

Fonctions exponentielles.

Chantal Menini

22 février 2008

Dans cette exposé nous supposerons bien sûr connues les notions de limites, continuité, dérivabilité et les propriétés usuellement associées (par exemple composition de limite, lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction, dérivée de fonctions composées, etc). Mais surtout nous supposerons connue la fonction logarithme népérien, ce choix est motivé au paragraphe 1.3.

1 Résolution d'une équation différentielle.

On cherche à déterminer s'il existe des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ qui satisfont

$$(E_k) \quad f' = kf, \quad f(0) = 1.$$

L'équation $f' = kf$ apparaît par exemple si $f(t)$ désigne le nombre moyen de noyaux radioactifs présents dans une population macroscopique à l'instant t .

On peut remarquer que si $k = 0$ alors il existe une unique solution qui est la fonction constante égale à 1. Nous supposerons donc dans la suite que k est non nul.

1.1 Première condition nécessaire.

Proposition 1.1 *Si il existe une solution de (E_k) alors elle est unique.*

Preuve. Soient f_1 et f_2 deux solutions et posons pour tout réel x , $g(x) = f_1(x)f_2(-x)$. Par hypothèses sur f_1 et f_2 , g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f_1'(x)f_2(-x) - f_1(x)f_2'(-x) = kf_1(x)f_2(-x) - kf_1(x)f_2(-x) = 0$. g est constante sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 1$.

Ceci nous permet d'en déduire que les fonctions solutions f_1 et f_2 ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ et que $f_1(x) = 1/f_2(-x)$. En particulier pour $f_1 = f_2$ on obtient $f_2(x) = 1/f_2(-x)$ soit finalement $f_1 = f_2$ pour f_1 et f_2 solutions quelconques de (E_k) . $\square$

1.2 Deuxième condition nécessaire.

Proposition 1.2 *Si f solution de (E_k) alors pour tout couple (x, y) de réels $f(x+y) = f(x)f(y)$.*

Preuve. Nous avons déjà vu dans la preuve précédente que f ne s'annulait pas sur $\mathbb{R}$ et que $f(-x) = 1/f(x)$. Considérons la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+y)f(-x)$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = kf(x+y)f(-x) - kf(x+y)f(-x) = 0$, g est constante et $g(0) = f(y)$. $\square$

1.3 Existence d'une solution.

La démonstration directe de l'existence d'une solution de cette équation n'est pas simple. On peut déjà remarquer que les fonctions connues en début de classe terminale (fonction polynomiale, fraction rationnelle, racine, trigonométrie) ne sont pas solution de cette équation. On peut aussi remarquer qu'il suffit de le faire pour $k = 1$ puisque si f est solution de (E_1) , la fonction $f_k(\cdot) = f(k \cdot)$ est solution de (E_k) .

Une preuve possible pour montrer l'existence d'une solution de (E_1) est de montrer que la suite de fonctions $(u_n)_n$ avec $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (qui n'est autre que la suite qui apparaît lors de l'application de la méthode d'Euler pour la résolution approchée de (E_1)) converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui est dérivable et solution de (E_1) . Cette

démonstration est détaillée dans le document d'accompagnement des programmes de terminale ES et S accessible par exemple sur www.cndp.fr/seconde/maths/ (on y lira aussi un texte sur la radioactivité). On peut aussi se reporter à la première épreuve écrite de 2004.

Si on veut en donner les grandes lignes.

1. Montrer que pour tout $x > -1$ et pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.
2. x étant un réel fixé, introduire pour $n > |x|$, $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ et montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
 - $(u_n(x))_{n>|x|}$ croissante avec $u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+x/n)}\right)^{n+1}$ et 1.
 - $(v_n(x))_{n>|x|}$ décroissante avec $v_n(x) = 1/u_n(-x)$.
 - $u_n(x) - v_n(x)$ tend vers 0 avec $1 - \frac{x^2}{n} \leq \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leq 1$ puis $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{x^2}{n} v_n(x)$.
3. On appelle $\exp x$ la limite de la suite $(u_n(x))_n$.
4. Montrer que pour $|h| < 1$, $\exp(x+h) \geq \exp(x)(1+h)$ avec $\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{n(1+x/n)}\right)^n$ puis 1. et un passage à la limite.
5. Montrer que pour $|h| < 1$, $\exp(x+h) \leq \exp(x)/(1-h)$ avec l'inégalité précédente.
6. Conclure à la dérivabilité de la fonction $\exp$ et qu'elle est sa propre dérivée.

En conséquence nous ne choisirons pas ce point de vue et supposons connue la fonction logarithme népérien, notée $\ln$, ainsi que ses propriétés.

2 Fonction exponentielle.

2.1 Définition et premières conséquences.

Définition 2.1 La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, elle est notée $\exp$.

Proposition 2.2 1. $\exp(0) = 1$

2. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Preuve. La première assertion découle directement du fait que $\exp$ est la bijection réciproque de $\ln$ et de $\ln(1) = 0$. La deuxième résulte du théorème de la bijection que l'on applique à la fonction $\ln$ (rappel : si une fonction f est bijective d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$, dérivable et de dérivée ne s'annulant pas alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$). $\square$

Remarque 2.3 Nous savons maintenant que (E_1) admet une unique solution qui est la fonction exponentielle. De même avec la remarque faite dans le paragraphe 1.3 (E_k) admet une unique solution qui est $x \mapsto \exp(kx)$.

Proposition 2.4 1. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R})^2 \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

2. $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp(rx) = (\exp(x))^r$.

3. $\exp(1) = e$ et $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp(r) = e^r$.

Preuve. Ceci peut se voir comme une conséquence directe de la définition de la fonction $\exp$ comme bijection réciproque de la fonction $\ln$ et de $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour tous réels strictement positifs a et b ; ainsi que $\ln((\exp(x))^r) = r \ln(\exp(x)) = rx$.

Si la fonction logarithme n'est pas connue, la première assertion peut se voir comme une conséquence du fait que la fonction $\exp$ est solution de (E_1) et de la proposition 1.2. La deuxième assertion, se montre d'abord pour les entiers puis les entiers relatifs et enfin pour les rationnels (comme ce qui a été fait pour la fonction logarithme). On note $e = \exp(1)$ et 3 découle de 2. $\square$

Remarque 2.5 $\exp(r)$ coïncide avec e^r pour tout rationnel r et la fonction $\exp$ obéit aux règles de calculs des puissances, en conséquence **on étant la notation** $e^x = \exp(x)$ **à tout réel** x .

2.2 Etude de la fonction exponentielle.

Proposition 2.6 1. La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

Preuve. La première assertion est une conséquence directe du fait que la fonction $\ln$ est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et de la définition de $\exp$ comme bijection réciproque. Les deux autres des limites analogues pour la fonction $\ln$. Si l'on détaille par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$: $\frac{e^x}{x} = e^{(x - \ln x)} = e^{x(1 - \frac{\ln x}{x})}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on termine avec la composition des limites.

On peut aussi en donner une preuve directe, rappelons que nous savons à ce stade que la fonction $\exp$ ne s'annule pas, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et enfin que $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.

Nous pouvons alors en déduire que la fonction $\exp$ est strictement positive ($\exp(x) = (\exp(\frac{x}{2}))^2$) dont on déduit l'assertion 1.

$0 < 1$ donc $1 < e$ et pour tout $x > N$, $e^x > e^N$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. $e^{-x} = 1/e^x$ pour la limite lorsque x tend vers $-\infty$.

En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto e^x - x$ on peut montrer que pour tout réel x , $e^x \geq x$ (ceci peut aussi se montrer en utilisant la convexité -voir plus bas-) puis que pour tout $x > 0$, $e^x = (e^{x/2})^2 \geq (\frac{x}{2})^2$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Enfin $-x e^{-x} = -\frac{x}{e^x}$ nous donne la dernière limite. $\square$

Remarque 2.7 Si on fait le choix d'une preuve directe de l'existence de la fonction exponentielle nous pouvons maintenant montrer que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 2.8 La fonction $\exp$ est une fonction convexe.

Preuve. Elle est deux fois dérivable sur l'ouvert $\mathbb{R}$ et de dérivée seconde la fonction $\exp$ qui est positive. $\square$

Corrolaire 2.9 La courbe représentative de la fonction $\exp$ est au dessus de ses tangentes.

En particulier $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp x \geq x + 1$.

Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $\exp$ en exploitant asymptote, branche parabolique, courbe au dessus tangente. On peut aussi noter une autre propriété géométrique de la courbe représentative de la fonction $\exp$: elle est à sous-tangente constante. C'est-à-dire que dans un repère orthonormé de base $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si l'on note M un point de la courbe, m son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et T le point d'intersection de la tangente à la courbe au point M avec l'axe des abscisses, alors $\overrightarrow{Tm} = \vec{i}$.

3 Les fonctions exponentielles.

Définition 3.1 Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle **exponentielle de base a** l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp(x \ln a)$. Elle est notée $\exp_a$.

Remarque 3.2 1. La fonction exponentielle est la fonction exponentielle de base e .

2. Si les fonctions logarithmes de base a sont connues alors on peut définir $\exp_a$ comme la bijection réciproque de la fonction $\log_a$.

Proposition 3.3

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall a > 0, \quad \exp_a(r) = a^r.$$

Preuve. $\exp_a(r) = \exp(r \ln a) = (\exp(\ln a))^r = a^r$. $\square$

Définition 3.4

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \exp(x \ln a).$$

On notera que cette définition n'est qu'une extension aux réels de ce qui était déjà connu pour les rationnels.

Remarque 3.5 Pour la définition de la fonction exponentielle de base a , nous sommes restés ici dans la logique de connaissance de la fonction logarithme népérien (et uniquement celle-la). Si le choix avait été fait d'une construction directe de la fonction exponentielle, on peut définir la fonction exponentielle de base a comme l'unique solution $f_k(\cdot) = \exp(k \cdot)$ de l'équation différentielle de départ (E_k) et $a = f_k(1) = \exp(k)$. A ce stade de la leçon il paraît raisonnable d'avoir donné un nom à la bijection réciproque de la fonction exponentielle et avec la bijectivité de la fonction $\exp$, nous avons $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et pour tout a strictement positif non égal à 1 il existe un unique réel non nul $k (= \ln a)$ tel que $a = \exp(k)$, on a donc encore $\exp_a(x) = \exp(x \ln a)$. De plus $\exp_a(r) = \exp(kr) = (\exp(k))^r = a^r$ pour tout rationnel r .

Proposition 3.6 Soient a et b des réels strictement positifs,

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(a^x) = x \ln a$.
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R})^2, a^{x+y} = a^x \times a^y, a^{xy} = (a^x)^y, \forall x \in \mathbb{R} (ab)^x = a^x \times b^x$.
3. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée la fonction $x \mapsto \ln a \times a^x$.

Preuve. Toutes les démonstrations se font aisément en revenant à la définition $a^x = \exp(x \ln a)$ et en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

On peut aussi noter que les assertions 1 et 2 sont vraies pour x et y rationnels et on conclue par continuité. $\square$

Proposition 3.7 Pour tout réel α

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0.$$

Preuve.

(i) Si $\alpha \leq 0$ c'est immédiat. Si $\alpha > 0$ alors $\frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$. On sait que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ et on montre que $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^\alpha = +\infty$ ce qui nous permet de conclure par composition des limites. On peut aussi encore utiliser que $\frac{e^x}{x^\alpha} = e^{x-\alpha \ln x} = e^{x(1-\alpha \frac{\ln x}{x})}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(ii) Pour $x < 0$, $|x|^\alpha e^x = \frac{(-x)^\alpha}{e^{-x}}$ et on conclue avec (i). $\square$

4 Autres caractérisations.

4.1 Equation différentielle.

Théorème 4.1 Soit k un réel alors l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de

$$y' = ky$$

est $\{x \mapsto Ce^{kx} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Preuve. Ces fonctions conviennent et réciproquement si f est une solution alors on montre que la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-kx}$ est constante. $\square$

Remarque 4.2 On notera que l'on retrouve ici le problème de départ à la différence que la valeur de la fonction en 0 n'est pas imposée.

4.2 Equation fonctionnelle.

Théorème 4.3 L'ensemble des fonctions dérivables satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R})^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

sont la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et les fonctions exponentielles de base a .

Preuve. Ces fonctions conviennent.

Réciproquement si f est une solution alors $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

En fixant arbitrairement le réel x et en dérivant on obtient $f'(x+y) = f'(y)f(x)$ soit en particulier pour $y = 0$ $f'(x) = f'(0)f(x)$. Avec le théorème 4.1 il existe une constante C tel que $f(x) = Ce^{f'(0)x}$. Nécessairement $C = f(0)$, nous avons alors deux cas :

- $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
- $f(0) = 1$ alors f est la fonction constante égale à 1 si $f'(0) = 0$ ou bien la fonction exponentielle de base $a = e^{f'(0)}$ si $f'(0) \neq 0$.

□

5 Applications.

1. Comme dit en introduction l'équation différentielle $y' = ky$ apparait en radioactivité mais aussi par exemple dans une modélisation simple de croissance de population (modèle de Malthus) où $k = k_n - k_d$ (k_n et k_d étant respectivement le taux de naissance et de décès).
L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ apparait dans l'étude des lois de probabilité sans mémoire (durée de vie sans vieillissement, temps d'attente). Si T désigne la variable aléatoire, la loi de T est dite sans mémoire si $P_{(T>t)}(T > t+h) = P(T > h)$. En notant $f(t) = P(T > t)$ on obtient $f(t+h) = f(t)f(h)$.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$. On utilise que $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ puis la continuité de la fonction exp en x . On notera que cette application n'a pas lieu d'apparaître si on a choisi de construire directement la fonction exp puisqu'elle est précisément définie comme limite de cette suite.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$. Ceci peut se montrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange.
4. Si on se limite à $x \in]0, 1]$ on peut montrer de façon plus élémentaire que pour tout entier n strictement positif

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} < e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}.$$

Pour cela on introduit les fonctions h_n et g_n , définies sur $[0, 1]$ par $h_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et $g_n(x) = \frac{x^n}{n!} - h_n(x)$.

Elles sont dérivables et $h'_n(x) = h_{n-1}(x)$, $g'_n(x) = g_{n-1}(x)$. Puis on montre l'inégalité ci-dessus par récurrence sur n . Si on détaille cette récurrence pour obtenir le signe de g_n , cela donne :

Soit (H_n) l'assertion $\forall x \in]0, 1] \ g_n(x) > 0$.

$g_1(x) = 1 + 2x - e^x$, g_1 est strictement croissante sur $[0, \ln 2]$ et strictement décroissante sur $[\ln 2, 1]$. $g_1(0) = 0$ et $g_1(1) = 3 - e > 0$ donc (H_1) est vérifiée.

Montrons que pour $n \geq 1$, (H_n) implique (H_{n+1}) .

g_{n+1} est dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée g_n . Avec l'hypothèse (H_n) , g'_{n+1} est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et par continuité de g_{n+1} sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, g_{n+1} est strictement croissante sur $[0, 1]$.

$g_{n+1}(0) = 0$ on a donc (H_{n+1}) .

On a (H_1) vraie, pour tout $n \geq 1$, (H_n) implique (H_{n+1}) donc (H_n) est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

5. $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, on utilise le résultat ci-dessus avec $x = 1$. De plus l'inégalité

$$\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

permet de montrer que e n'est pas rationnel. Sinon $e = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et pour $n = q$

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < p \times (q-1)! < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + 1$$

ce qui est impossible car $\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$ et $p \times (q-1)!$ sont entiers.

6. Avec la convexité de la fonction $\exp$ on peut montrer que pour tous réels strictement positifs a_i ,

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots a_n).$$

$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n)\right)$ et l'inégalité de convexité nous donne que

$$\exp\left(\frac{1}{n}(\ln a_1 + \cdots \ln a_n)\right) \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots a_n).$$

6 Commentaires.

- Cela n'a pas dû vous échapper mais nous insistons sur le fait que dans cette leçon, x^r n'est connu que pour r rationnel tant que l'on n'a pas définies les exponentielles de base a .
- Nous avons tenté autant que possible de présenter deux approches possibles de la fonction exponentielle tout en indiquant notre préférence. A vous bien sûr de faire votre choix tout en faisant bien attention à la cohérence de votre exposé.
- Si on a choisi de définir directement la fonction exponentielle, on peut alors définir la fonction logarithme népérien comme sa bijection réciproque mais on peut aussi supposer construite la fonction $\ln$ comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1. Dans ce dernier cas, il faut penser à montrer qu'elles sont bijections réciproques l'une de l'autre; on introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(\exp x)$ qui est dérivable et de dérivée $g'(x) = \frac{\exp x}{\exp x} = 1$ (dérivation des fonctions composées) et $g(0) = 0$ donc $g(x) = x$.
- Nous avons choisi de ne pas pousser très loin l'étude de l'équation fonctionnelle en ne cherchant pas à réduire le plus possible les hypothèses (par exemple en ne supposant sur f que la continuité -hypothèse qui peut encore être affaiblie, la conclusion restant la même-) puisque jusqu'à présent ceci est l'objet d'une autre leçon. Reportez vous à cette leçon si vous souhaitez étoffer cette partie.
- Pour montrer que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ on peut aussi introduire les suites $(U_n)_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_n$ et $(V_n)_n = \left(U_n + \frac{1}{n!}\right)_n$ et montrer qu'elles sont adjacentes. On obtient ainsi leur convergence mais il faut pouvoir justifier que cette limite est e .
- Résoudre le problème de départ (E_k) est ce qu'on appelle résoudre le problème de Cauchy de donnée $(0, 1)$ pour l'équation différentielle $y' = ky$. Plus généralement nous savons que pour l'équation $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ avec a et b fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy de donnée $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ admet une unique solution définie sur I . (Qu'en est-il du problème de Cauchy pour $y' = f(t, y)$ avec f continuellement dérivable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$?)
- Une conséquence du théorème 4.1 est que l'ensemble de solutions de $y' = ky$ est un espace vectoriel de dimension 1, ce qui est aussi un résultat bien connu.