bissectrice intérieure.

Preuve. Il est clair que le résultat sur la normale est une conséquence du résultat sur la tangente.

Par définition bifocale de l'ellipse, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$. En appliquant le lemme 2.1 (les foyers ne sont pas des points de l'ellipse) on obtient

$$\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} \cdot \frac{d\overrightarrow{MF}}{dt} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'} \cdot \frac{d\overrightarrow{MF'}}{dt} = 0$$

et si l'on note O le centre de l'ellipse $\frac{d\overrightarrow{MF}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{MF'}}{dt} = -\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ puisque O, F et F' sont des points fixes. On a donc l'égalité

$$\left(\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'} \right) \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 0.$$

Le vecteur $\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}$ est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure du triangle FMF' à condition que celui-ci

en soit un, (soit si $F \neq F'$ ou encore si l'ellipse n'est pas un cercle) et $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}_M$. La tangente est perpendiculaire au point M à la bissectrice intérieure, c'est la bissectrice extérieure. Si l'ellipse est un cercle, on retrouve que la tangente est perpendiculaire au rayon. $\square$

Théorème 2.3 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyers F et F' , alors la tangente $\mathcal{T}_M$ à $\mathcal{H}$ au point M est la bissectrice intérieure au triangle FMF' . La normale est la bissectrice extérieure.

Preuve. Par définition bifocale de l'hyperbole, $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$. Ce qui nous donne cette fois-ci $\frac{d(MF - MF')}{dt} = 0$ puis

$$\left(\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} - \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'} \right) \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 0.$$

On conclue en utilisant que $\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} - \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}$ est un vecteur directeur de la bissectrice extérieure du triangle FMF' . $\square$

Corrolaire 2.4 Les ellipses et les hyperboles homofocales sont orthogonales.

2.2 Application à la construction des tangentes.

Nous travaillons toujours avec l'ellipse $\mathcal{E}$ (resp. de l'hyperbole $\mathcal{H}$) de foyers F et F' , soit $\mathcal{E} = \{M \in P \mid MF + MF' = 2a\}$ (resp. $\mathcal{H} = \{M \in P \mid |MF - MF'| = 2a\}$).

Définition 2.5 On appelle **cercle directeur** de foyer F , le cercle de centre F et rayon $2a$.

Proposition 2.6 Le lieu géométrique des symétriques d'un foyer de l'ellipse par rapport aux tangentes est le cercle directeur de l'autre foyer.

Preuve. Commençons par montrer que le lieu des symétriques de F est inclus dans le cercle directeur de F' . Puisque $\mathcal{T}_M$ la tangente à l'ellipse au point M est bissectrice extérieure de FMF' , si l'on note $N = s_{\mathcal{T}_M}(F)$ alors F' , M et N sont alignés et M entre F' et N . D'où $F'N = F'M + MN = F'M + MF = 2a$.

Montrons maintenant l'inclusion contraire.

Soit N un point du cercle directeur de F' , alors $(F'N)$ et la médiatrice Δ_N du segment $[FN]$ sont sécantes car $F'N > FF'$, nous notons M ce point d'intersection. M est entre F' et N puisque ces deux points ne sont pas dans le même demi plan de frontière la médiatrice Δ_N ($F'N > FF'$). D'où $F'M + FM = F'M + MN = F'N = 2a$, M est sur l'ellipse et Δ_N est la tangente à l'ellipse en ce point (cf. c'est par construction la bissectrice extérieure du triangle $F'MF$). $\square$

Remarque 2.7 Cela nous donne une nouvelle construction de l'ellipse par point et tangente connaissant ses deux foyers et le cercle directeur d'un de ses foyers.

Corrolaire 2.8 Le lieu géométrique des projections orthogonales des foyers sur les tangentes est le cercle principal.

Preuve. L'homothétie de centre F et de rapport $1/2$ envoie le cercle directeur de foyer F' sur le cercle principal. $\square$

Proposition 2.9 Le lieu géométrique des symétriques d'un foyer de l'hyperbole par rapport aux tangentes et aux asymptotes est le cercle directeur de l'autre foyer.

Preuve. Commençons par montrer que le lieu des symétriques de F par rapport aux tangentes est inclus dans le cercle directeur de F' .

Puisque $\mathcal{T}_M$ la tangente à l'hyperbole au point M est bissectrice intérieure de FMF' , si l'on note $N = s_{\mathcal{T}_M}(F)$ alors F' , M et N sont alignés et M à l'extérieur du segment $[F'N]$. D'où $F'N = |F'M - MN| = |F'M - MF| = 2a$.

Considérons maintenant les symétriques par rapport aux asymptotes.

Soit Δ une asymptote, elle passe par le centre O de l'hyperbole (milieu de $[F'F]$) donc $N = s_{\Delta}(F)$ est tel que $F'N = 2ON_1$ avec N_1 milieu du segment $[NF]$. De plus le triangle ON_1F est rectangle en N_1 et $OF = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\frac{N_1F}{N_1O} = \frac{b}{a}$ donc $ON_1 = a$. On a bien $F'N = 2a$.

Pour l'inclusion contraire, soit N un point du cercle directeur de F' et notons Δ_N la médiatrice du segment $[NF]$. Si Δ_N et $(F'N)$ sont parallèles (ce qui se produit lorsque la droite (FN) est tangente au cercle directeur de F') alors on montre facilement que Δ_N est une asymptote et F est le symétrique de N par rapport à cette asymptote. Sinon notons M le point d'intersection de $(F'N)$ et Δ_N alors $|MF' - MF| = |MF' - MN| = F'N = 2a$ car N et F' sont dans le même demi-plan de frontière Δ_N (cf. $NF' = 2a < F'F$). M est un point de l'hyperbole et par construction Δ_N bissectrice intérieure du triangle $F'MF$ c'est donc la tangente à l'hyperbole en ce point. $\square$

Remarque 2.10 Cela nous donne une nouvelle construction de l'hyperbole par point et tangente, ainsi que de ses asymptotes, connaissant ses deux foyers et le cercle directeur d'un de ses foyers.

3 Conséquences de la définition par foyer et directrice.

Rappelons que la définition d'une conique $\mathcal{C}$ par foyer F et directrice $\mathcal{D}$ est $\mathcal{C} = \{M \in P \mid MF = e d(M, \mathcal{D})\}$. Pour $0 < e < 1$ on obtient les ellipses (à l'exception des cercles), $e = 1$ les paraboles et $e > 1$ les hyperboles.

Théorème 3.1 *Soit $\mathcal{C}$ la conique de foyer F et directrice $\mathcal{D}$. Alors pour tout point M de la conique non situé sur l'axe focal, la tangente T en M coupe $\mathcal{D}$ en T et le triangle FMT est rectangle en F .*

Preuve. Nos utilisons à nouveau le fait que nous savons qu'il existe une paramétrisation simple et régulière de ces coniques. On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ et le repère est choisi de sorte que l'axe des abscisses soit l'axe focal et l'axe des ordonnées soit $\mathcal{D}$. Alors $M(x(t), y(t))$, $H(0, y(t))$, $T(0, y_1(t))$ et en dérivant l'égalité $MF^2 = e^2 MH^2$ on obtient

$$\overrightarrow{MF} \cdot \frac{d\overrightarrow{MF}}{dt} = e^2 \overrightarrow{HM} \cdot \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt} = e^2 x(t)x'(t). \quad (1)$$

De plus $\overrightarrow{MT}$ est colinéaire à $\frac{d\overrightarrow{MF}}{dt}$ car tous les deux sont vecteurs directeurs de la tangente, soit, $\overrightarrow{MT} = \lambda(t) \frac{d\overrightarrow{MF}}{dt}$ et pour leurs abscisses $x(t) = \lambda(t)x'(t)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{FT} &= \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MT} \\ &= -MF^2 + \lambda(t) \overrightarrow{MF} \cdot \frac{d\overrightarrow{MF}}{dt} \\ &= -MF^2 + \lambda(t) e^2 x(t)x'(t) \end{aligned}$$

grâce à (1) et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{FT} &= -MF^2 + e^2 x^2(t) \\ &= -MF^2 + e^2 MH^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le triangle FMT est rectangle en F . □

Remarque 3.2 1. *Cela nous donne une construction des tangentes à la conique en un point M connu (à l'exception des sommets situés sur l'axe focal mais on sait qu'alors la tangente est perpendiculaire à l'axe focal). En particulier, les tangentes aux points de la conique situés à la verticale du foyer coupent la directrice au point intersection de la directrice et de l'axe focal.*

On trace la perpendiculaire à la droite (FM) en F et l'on note T son point d'intersection avec la directrice (associée au foyer F) alors la droite (TM) est la tangente à la conique au point M .

2. *On retrouve ainsi que la tangente à la parabole au point M est la médiatrice du segment $[FH]$ puisque les triangles FMT et MHT sont tous les deux rectangles, ont même hypoténuse et ont deux cotés de même longueur ($MF = MH$), ils sont donc isométriques.*

3. *Si l'on s'intéresse seulement à la parabole, le résultat FMT rectangle en F , est immédiat dès que l'on a établi que (MT) est la médiatrice de $[FH]$.*

4 Commentaires.

1. Il faut bien sûr faire les dessins illustrant les propriétés géométriques que nous venons de voir. L'utilisation du transparent est ici bienvenue.
2. C'est certainement trop long donc faites un choix.

3. Savez-vous expliquer le résultat annoncé en préambule donnant l'existence de la tangente et un vecteur directeur de celle-ci? Sinon pensez à Taylor-Young à l'ordre 1.
4. Les équations cartésiennes des tangentes des coniques sont au final toutes les trois de la même forme, c'est-à-dire obtenues par "dédoublément" de l'équation cartésienne de la conique. Ceci s'explique par le fait que ces équations sont de la forme $F(x, y) = 0$ avec F polynôme de degré 2 de différentielle non nulle, on sait alors (via les fonctions implicites) que $(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0))$ est un vecteur normal à la courbe au point de coordonnées $M_0(x_0, y_0)$. Ici sachant qu'il existe une paramétrisation simple et régulière on peut le retrouver sans avoir à évoquer les fonctions implicites puisque en dérivant $F(x(t), y(t)) = 0$ on obtient $\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = 0$ soit les vecteurs de coordonnées $(\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)), \frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)))$ et $(x'(t_0), y'(t_0))$ sont orthogonaux.
5. Peut-on espérer avoir une paramétrisation continue de l'hyperbole définie sur un seul intervalle? Non puisque l'hyperbole n'est pas connexe et l'image d'un connexe par une application continue est un connexe.
6. Intersection d'une droite avec une conique.

Théorème 4.1 (a) Une droite rencontre une conique en au plus deux points.

(b) Une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle la rencontre en un seul point.

(c) Une droite, non parallèle aux asymptotes, est tangente à l'hyperbole si et seulement si elle la rencontre un seul point.

(d) Une droite, non parallèle à l'axe focal, est une tangente de la parabole si et seulement si elle la rencontre un seul point.

Preuve. Pour montrer ce résultat nous allons utiliser les équations cartésiennes des coniques rappelées en première partie et une paramétrisation d'une droite du plan

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + x_0 \\ y(t) = \beta t + y_0 \end{cases}$$

Chercher ses points d'intersections avec une conique revient à résoudre une équation du second degré en t , elle admet au plus deux solutions.

Si l'on suppose maintenant que cette droite rencontre la conique en un point, on peut supposer que ce point a pour coordonnées (x_0, y_0) et la droite rencontre la conique en un seul point si et seulement si $t = 0$ est l'unique solution de

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2}\right)t = 0$$

pour l'ellipse, soit si et seulement si $\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} = 0$, la droite est la tangente à l'ellipse au point de paramètre $t = 0$.

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} - \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}\right)t = 0$$

pour l'hyperbole. Le cas $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0$ correspond à une droite parallèle aux asymptotes, ce qui est exclu. La solution $t = 0$ est unique si et seulement si $\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} = 0$, la droite est la tangente à l'hyperbole au point de paramètre $t = 0$.

$$(\beta t + y_0)^2 = 2p(\alpha t + x_0) \Leftrightarrow \beta^2 t^2 + (2\beta y_0 - 2p\alpha)t = 0$$

pour la parabole. Le cas $\beta = 0$ correspond à une droite parallèle à l'axe focal, ce qui est exclu. La solution $t = 0$ est unique si et seulement si $2\beta y_0 - 2p\alpha = 0$, la droite est la tangente à la parabole au point de paramètre $t = 0$. $\square$

7. On peut re-investir les résultats sur la parabole dans l'exposé 48, tirer un exemple de recherche de tangente pour l'exposé 47.

5 Bibliographie.

M. Audin, *Géométrie*, EDP Sciences.

J-M. Monier, *Géométrie*, Dunod.

P. Tauvel, *Géométrie*, Dunod.