Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Chantal Menini

18 mai 2009

Dans cet exposé nous supposerons bien sûr connues les notions de limites, continuité, dérivabilité. Nous supposerons de plus connue l'égalité des accroissements finis. On peut donner une preuve directe de l'inégalité des accroissements finis sans utiliser l'égalité mais son niveau de difficulté technique fait que nous déconseillons fortement sa présentation le jour de l'oral, elle est indiquée à la fin à titre d'information.

1 Inégalité des accroissements finis.

1.1 Résultat.

Théorème 1.1 ***Inégalité des accroissements finis.*** *Soient f et g continues sur l'intervalle non réduit à un point $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, telles que pour tout t élément de $]a,b[$: $f'(t) \leq g'(t)$. Alors*

$$f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a).$$

Preuve. Considérons la fonction auxiliaire $h = g - f$, elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Avec l'égalité des accroissements finis il existe $c \in]a,b[$ tel que $h(b) - h(a) = (b-a)h'(c)$. Aves les hypothèses $h'(c) \geq 0$ donc $h(b) - h(a) \geq 0$ et $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$. □

Corrolaire 1.2

1. *Soit f continue sur l'intervalle non réduit à un point $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle qu'il existe α et β tels que pour tout t élément de $]a,b[$: $\alpha \leq f'(t) \leq \beta$. Alors*

$$\alpha(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \beta(b-a).$$

2. *Soient f et g continues sur l'intervalle non réduit à un point $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, telles que pour tout t élément de $]a,b[$: $|f'(t)| \leq g'(t)$. Alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

3. *Soit f continue sur l'intervalle non réduit à un point $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle qu'il existe M tel que pour tout t élément de $]a,b[$: $|f'(t)| \leq M$. Alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

Preuve. Pour l'inégalité de droite de l'assertion (1) on applique le théorème avec la fonction g définie par $g(t) = \beta t$. L'inégalité de gauche en appliquant le théorème à $-f$.
Pour l'assertion (2) : $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$ équivaut à $-g(b) + g(a) \leq f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$, l'inégalité de droite est une application directe du théorème et celle de gauche est obtenue en remplaçant f par $-f$.
L'assertion (3) se déduit de l'assertion (1) avec $\alpha = -M$ et $\beta = M$ (ou de l'assertion (2) avec $g(t) = Mt$). □

Remarque 1.3 *L'assertion (1) du corrolaire peut aussi être prise comme point de départ (voir comment on en déduit le théorème).*

1.2 Interprétation graphique.

Avec toujours les hypothèses f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si l'on suppose de plus que f' est bornée sur $]a,b[$ (quelle peut-être une condition suffisante sur f pour que ceci soit vrai ?) ; alors en notant $m = \inf_{]a,b[} f'$ et $M = \sup_{]a,b[} f'$, la courbe représentative de f est dans la partie du plan délimitée par les droites d'équations $y = f(a) + M(x-a)$, $y = f(b) + M(x-b)$, $y = f(a) + m(x-a)$ et $y = f(b) + m(x-b)$.

1.3 Applications immédiates.

1.3.1 Calcul d'une valeur approchée.

Par exemple on veut une valeur approchée de $\sqrt{401}$, on applique le corrolaire 1.2 (1) à la fonction racine sur l'intervalle $[400,401]$ et on obtient que $\frac{1}{2\sqrt{401}} \leq \sqrt{401} - \sqrt{400} \leq \frac{1}{2\sqrt{400}}$. Puis en remarquant que $(20.025)^2 > 401$ on a $20 + \frac{100}{4005} \leq \sqrt{401} \leq 20 + \frac{100}{4000}$.

1.3.2 Encadrement de fonctions.

Le théorème des accroissements finis permet à partir d'une inégalité sur des fonctions d'en déduire une inégalité sur leurs primitives s'annulant en un même point, en itérant ceci par exemple avec la fonction cos on obtient pour $x > 0$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -x \leq \sin x \leq x \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \Rightarrow \dots$$

2 Exemples d'applications à l'étude de fonctions.

2.1 Lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction.

Théorème 2.1 *Soit une fonction f dérivable sur $]a,b[$, alors*

1. *f croissante sur $]a,b[$ si et seulement si f' positive sur $]a,b[$.*
2. *f décroissante sur $]a,b[$ si et seulement si f' négative sur $]a,b[$.*
3. *f constante sur $]a,b[$ si et seulement si f' identiquement nulle sur $]a,b[$.*

Preuve. Montrons (i).
Soit $x_0 \in]a,b[$, si f est croissante sur $]a,b[$ alors pour tout $x \in]x_0, b[$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ puis en faisant tendre x vers x_0 on obtient $f'(x_0) \geq 0$ (cf. on sait que la limite existe puisque f est dérivable sur $]a,b[$). Réciproquement si l'on suppose que pour tout $t \in]a,b[$, $f'(t) \geq 0$ alors pour tout $x < y$ éléments de $]a,b[$ on a avec l'inégalité des accroissements finis $f(y) - f(x) \geq 0$ et f est croissante sur $]a,b[$.
La deuxième assertion se démontre de la même façon et la troisième découle des deux premières (une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante) ou peut encore se montrer directement de le même façon. □

2.2 Demi-tangente.

Proposition 2.2 *Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on suppose de plus que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l$. Alors $f'_d(a)$ la dérivée à droite de f en a existe et vaut l.*

Preuve. Par définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h_\varepsilon \ : \ a < x < a + h_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq f'(x) \leq l + \varepsilon.$$

Avec l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[a,x]$,

$$l - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq l + \varepsilon$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h_\varepsilon \ : \ a < x < a + h_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie bien que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l = f'_d(a)$. □

Remarque 2.3 *1. Le résultat est encore vrai sans l'hypothèse de continuité en a (en supposant seulement f dérivable sur $]a, b[$) mais la démonstration dans ce cas dépasse le programme de l'oral.*

2. Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) on peut montrer de même que le taux d'accroissement en a tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on a alors une demi-tangente verticale.

3. La réciproque est fausse, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ et en 0 par $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors que $\forall x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0.

Corrolaire 2.4 *Soient I un intervalle non trivial, x_0 un point intérieur de I et f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose de plus que $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$, alors f' est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.*

2.3 Inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 2.5 *Soit f une fonction $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$ et il existe M tel que pour tout $t \in]a, b[$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Preuve. On applique le corrolaire 1.2 (2) à la fonction h définie par

$$h(t) = f(t) - f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

□

2.4 Encadrement de fonctions (suite).

Proposition 2.6 *Pour tout réel $x > 0$, pour tout entier n*

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Corrolaire 2.7 $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Preuve. Sinon $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers, en appliquant la proposition précédente, nous obtenons pour tout entier $n \geq q$

$$0 < n!(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) \leq \frac{e}{n+1}$$

pour n assez grand ($n \geq \max(2, q)$ convient) le terme du milieu est un entier strictement positif et strictement inférieur à 1, d'où la contradiction. □

Preuve de la proposition. Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et prenons pour hypothèse de récurrence

$$(H_n) \quad : \quad \forall x > 0, \quad 0 < e^x - P_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

La fonction exp est strictement croisssante sur $]0,+\infty[$, d'où $0 < e^x - P_0(x)$ pour tout $x > 0$. De plus pour tout $t \in [0,x]$, $e^t \leq e^x$ dont on déduit, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0,x]$, que $e^x - P_0(x) \leq xe^x$. (H_0) est vérifiée.
Pour montrer que (H_n) implique (H_{n+1}) on pose $h_n(x) = e^x - P_n(x)$ avec x réel positif.
h_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'_{n+1} = h_n$, ainsi avec (H_n), $h'_{n+1}(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et par continuité de h_{n+1}, $h_{n+1}(x) > h_{n+1}(0)$ pour tout $x > 0$ soit $h_{n+1}(x) > 0$.
Toujours avec (H_n) et la croissance de la fonction exp

$$\forall t \in]0,x[, \quad h'_{n+1}(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^t \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^x$$

puis avec l'inégalité des accroissements finis

$$h_{n+1}(x) - h_{n+1}(0) \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}e^x$$

soit (H_{n+1}).
(H_0) est vérifiée, pour tout entier positif ou nul n, (H_n) implique (H_{n+1}) donc (H_n) est vérifiée pour tout entier n positif ou nul. □

3 Lien avec les suites.

3.1 Théorème du point fixe.

Théorème 3.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose de plus qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq k$.*
Alors f admet un unique point fixe sur $[a,b]$ et c'est la limite de la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [a,b] \end{cases}.$$

Preuve. Existence du point fixe : on introduit la fonction auxiliaire g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a,b]$ et $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$. Avec le théorème des valeurs intermédiaires il existe $l \in [a,b]$ tel que $g(l) = 0$ soit $f(l) = l$.
Unicité du point fixe : sinon soient l et l' deux points fixes de f, on peut supposer $l < l'$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[l,l']$ on obtient $|f(l) - f(l')| \leq k|l-l'|$ soit $(1-k)|l-l'| \leq 0$ avec par hypothèse $1-k > 0$. On obtient $l = l'$, contradiction.
Convergence de la suite : commençons par remarquer qu'avec les hypothèses $u_0 \in [a,b]$ et $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$ la suite est bien définie et à valeurs dans $[a,b]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis entre u_n et l on a

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|$$

puis après une récurrence immédiate

$$|u_n - l| \leq k^n|u_0 - l|.$$

Or $k \in [0,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$ et la suite $(u_n)_n$ est convergente et converge vers l. □
Exemple. Calcul approché de $\sqrt{2}$, on considère la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

c'est la suite de Héron ou encore la suite obtenue lorsqu'on applique la méthode de Newton pour le calcul de valeurs approchées de racines d'une équation.
On applique le théorème précédent à $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1,2]$.

Remarque 3.2 1. *Si on sait déjà que la suite définie dans le théorème 3.1 converge alors par continuité de la fonction f, sa limite est nécessairement un point fixe de f.*

2. *La convergence de la suite peut aussi se montrer sans avoir établi au préalable que la fonction f admet un point fixe. Grâce à l'inégalité des accroissements finis, de la même façon que l'on a montré dans la preuve ci-dessus que la suite converge vers l, on peut montrer directement que la suite est de Cauchy et donc converge (ceci dépasse le programme de l'oral aussi nous ne le présentons pas mais ce peut être un bon exercice pour l'écrit).*
3. *Résultat faux pour $k = 1$, considérer par exemple $f(x) = x$.*

3.2 Comparaison intégrale et série.

Une application qui dépasse le programme de l'oral mais qui est bien classique et pas si éloignée que cela de l'exercice proposé après, lui bien dans le programme.

Théorème 3.3 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ sont de même nature.*

Preuve. La fonction f est vue comme la dérivée d'une de ses primitive $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$. Par décroissance de f, pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ et avec l'inégalité des accroissements finis sur $[n, n+1]$ nous avons

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

et en sommant

$$-f(1) + \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(t)\,dt \leq -f(N) + \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

et le résultat sur la convergence ou divergence simultanées (rappel : f étant **positive** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge si et seulement si $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+N} f(n) = +\infty$ et de même $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge si et seulement si $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^N f(x)\,dx = +\infty$). $\square$

Un exercice dont la résolution se fait dans le même esprit que la démonstration précédente.

Exercice. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$ converge et calculer sa limite (réponse $l = \ln 2$).

4 Cas des fonctions à valeurs complexes.

Nous avons demontré l'inégalité des accroissements finis à partir du théorème des accroissements finis qui lui même découle du théorème de Rolle. Or le théorème de Rolle n'est plus vrai pour les fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes, penser à $f(t) = e^{it}$ alors $f(0) = 1 = f(2\pi)$ et pourtant $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$. On peut donc se poser la question si l'inégalité des accroissements finis elle reste valable, c'est en effet le cas.

Théorème 4.1 *Soient f et g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, f à valeurs complexes, g à valeurs réelles et telles que*

$$\forall t \in]a, b[\ |f'(t)| \leq g'(t).$$

Alors $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Preuve. On introduit la fonction auxiliaire h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = Re\Big(\big(f(x) - f(a)\big) \cdot \overline{\big(f(b) - f(a)\big)}\Big)$. h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et à valeurs réelles. De plus par linéarité du produit et de la partie réelle, $h'(x) = Re\Big(f'(x) \cdot \overline{\big(f(b) - f(a)\big)}\Big)$ d'où avec les hypothèses $|h'(x)| \leq g'(x)|f(b) - f(a)|$ pour tout $x \in]a, b[$. Avec l'inégalité des accroissements finis (cf. h et g sont des fonctions à valeurs réelles) on a $|h(b) - h(a)| \leq (g(b) - g(a))|f(b) - f(a)|$ soit $|f(b) - f(a)|^2 \leq (g(b) - g(a))|f(b) - f(a)|$. Si $f(b) - f(a) = 0$ le résultat demandé est trivial et sinon on l'obtient à partir de la dernière inégalité en simplifiant par $|f(b) - f(a)|$. $\square$

Remarque 4.2 *On pourra remarquer que nous utilisons dans cette preuve que le module $|\ |$ est une norme issue du produit scalaire $(x,y) \mapsto Re\big(x \cdot \overline{y}\big)$, pour le calcul de dérivée nous utilisons la bilinéarité du produit scalaire et pour la majoration l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ce résultat se généralise donc sans difficulté pour une fonction réelle à valeur dans un espace euclidien (hors programme).*

5 Commentaires.

- Pas beaucoup d'inspiration pour les illustrations à l'aide de la calculette, on peut visualiser l'interprétation graphique 1.2 de l'inégalité des accroissements finis ou illustrer le théorème du point fixe.
- La partie sur le théorème de l'inégalité des accroissements finis est très courte donc soignez les applications présentées.
- Nous avons mis dans les premières applications le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Ne la mettez pas si pour démontrer le théorème 1.1 (en reprenant les notations de la preuve) vous utilisez que h' positive donc h croissante...
- Comme annoncé au début, une preuve de l'inégalité des accroissements finis n'utilisant pas les accroissements finis (elle reste valable si l'on remplace la valeur absolue par une norme). Preuve extraite de Ramis, Deschamps et Odoux, Cours de mathématiques spéciales.

  Nous allons montrer l'assertion (2) du corrolaire 1.2.

  Pour tout $\varepsilon > 0$ nous introduisons la fonction

$$\varphi_\varepsilon(t) = |f(t) - f(a)| - g(t) + g(a) - \varepsilon(t-a) - \varepsilon$$

  et l'ensemble $E_\varepsilon = \{t \in [a,b] \mid \varphi_\varepsilon(t) \leq 0\}$. Notre but est de montrer que $b \in E_\varepsilon$.

  $\varphi_\varepsilon(a) = -\varepsilon$ donc E_ε est non vide et comme cet ensemble est majoré par b, on a $c_\varepsilon := \sup E_\varepsilon$ qui est lui aussi majoré par b et par continuité de φ_ε, $c_\varepsilon \in E_\varepsilon$ et $c_\varepsilon > a$.

  Si $c_\varepsilon = b$ c'est terminé.

  Sinon $c_\varepsilon \in]a,b[$ et $f'(c_\varepsilon) = \lim\limits_{x \to c_\varepsilon} \frac{f(x)-f(c_\varepsilon)}{x-c_\varepsilon}$ (de même $g'(c_\varepsilon) = \lim\limits_{x \to c_\varepsilon} \frac{g(x)-g(c_\varepsilon)}{x-c_\varepsilon}$). D'où

$$\begin{aligned} \exists x_\varepsilon \in]c_\varepsilon, b[\quad &: \quad \left|\frac{f(x_\varepsilon)-f(c_\varepsilon)}{x_\varepsilon - c_\varepsilon} - f'(c_\varepsilon)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \\ \exists x_\varepsilon \in]c_\varepsilon, b[\quad &: \quad \left|\frac{g(x_\varepsilon)-g(c_\varepsilon)}{x_\varepsilon - c_\varepsilon} - g'(c_\varepsilon)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

  On en déduit que

$$\begin{aligned} \Big|f(x_\varepsilon) - f(a)\Big| \quad &< \quad \Big|f(c_\varepsilon) - f(a)\Big| + |f'(c_\varepsilon)|(x_\varepsilon - c_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{3}(x_\varepsilon - c_\varepsilon) \\ g(x_\varepsilon) - g(a) \quad &> \quad g(c_\varepsilon) - g(a) + g'(c_\varepsilon)(x_\varepsilon - c_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{3}(x_\varepsilon - c_\varepsilon) \end{aligned}$$

  Ce qui donne

$$\exists x_\varepsilon \in]c_\varepsilon, b[: \ \varphi(x_\varepsilon) < \varphi(c_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{3}(x_\varepsilon - c_\varepsilon) \leq 0$$

  et la contradiction avec $c_\varepsilon := \sup E_\varepsilon$.

  Donc $c_\varepsilon = b$.

  On a donc obtenu que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

  soit

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$