I.9 - Énoncé des exercices

Exercice 1.1 *Soient $(\Omega_1;\mathcal{P}(\Omega_1);P_1)$ et $(\Omega_2;\mathcal{P}(\Omega_2);P_2)$ deux espaces probabilisés avec Ω_1 et Ω_2 finis.*

a) *Montrer que l'application $P : \{(\omega_1;\omega_2)\} \mapsto P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\})$ et telle que $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2), P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$ est une probabilité sur l'espace probabilisable produit : $(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2))$.*
P est appelée probabilité produit.

b) *Montrer que si P_1 et P_2 sont uniformes, alors P est uniforme.*

Exercice 1.2 *6 personnes doivent prendre place dans 3 voitures pouvant chacune recevoir de 0 à 6 passagers. Chaque personne choisit un véhicule au hasard.*

a) *Décrire Ω.*

b) *Quelle est la probabilité que dans chaque voiture montent exactement 2 personnes ?*

Exercice 1.3 *Une urne contient n boules (indiscernables au toucher) numérotées par les entiers de 1 à n. On extrait successivement avec remise N boules.*

a) *Décrire l'univers.*

b) *Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins 2 numéros distincts ?*

c) *Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins une fois les boules 1, 2 et 3 ?*

Exercice 1.4 *Soient A et B deux événements tels que :*

$$P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{1}{2} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calculer $P(\overline{A}/\overline{B})$.

Exercice 1.5 *Soient A et B deux événements indépendants tels que :*

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ et } P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

Calculer $P(\overline{B}/A)$.

Exercice 1.6

a) *Vérifier que :*

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } B \text{ indépendants} \\ &\Leftrightarrow A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \\ &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \end{aligned}$$

b) *Établir que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :*

$$P(A \cap B)P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})P(\overline{A} \cap B)$$

Exercice 1.7 *On considère trois urnes : U_1 composée de deux boules noires et deux boules rouges, U_2 composée d'une noire et deux rouges, U_3 composée d'une noire et trois rouges (les boules sont indiscernables au toucher). On tire une boule dans U_1, une boule dans U_2, et on les met dans U_3, puis on tire une boule dans U_3. On constate que cette boule est noire. Calculer la probabilité que la boule tirée dans U_1 ait été rouge.*

Exercice 1.8 *On suppose qu'un couple a la même probabilité d'avoir à chaque naissance un garçon ou une fille. On considère un couple ayant 2 enfants.*

a) *Quelle est la probabilité qu'ils aient une fille sachant qu'ils ont un garçon ?*

b) *Quelle est la probabilité qu'ils aient une fille sachant que l'on a rencontré par hasard l'un des deux enfants, que c'était un garçon et qu'il était l'aîné ?*

Exercice 1.9 *Soient A, B et C trois événements indépendants 2 à 2, avec $P(C) > 0$.*
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et C pour que A et B soient indépendants relativement à la probabilité conditionnelle P_C.

Exercice 1.10 *On jette une paire de dés non pipés. Calculer la probabilité que la somme obtenue soit supérieure ou égale à 10, sachant que l'un au moins a donné 5.*

Exercice 1.11 *Problème posé à Pascal par le chevalier de Méré.*
« Qu'est ce qui est le plus probable : sortir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ou au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ? »
(Préciser l'univers dans chacun des cas au préalable).

Exercice 1.12 *Problème posé à Galilée par le Duc de Toscane.*
« Pourquoi, quand on effectue trois lancers de dé, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que chacune soit obtenue de 6 manières différentes ? »

Exercice 1.13 *Probabilités et arithmétique.*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\phi(n) = \mathrm{Card}\{1 \leq p \leq n / pgcd(p; n) = 1\}$$

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Le but est de démontrer que :

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

On tire au hasard un entier compris entre 1 et n. On note A l'événement « le nombre obtenu est premier avec n », et pour $i \in [\![1; k]\!]$, on note A_i l'événement « le nombre obtenu est divisible par p_i ».

1. *Définir un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.*
2. *Exprimer $P(A)$ en fonction de $\phi(n)$ et n.*
3. *Montrer que $\forall i \in [\![1; k]\!], P(A_i) = \dfrac{1}{p_i}$.*
4. *Montrer que les événements $A_1, \cdots, A_k$ sont indépendants (dans leur ensemble).*
5. *Exprimer A en fonction des A_i et en déduire que :*

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exercice 1.14 *Matrices stochastiques.*
Une particule se déplace sur les 3 sommets d'un triangle (ABC) de la façon suivante, à l'issue de chaque seconde : lorsqu'elle est en A, elle y reste avec une probabilité de 0.25, elle va en B avec une probabilité de 0.5, et en C avec une probabilité de 0.25. Lorsqu'elle est en B, elle va en A avec une probabilité de 0.5, et va en C avec une probabilité de 0.5. Lorsqu'elle est en C, elle va toujours en B. On suppose qu'elle est en A à l'instant initial. Quelle est la probabilité qu'elle soit en B au bout de 60 secondes ?
On note A_n l'événement : « la particule est en A à l'instant n », $a_n = P(A_n)$ (mêmes notations pour B et C), et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. *A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in [\![0; 59]\!], X_{n+1} = AX_n$.*
2. *A est appelée matrice stochastique. Quelle remarque peut-on faire sur ses coefficients ?*
3. *Montrer que 1 est valeur propre de A, et en déduire son spectre.*
4. *Diagonaliser A et déterminer X_{60}.*

III.7 - Énoncé des exercices

Exercice 3.1 *Soit $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit un événement A : montrer que $P(A) = E(\mathbf{1}_A)$, où $\mathbf{1}_A$ est l'indicatrice de A.*
   Cette égalité sera notamment à la base de la démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. *Écrire $\mathbf{1}_{A\cup B}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$ et $\mathbf{1}_{\overline{A}}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
3. *Démonstration de la formule de Poincaré : on considère n événements $A_1, \cdots, A_n$.*
   i Écrire $\mathbf{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}$ en fonction des indicatrices des A_i.
   ii Soit Q un polynôme unitaire à coefficients réels de degré n :
   $$Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$$
   On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines (éventuellement complexes, non nécessairement distinctes) et $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires des racines, c'est-à-dire :
   $$\forall k \in [\![1; n]\!], \sigma_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}$$
   Développer $(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n)$ en faisant apparaître les σ_k.

   iii Démontrer alors la formule de Poincaré.

Exercice 3.2 *Soit f définie sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$$\forall n > 0, f(n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

Vérifier que f est la distribution de probabilité d'une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = f(n)$), et calculer lorsque c'est possible l'espérance et la variance de X.

Exercice 3.3 *Soit X la v.a.r. prenant pour valeurs les entiers naturels congrus à 0 ou 1 modulo 3, et dont la loi de probabilité est donnée par :*

$$\forall n \in X(\Omega), P(X = n) = \alpha 3^{-n}$$

1. *Calculer α.*
2. *Calculer, lorsque c'est possible, l'espérance et la variance de X.*

Exercice 3.4 *Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{N}$. On note F sa fonction de répartition et on suppose que $E(X)$ existe.*

1. *Montrer que : $n(1 - F(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
2. *Cela suffit-il à assurer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}(1 - F(n))$?*
   c'est-à-dire :
   $$u_n = \circ\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge ?}$$
3. *Démontrer que $1 - F(n)$ est le terme général d'une série convergente, dont la somme est égale à $E(X)$.*

Exercice 3.5 *1. Montrer que si une v.a.r. discrète possède un moment d'ordre 2, alors elle possède un moment d'ordre 1.*

2. De manière générale, montrer que si une v.a.r. discrète admet un moment d'ordre k, alors elle admet des moments d'ordre k' pour tout $k' \leq k$.

Exercice 3.6 *1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire et telle que :*

$$\forall x \in [o; \pi], f(x) = \cosh x$$

Déterminer la série de Fourier de f, étudier sa convergence et donner sa somme, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

2. Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{\alpha}{n^2 + 1}$$

Déterminer α. X admet-elle une espérance ?

Exercice 3.7 *k urnes contiennent chacune n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On prélève une boule dans chaque urne, et on appelle X_n la v.a.r. égale au plus grand des numéros obtenus.*

1. *Déterminer Ω.*
   On choisit comme tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et comme probabilité P la probabilité uniforme.
2. *Préciser $X(\Omega)$ et calculer $P(X = 1)$.*
3. *Calculer, pour $h \in X(\Omega)$, $P(X_n \leq h)$.*
4. *En déduire, pour $h \in X(\Omega)$, $P(X_n = h)$.*
5. *Déterminer un équivalent de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (k fixé) (on ne cherchera pas à calculer explicitement $E(X_n)$).*
   Indication : faire apparaître une somme de Riemann.

Exercice 3.8 *Soit X une v.a.r. discrète admettant un moment d'ordre 2. Déterminer le minimum de la fonction :*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & E((X-a)^2) \end{cases}$$

Interpréter le résultat.

Exercice 3.9 *Une urne est composée de 6 boules indiscernables au toucher portant les numéros suivants : 0, 1, 1, 2, 2 et 4. On tire une poignée de n boules et on appelle X_n le produit des numéros obtenus.*

1. *Déterminer, pour $n \in [\![1;6]\!]$, un espace probabilisé $(\Omega_n; \mathcal{A}_n; P_n)$.*
2. *Déterminer les lois de $X_1, \ldots, X_6$.*
3. *Si l'on veut maximiser le produit obtenu, combien vaut-il mieux tirer de boules ?*

Exercice 3.10 *Une urne contient $n+1$ boules indiscernables au toucher numérotées comme suit : 1, 1, 2, 3, 4, ..., n. On tire une poignée de N boules et on appelle S la somme des N numéros obtenus.*

1. *Définir $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.*

2. *Soit X_k la variable définie par :*

$$X_k = \begin{cases} k & \text{si le numéro } k \text{ est dans la poignée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer la loi de X_k.
3. *Exprimer S en fonction des X_k et en déduire $E(S)$.*

IV.8 - Énoncé des exercices

Exercice 4.1 *La variable X suit la loi de Poisson de paramètre λ. On pose :* $Y = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$. *Calculer l'espérance de Y.*

Exercice 4.2 *Un compteur devrait afficher les valeurs d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{B}(n;p)$. Mais lorsque X est nulle, il affiche un nombre au hasard entre 1 et n. Lorsque X est non nulle, il affiche bien X. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre affiché par le compteur.*
Déterminer la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 4.3 *X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.*

1. *On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeur :*

$$\begin{cases} 0 & \text{lorsque} \quad X = 2p+1 \ (p \in \mathbb{N}) \\ p & \text{lorsque} \quad X = 2p \ (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

   Calculer la probabilité de l'événement « X prend une valeur paire ».
   Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

2. *On note Z la variable :* $Z = 4\left[\dfrac{X}{2}\right] - 2X + 1$ *([] désigne la partie entière).*
   Déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 4.4 *Soit X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{2}{n} P(X = n-1)$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 4.5 *Loi de Pascal.*
Une urne contient N boules indiscernables au toucher : des blanches en proportion p (donc Np boules blanches) et des noires en proportion $q = 1-p$. On extrait avec remise n boules. A chaque tirage, on appelle succès l'obtention d'une boule blanche et on s'intéresse au temps d'attente du $r^{\text{ième}}$ succès, c'est-à-dire au rang du tirage pour lequel apparaît la $r^{\text{ième}}$ boule blanche.

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle A l'événement : « on a obtenu $r-1$ succès au cours de $k-1$ tirages ».*
   Déterminer $P(A)$.
2. *En déduire la loi de X_r, v.a.r. égale au rang du tirage où apparaît le $r^{\text{ième}}$ succès.*
   On dit que X_r suit la loi de Pascal.
3. *A l'aide des dérivées de la fonction :*

$$\begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \end{array}$$

   vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X_r = k) = 1$, *et calculer, si elle existe, l'espérance de X_r.*

Exercice 4.6 *Allumettes de Banach.*
Un fumeur a dans sa poche gauche et dans sa poche droite une boîte contenant N allumettes. Pour allumer sa cigarette, il choisit à chaque fois au hasard de se servir dans l'une de ses poches.

1. *On considère le moment où, pour la première fois, il s'aperçoit que l'une des boîtes est vide. Soit X le nombre d'allumettes restant dans l'autre. Déterminer la loi de X.*
2. *On s'intéresse à l'instant où la première boîte est vide, mais non encore reconnue vide par le fumeur. Soit Y le nombre d'allumettes restant dans l'autre. Déterminer la loi de Y et en déduire que :*

$$\sum_{k=1}^{N} 2^{k+1} \binom{2N-k-1}{N-1} = 2^{2N}$$

Exercice 4.7 *Une personne souhaitant rentrer chez elle a un trousseau de n clefs. Déterminer le nombre moyen d'essais nécessaires dans chacun des deux cas suivants :*

1. *La personne élimine après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.*
2. *La personne remet dans le trousseau après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.*

V.12 - Énoncé des exercices

Exercice 5.1 *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes admettant une variance.*

1. *Montrer qu'alors XY admet une espérance et que :*

$$E(|XY|) \leq \frac{1}{2}\Big(E(X^2) + E(Y^2)\Big)$$

2. *Montrer que : $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$ (penser à la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).*

Exercice 5.2 *On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Soient X la variable prenant pour valeur le nombre de Pile obtenus moins un, et Y la variable prenant pour valeur le nombre de Pile au deuxième lancer moins le nombre de Pile au premier lancer.*

1. *Déterminer la loi conjointe du couple $(X;Y)$.*
2. *Calculer la covariance du couple.*
3. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Exercice 5.3 *Soit $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est donnée par le tableau suivant :*

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

1. *Déterminer les lois marginales du couple et préciser si X et Y sont indépendantes.*
2. *Calculer* $\mathrm{Cov}(X;Y)$.
3. *Déterminer la loi du couple* $(\min(X;Y);\max(X;Y))$.

Exercice 5.4 *On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée ; X et Y désignent respectivement le nombre de Face apparues lors des deux premiers lancers et le nombre de Pile apparus lors des deux derniers.*

1. *Déterminer la loi du couple $(X;Y)$ puis les lois marginales de X et Y.*
2. *X et Y sont-elles indépendantes ?*
3. *Calculer* $\mathrm{Cov}(X;Y)$.

Exercice 5.5 *Soient X et Y deux variables indépendantes de support $\{-1;1\}$ et distribuées uniformément (poids de 0.5 sur -1 et sur 1).*
On considère $Z = XY$: les variables X, Y et Z sont-elles indépendantes 2 à 2 ? Sont-elles mutuellement indépendantes ?

Exercice 5.6 *Soit X de support $\{-a;-b;b;a\}$ $(0 < b < a)$ distribuée uniformément.*

1. *Donner la loi de X^2 et la loi conjointe du couple $(X;X^2)$.*
2. *Calculer* $\mathrm{Cov}(X;X^2)$.
3. *Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?*

Exercice 5.7 *Soient X et Y suivant toutes les deux une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Montrer que :*

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X;Y) = 0$$

Exercice 5.8 *Soit X de loi $\mathcal{B}(n;p)$ et soit Y une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ est la loi $\mathcal{B}(k;q)$.*

1. *Montrer que :*

$$\forall \alpha \in [\![0;n]\!], \forall i \in [\![\alpha;n]\!], \binom{i}{\alpha}\binom{n}{i} = \binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{i-\alpha}$$

2. *Déterminer la loi de Y.*

Exercice 5.9 *Une particule se déplace sur une droite graduée. A l'instant zéro, la particule est en zéro. A l'issue de chaque instant, elle s'est déplacée d'une unité dans le sens positif avec la probabilité p, ou dans le sens négatif avec la probabilité $1-p$. On note X_n la variable aléatoire prenant pour valeur l'abscisse de la particule à l'issue de l'instant n.*

1. *Déterminer $P(X_n = 0)$.*
2. *Calculer l'espérance et la variance de X_n.*

Indication : on pourra décomposer X_n comme une somme de v.a.r. qui prennent les valeurs +1 et -1.

Exercice 5.10 *Soient A et B deux événements indépendants.*
Les indicatrices $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ sont-elles indépendantes ? Réciproque ?

VI.6 - Énoncé des exercices

Exercice 6.1 *Soit X de loi uniforme sur* $\left[-1;\dfrac{2}{3}\right]$.
Déterminer la loi de X^2.

Exercice 6.2 *1. Soit X une v.a.r. dont la fonction de répartition F est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.*
Déterminer la loi de $Y = F \circ X$.

2. Soit X de loi uniforme sur $]0;1[$. Soit F une fonction de répartition. On définit « F^{-1} » par :

$$\forall x \in]0;1[, F^{-1}(x) = \inf\{y / F(y) \geq x\}$$

Préciser pourquoi cette définition a bien un sens, et montrer que la variable aléatoire $Z = F^{-1} \circ X$ a pour fonction de répartition F.

Remarque : *ce résultat est d'une grande importance « pratique » : on peut simuler la fonction de répartition de n'importe quelle variable aléatoire à partir de la loi uniforme sur $[0;1]$; il suffit de générer des nombres au hasard entre 0 et 1, et de composer par « F^{-1} », ce qui est aisé lorsque F est bijective.*

Exercice 6.3 *1. Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(20;2)$. A l'aide de la table de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, donner $P(X > 21)$, $P(17 \leq X)$ et $P(18 \leq X < 20.5)$, puis déterminer x tel que $P(20 - x \leq X \leq 20 + x) = 0.95$.*

2. Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(m;\sigma)$. Déterminer $P(|X - m| > 2\sigma)$.

Exercice 6.4 *Soit $a > 0$ fixé et X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(m;\sigma)$.*
Déterminer b pour que $P(b \leq X \leq b + a)$ soit maximale.

Exercice 6.5 *Soit X de loi uniforme sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Déterminer la loi de $Y = \tan X$. Cette loi est appelée loi de Cauchy.

2. Y possède-t-elle une espérance ?

Exercice 6.6 *Une autre façon de calculer l'intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *(pas de probabilités dans cet exercice, mais des outils classiques d'analyse).*
Soit :

$$g : \left\{ \begin{array}{lcl} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est dérivable, et exprimer g en fonction de f définie par :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$$

2. En encadrant $g(x)$, montrer que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6.7 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{-|x|}$.*

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
Soit X une v.a.r. de densité f : on dit que X suit une loi de Laplace.

2. Montrer que X a des moments de tout ordre et que :

$$\forall k \geq 1, E(X^k) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^k)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$$

On retrouve donc la très classique fonction Γ :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

3. Montrer que Γ est définie sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4. En déduire $E(X^k)$, et en particulier l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi de Laplace.

(Dans vos révisions, faites absolument un problème sur la fonction Γ, c'est une très bonne façon de s'entraîner à utiliser des théorèmes et des techniques classiques d'analyse : montrez qu'elle est de classe C^∞ et convexe sur $]0;+\infty[$, déterminez un équivalent en 0^+...).

Exercice 6.8 *Caractérisation de la loi exponentielle par son absence de mémoire.*
Montrer que X suit une loi exponentielle si et seulement si :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, P(X > s + t / X > t) = P(X > s)$$

Exercice 6.9 *Soient $X_1,\ldots,X_n$ des v.a.r. indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur $[0;1]$. Soit $Y = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{X_i\}$.*
Déterminer la loi de Y.

Exemple. Le nombre d'anagrammes du mot CHERCHER est $\frac{8!}{2!2!2!2!}$.

• *Le tirage avec remise.* On parle alors de *sous-population de taille* r *avec répétitions.* Soit Ω_4 l'ensemble de ces populations, on a alors :

$$\mathrm{Card}(\Omega_4) = \binom{N+r-1}{N-1} = \binom{N+r-1}{r}.$$

Exemple. Soit $\mathcal{S} = \{1,2,3,4\}$ et $r = 2$. Alors Ω_4 peut être représenté par le triangle supérieur de la matrice M et $\mathrm{Card}(\Omega_4) = 10$.

Démonstration. Ce problème revient à placer r boules indistinguables dans N urnes. En effet, le nombre de boules dans la i-ième urne compte le nombre de répétitions de l'individu i lors du tirage. Représentons les r boules par r étoiles alignées, avec une cloison à chacune des extrémités. Par exemple, lorsque $r = 7$,

$$| * * * * * * * |$$

Répartir les r boules dans N urnes revient à rajouter $N-1$ cloisons formant les N urnes. Par exemple, lorsque $r = 7$, $N = 3$,

$$| * * || * * * * * |,$$

représente le tirage : $1,1,3,3,3,3,3$. Ainsi, ce problème revient à placer $N-1$ cloisons sur $N+r-1$ positions, les positions restantes étant occupées par des $*$. $\square$

Exemple. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à compter le nombre de suites d'entiers naturels $r_1, \cdots, r_n$, telles que :

$$r_1 + \cdots + r_n = r.$$

Ce problème revient à placer r boules indistinguables dans n urnes, où le nombre de boules dans la i-ième urne représente r_i. Ainsi, le nombre de ces suites est $\binom{n+r-1}{n-1}$. Par exemple, si $r = 10$, $n = 3$,

$$| * * | * * * * * | * * * |$$

représente la partition $(2,5,3)$ de 10. Remarquer que ces suites sont naturellement ordonnées de sorte que l'on distingue $(2,5,3)$ de $(5,3,2)$.

Exercices

Exercice 2.3. Supposons que 23 personnes sont dans une même salle. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient l'anniversaire le même jour ? (On ne considèrera pas les années bissextiles.)

Exercice 2.4. Dans une course, n chevaux sont au départ. On suppose qu'ils ont tous la même chance de gagner. Calculer la probabilité de gagner le tiercé avec un ticket :

1. dans l'ordre,
2. dans l'ordre ou dans un ordre différent,

3. dans un ordre différent ?

Exercice 2.5. Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :

1. une seule paire (deux cartes de même hauteur) ;
2. deux paires ;
3. un brelan (trois cartes de même hauteur et pas de paire ni de carré) ;
4. un carré (quatre cartes de même hauteur) ;
5. un full (une paire et un brelan) ?

Exercice 2.6. (D'après C. Bouzitat et G. Pagès, En passant par hasard... Chapitre XI. Ed. Vuibert (1999)). Au loto, le joueur doit cocher 6 numéros dans une grille en comportant 49. Un tirage consiste à extraire, sans remise, 6 boules numérotées d'une urne, dont les numéros sont dits gagnants, et une 7-ième boule fournissant le numéro dit complémentaire. Est gagnant du premier rang, toute grille sur laquelle sont cochés les 6 numéros gagnants. Est gagnante du 2-ième rang, toute grille sur laquelle sont cochés 5 des 6 numéros gagnants et dont le 6-ième numéro est le numéro complémentaire. Est gagnant du 3-ième rang, toute grille sur laquelle sont exactement cochés 5 des 6 numéros gagnants.

Considérons une grille validée et notons

$$p_k = \mathbb{P}(\text{la grille est gagnante au } k\text{-ième rang}).$$

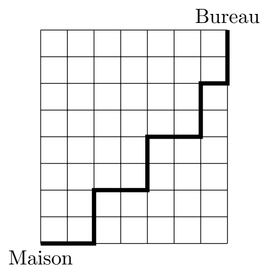
Calculer p_k pour $k \in \{1,2,3\}$.

Exercice 2.7. On considère la distribution aléatoire de r boules dans n urnes. Quelle est la probabilité qu'une urne donnée contienne exactement k boules ? ($k \leq r$)

Exercice 2.8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables, que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^\infty$. Quel est le nombre de dérivées partielles distinctes d'ordre r ?

Exercice 2.9. Combien l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ a-t-elle de solutions entières et non négatives ?

Exercice 2.10. (CAPES externe, dossier du 5 juillet 2006). Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à 7 pâtés de maison à l'est et 8 pâtés de maisons au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de 15 pâtés de maison (il ne se dirige ni vers le sud, ni vers l'ouest). On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles de ce schéma rectangulaire. La figure ci-dessous illustre la situation ; un exemple de trajet est représenté en ligne grasse.



1. Proposer un codage permettant de décrire le trajet représenté.
2. Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?
3. L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de 8 entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

1. Aquel niveau pensez-vous pouvoir proposer cet exercice ? Quelles indications souhaiteriez-vous ajouter ?
2. La question 3 de l'exercice.

Exercices

Exercice 3.1. On choisit une famille "au hasard" parmi toutes les familles ayant deux enfants.

1. Sachant que la famille choisie a au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?
2. Sachant que l'aîné de la famille choisie est un garçon, quelle est la probabilité que le plus jeune soit aussi un garçon ?

Exercice 3.2. *Un exemple d'urne de Polya.* Une urne contient au départ 5 boules blanches et 7 noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on la réintroduit en rajoutant deux nouvelles boules de la même couleur que celle tirée. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires ? Que la deuxième boule tirée soit noire ?

Remarque : les urnes de Polya peuvent servir pour modéliser la propagation de maladies infectieuses. En effet, chaque réalisation d'un évènement augmente la probabilité des réalisations suivantes.

Exercice 3.3. On considère trois cartes à jouer de même forme. Les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième en rouge tandis que la troisième porte une face noire et une face rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte est tirée au hasard et placée sur la table. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 3.4. Le test de dépistage d'un certain virus n'est pas infaillible :

— 1 fois sur 100, il est positif, alors que l'individu n'est pas contaminé,
— 2 fois sur 100, il est négatif alors que l'individu est contaminé.

D'autre part, on sait que sur la population totale, la fraction de porteurs est approximativement de 1/1000.

1. Étant donné que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu ne soit pas porteur du virus ?
2. Étant donné que son test est négatif, quelle est la probabilité qu'un individu soit porteur du virus ?

Exercice 3.5. Un dé à six faces n'est pas bien équilibré, un échantillonnage a permis d'obtenir le tableau suivant.

Score	1	2	3	4	5	6	Total
Fréquence	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1	1

On cherche à savoir si, avec ce dé, il est plus probable de faire un score d'au moins 5 lorsque le score est pair ou lorsque le score est impair.

1. Déterminer un choix d'espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit d'au moins 5 sachant que le score est pair. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit d'au moins 5 sachant que le score est impair. Conclure.
3. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit impair sachant qu'il est d'au moins 5. Calculer la probabilité conditionnelle que le score soit pair sachant qu'il est d'au moins 5. Interpréter.

i) $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (1-p_n)^{-k} = 1$;
ii) $\lim_{n\to+\infty} (n\, p_n)^k = \theta^k$;
iii) On a le développement, $n\ln(1-p_n) = n\ln\left(1-\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\,\left(-\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\theta+o(1)$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-p_n) = -\theta$;
iv) par continuité de l'application exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-p_n)} = e^{-\theta}$.

Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}^{X_n}(\{k\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k!}.1.\theta^k.1.e^{-\theta},$$

d'où le résultat. □

Exercices

Exercice 4.1. Pour chacune des lois ci-dessus, montrer que la somme des probabilités des évènements élémentaires vaut 1.

Exercice 4.2. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ un espace fini à 5 éléments, de probabilités respectives 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, 1/6. On note X la variable aléatoire définie par :

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0, \quad X(\omega_3) = X(\omega_4) = 1, \quad X(\omega_5) = 2.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 4.3. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, $n \geq 3$. On tire 3 boules d'un seul coup. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré la boule no 1, égale à 0 dans le cas contraire. Donner la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 4.4. On lance deux dés équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 4.5. Une urne contient N_b boules blanches et N_n boules noires. Posons $N = N_b + N_n$. On tire r boules avec remise dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de la variable aléatoire X. Reconnaître la loi de X.

Exercice 4.6. On lance un dé à 6 faces non truqué, indéfiniment. Soit X la variable aléatoire égale au temps passé jusqu'à ce que le premier 1 soit obtenu. Déterminer la loi de la variable aléatoire X. Reconnaître la loi de X.

Exercices

Exercice 4.12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Calculer la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer la loi de $T = \min(X, Y)$.

Exercice 4.13.

1. Montrer que la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Montrer que la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, respectivement est une loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
3. Montrer que la variable aléatoire $T = \min(X, Y)$, où X et Y sont indépendantes de même loi géométrique de paramètres p ($p \in]0, 1[$), suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p)^2$.

Exercice 4.14. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendants de loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$. Calculer $\mathbb{P}[X = Y]$.

Exercice 4.15. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$. On pose $S = X + Y$ et $D = XY$.

1. Déterminer la loi du couple (S, D).
2. En déduire les lois marginales de S et D.
3. Calculer de trois manières différentes $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(D)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?