

Fonctions logarithmes.

Chantal Menini

19 mai 2009

Les logarithmes ont été inventés par John Napier (1550-1617) pour transformer produits en sommes, racine carrée par division par 2, etc. C'est Briggs qui publia des tables de logarithmes en base 10. Deux cents ans après leur invention Laplace dira que les logarithmes, en abrégant leur labeur, doublait la vie des astronomes. (extrait de www.bibmath.net)

Pour cette leçon nous supposerons connus la dérivation, en particulier la dérivation des fonctions composées et le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée. Nous supposerons connu le théorème des valeurs intermédiaires, la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné et l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle non trivial. En revanche la fonction exponentielle n'est pas supposée connue.

1 Introduction.

On cherche à trouver une fonction qui transforme produit en somme, c'est-à-dire telle que pour tout x et y appartenant à un ensemble E , à préciser, on ait

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Commençons par remarquer que la fonction nulle est toujours solution de ce problème et que c'est la seule si E contient 0. En effet on a alors $f(0) = f(x \times 0) = f(x) + f(0)$.

Si l'on suppose maintenant E symétrique par rapport à 0 et contenant 1, alors toute solution f est une fonction paire. En effet $f(1) = f(1 \times 1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$, puis $2f(-1) = f(1) = 0$ et $f(-x) = f(x) + f(-1) = f(x)$.

C'est pourquoi on va chercher à trouver toutes les fonctions solutions pour $E = \mathbb{R}_+^*$. Si on cherche celles qui sont dérivables on arrive alors à la condition nécessaire suivante (en dérivant par rapport à y puis en posant $y = 1$)

$$xf'(x) = f'(1) \quad \text{et} \quad f(1) = 0.$$

Nous allons donc tout particulièrement nous intéresser à la fonction f telle que pour tout x réel strictement positif, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(1) = 0$.

On remarquera que parmi les fonctions connues (polynomiale, fraction rationnelle, puissance, trigonométrie) aucune n'a pour dérivée la fonction inverse.

2 La fonction Logarithme népérien.

2.1 Définition et conséquences immédiates.

Définition 2.1 On appelle **logarithme népérien** la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1. On la note $\ln$.

Cette fonction est bien définie puisque toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle. De plus dès que l'on impose la valeur de la fonction primitive en un point de l'intervalle, il y a existence et unicité de cette primitive.

Théorème 2.2

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Preuve. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et on dérive la fonction $g : y \mapsto \ln(xy) - \ln(y)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par définition de la fonction $\ln$, on a $g'(y) = \frac{x}{xy} - \frac{1}{y} = 0$ et $g(1) = \ln(x)$. $\square$

Corrolaire 2.3 1. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln(a^r) = r \ln a$.

Preuve.

Pour la première assertion : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b$ d'où le résultat.

Pour la deuxième assertion on commence à montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que $\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout entier naturel n puis en utilisant que $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -\ln(a^n) = -n \ln a$ on a l'assertion 2 pour tous les entiers relatifs.

Enfin en utilisant que $\ln a = \ln\left[\left(a^{1/n}\right)^n\right] = n \ln\left(a^{1/n}\right)$ on obtient que pour tout entier non nul $\ln\left(a^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \ln a$ et on termine avec les rationnels en utilisant que $r = p/q$ avec p entier relatif et q entier strictement positif. $\square$

2.2 Etude de la fonction $\ln$.

Proposition 2.4 La fonction $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve. C'est immédiat puisque qu'elle est dérivable et de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. $\square$

Lemme 2.5 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x$.

Preuve. Pour $x \in]0, 1]$ $\ln x \leq 0 \leq x$ par croissance de la fonction $\ln$ et pour tout $x \geq 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x 1 dt \leq x$. $\square$

Théorème 2.6 (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

Preuve.

(i) Par stricte croissance de la fonction $\ln$, $\ln 2 > 0$ et $\ln(2^n) = n \ln 2$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Toujours par croissance $\forall x \geq 2^n \quad \ln x \geq n \ln 2$ d'où l'assertion (i).

(ii) $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, nous concluons avec la composition des limites.

(iii) Avec le lemme 2.5, nous avons pour tout $x > 0$, $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ soit $\ln x \leq 2\sqrt{x}$ et $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq 2 \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \geq 1$.

Nous concluons avec le théorème des gendarmes.

(iv) Elle résulte de l'assertion précédente pour $y = 1/x$. $\square$

Corrolaire 2.7 $\forall r \in \mathbb{Q}_+^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$.

Preuve. Cela résulte directement des assertions (iii) et (iv) précédentes pour $y = x^r$. $\square$

Théorème 2.8 La fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve. La fonction $\ln$ est une fonction continue strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires la fonction $\ln$ est donc une fonction continue strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ soit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

Définition 2.9 On note e le réel tel que $\ln e = 1$.

Proposition 2.10 La fonction $\ln$ est une fonction concave.

Preuve. Elle est deux fois dérivable sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée seconde la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ qui est négative. $\square$

Corrolaire 2.11 La courbe représentative de la fonction $\ln$ est sous ses tangentes.

En particulier $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $\ln$ en exploitant asymptote, branche parabolique, courbe sous tangente.

3 Les fonctions logarithmes.

Définition 3.1 Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle **fonction logarithme de base a** , la fonction notée $\log_a$ et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Remarque 3.2 La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e . La fonction $\log_{10}$ est usuellement appelée logarithme décimal et est notée $\log$.

Proposition 3.3 1. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

2. $\forall r \in \mathbb{Q}, \log_a(a^r) = r$.

3. Si $a > 1$ alors $\log_a$ est une fonction continue, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. De plus

(a) si $a > e$ alors $|\log_a(x)| < |\ln(x)|$

(b) si $1 < a < e$ alors $|\log_a(x)| > |\ln(x)|$.

4. Si $0 < a < 1$ alors $\log_a$ est une fonction continue, strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.4 Dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction $\log_a$ se déduit de celle de la fonction $\ln$ par affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $1/\ln a$.

On peut donner une idée des positions relatives des courbes représentatives des fonctions logarithmes de base a en distinguant $0 < a < 1$, $1 < a < e$ et $e < a$.

4 Equation fonctionnelle caractéristique.

Théorème 4.1 Les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, continues en un point et satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

sont la fonction nulle ou les fonctions logarithmes de base a .

Preuve. Nous avons déjà établi la condition suffisante.

Etablissons maintenant la condition nécessaire. Pour cela il suffit de montrer que les hypothèses du théorème impliquent que toute fonction solution est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors comme fait en introduction f est la fonction s'annulant en 1 de dérivée $f'(x) = \frac{k}{x}$. Soit $f = \log_a$ avec $\ln a = 1/k$ pour $k \neq 0$ ou $f = 0$ pour $k = 0$.

- Continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose f continue en $x_0 > 0$ et soit $x_1 > 0$, $x_1 + h = \frac{x_1}{x_0}(x_0 + \frac{x_0}{x_1}h)$ et $f(x_1 + h) = f(\frac{x_1}{x_0}) + f((x_0 + \frac{x_0}{x_1}h))$. La limite lorsque h tend vers 0 de $f(x_1 + h)$ existe et par continuité de f en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_1 + h) = f(\frac{x_1}{x_0}) + f(x_0) = f(x_1)$.

- Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\int_1^{2x} f(xy) dy = f(x) + \int_1^2 f(y) dy$ soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(y) dy - \int_1^2 f(y) dy.$$

La fonction $x \mapsto \int_x^{2x} f(y) dy$ est dérivable par continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et somme de fonctions dérivables. $\square$

5 Applications.

1. Utilisation des logarithmes dans d'autres sciences (extrait d'exemples du livre de cours Maths Term S collection Terracher). Il est à noter que cette utilisation apparait lorsque l'amplitude des valeurs que l'on veut mesurer est très grande.

Sismologie : la magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par $M = \log \frac{I}{I_0}$ où I_0

est une intensité de référence. Chimie : l'acidité d'une solution est mesurée par son pH, $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration (en mol par litre) d'ions H_3O^+ . Astronomie : la magnitude apparente d'un astre d'éclat E est définie à partir d'un éclat de référence E_0 par $M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right)$ avec la convention que la magnitude augmente de 5 lorsque l'éclat est divisé par 100 (trouver a ?). Acoustique : le niveau sonore en décibels d'un son de pression acoustique P est donné par $L = 20 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$ où $P_0 = 2 \times 10^{-5}$ Pa (plus petite pression perceptible (en moyenne) par une oreille humaine).

2. Le nombre de chiffres pour l'écriture d'un nombre N en base 10 est $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$.
3. On peut définir la fonction exponentielle comme la bijection réciproque de la fonction $\ln$.
4. On peut calculer de nouvelles primitives. Pour toute fonction u continuellement dérivable sur un intervalle I (non réduit à un point) et ne s'annulant pas sur I , $\ln|u|$ est une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$. Pour montrer cela il faut commencer par justifier que toute fonction continue et ne s'annulant pas sur un intervalle est de signe constant, puis on termine avec la dérivation des fonctions composées.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ conséquence de la définition de la dérivée de la fonction $\ln$ au point 1.
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Pour cela on commence par montrer que la suite $(\ln[(1 + \frac{1}{n})^n])_n$ converge vers 1. Reste à montrer que cela implique que la suite $(u_n)_n = ((1 + \frac{1}{n})^n)_n$ converge vers e . Si la fonction exponentielle est connue et que l'on a établi que c'est la bijection réciproque de la fonction $\ln$ c'est terminé. Sinon on peut utiliser que la suite est bornée (elle est positive et majorée par e) alors elle converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence dans $[0, e]$. Ce qui est le cas par continuité de la fonction $\ln$ sur cet intervalle et cette limite est l'unique réel l tel que $\ln l = 1$ soit $l = e$. On peut aussi montrer qu'elle est croissante et majorée donc convergente et on conclue comme précédemment.
7. Croissance comparée de suites.
 - (a) Soit $b > 0$ (rationnel si on ne connaît pas la fonction exponentielle) et $a > 1$ alors $n^b \ll a^n$. Pour montrer cela on commence par montrer que la suite à termes strictements positifs $(u_n)_n = (\frac{n^b}{a^n})_n$ est décroissante à partir d'un certain rang (calculer u_{n+1}/u_n) et donc convergente. Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty$, la limite de la suite $(u_n)_n$ est donc 0.
 - (b) $(\frac{n}{e})^n \ll n!$. La suite à termes strictements positifs $(v_n)_n = (\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n})_n$ est croissante et $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = 1 - n \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n}$ (on utilise l'approximation ci-dessous). La suite $(\ln v_n)_n$ tend vers $+\infty$ et la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.
8. Approximation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, 1]$.

$$\forall x \in] -1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

On peut montrer cette égalité à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange ou plus simplement en utilisant

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t}$$

que l'on intègre entre 0 et x , le reste étant alors majoré par $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour $x > 0$ et $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}$ pour $x < 0$.

En particulier nous obtenons que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

9. Avec la concavité de la fonction $\ln$ on peut montrer que pour tous réels strictements positifs a_i ,

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots a_n).$$

L'inégalité de concavité nous donne que $\frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots \ln a_n) \leq \ln(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots a_n))$ soit $\ln((a_1 \cdots a_n)^{1/n}) \leq \ln(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots a_n))$ et on conclue en utilisant que la fonction $\ln$ est strictement croissante.

Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant l'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ que l'on applique à a_k/m avec $m = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots a_n)$. Puis en sommant sur k entre 1 et n on obtient $\sum_{k=1}^n \ln a_k \leq n \ln(m) + n - n$, qui est l'inégalité obtenue précédemment.

6 Commentaires.

- La définition du logarithme comme bijection réciproque de l'exponentielle paraît risqué car il n'est pas facile de montrer directement l'existence de la fonction exponentielle. Se reporter à la leçon exponentielles pour plus de précisions.
- Si l'on choisit le point de vue de cet exposé il faut alors avoir une idée assez précise de la façon dont on montre que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle (ici il suffit de connaître ce résultat pour une fonction positive).
- La démonstration du théorème 4.1 peut être simplifiée si on ne cherche que les fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et se réduit à ce qui est fait en introduction si on ne cherche que les fonctions dérivables.
- On peut être tenté de montrer l'assertion

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q} \quad \ln(a^r) = r \ln a$$

en introduisant la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x^r) - r \ln(x)$ et en montrant qu'elle est constante car de dérivée nulle. Pour cela nous aurons besoin de connaître la dérivée de la fonction puissance $x \mapsto x^r$ avec r rationnel, or ceci n'est connu en terminale avant l'introduction de la fonction exponentielle que pour r entier relatif ou $r = 1/2$.

- Cela n'a pas dû vous échapper mais nous insistons sur le fait que dans cette leçon, x^r n'est connu que pour r rationnel.