Modules de Clifford et K-théorie

Damien Robert et Mehdi Tibouchi
sujet proposé par François Pierrot

1er juillet 2004

Résumé

La multiplication de Clifford sur l'algèbre extérieure associée à un fibré vectoriel euclidien est un outil fécond pour l'étude, par exemple, des champs de vecteurs. On présente ici l'application que Atiyah, Bott et Shapiro [MA64] en ont donné en K-théorie, en construisant un isomorphisme de Thom pour une certaine classe de fibrés vectoriels. Les méthodes employées préfigurent une partie de celles qui interviendront plus tard dans la théorie de l'indice d'Atiyah-Singer.

Table des matières

1 Notions préliminaires : groupe de Grothendieck, modules, fibrés vectoriels

La notion de groupe de Grothendieck intervient à plusieurs niveaux dans les constructions qui nous intéressent ici. Il est sans doute intéressant de donner quelques définitions générales. On s'inspire largement des chapitres 1 et 2 de [Wei97] et [Hat03].

1.1 Groupe de Grothendieck d'une catégorie additive

Définition 1 Une catégorie $\mathcal{C}$, supposée petite,[1] est dite *additive* lorsque les deux axiomes suivants sont vérifiés :
- les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sont munis d'une structure de groupe abélien, et cette la loi de groupe est distributive sur la composition des morphismes.
- $\mathcal{C}$ possède un objet nul (à la fois initial et final) et admet des produits finis.

Ces axiomes assurent l'existence de coproduits finis qui coïncident avec les produits (la flèche $A \to A \times B$ est obtenue, comme pour les groupes abéliens, en composant par l'isomorphisme évident $A \tilde{\to} A \times 0$). L'opération correspondante sur les objets est appelée *somme directe* et notée $\oplus$. Elle fait de l'ensemble des objets un monoïde commutatif.

Définition 2 Soit M un monoïde commutatif. On appelle *symétrisé* de M un groupe abélien $S(M)$ muni d'un morphisme de monoïdes $f : M \to S(M)$, et universel au sens où tout morphisme de monoïdes de M vers un groupe abélien se factorise de manière unique par f.

Il est clair que s'il existe, le symétrisé est unique à isomorphisme près. De plus, tout monoïde M admet bien un symétrisé, qu'on peut voir comme le groupe abélien engendré par les $[m]$, $m \in M$, soumis aux relations $[m + n] = [m] + [n]$. Cette construction possède en outre des propriétés évidentes de fonctorialité : S n'est autre, par parenthèse, que l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli des groupes abéliens dans les monoïdes commutatifs.

Définition 3 Pour toute catégorie additive $\mathcal{C}$, on appelle groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}$, et l'on note $K_0(\mathcal{C})$, le symétrisé du monoïde des objets de $\mathcal{C}$.

Les deux exemples cruciaux de cette construction qu'on va utiliser dans la suite sont celui de certaines catégories de modules sur un anneau, et celui des fibrés vectoriels sur un espace topologique. Dans ces deux cas (et pour une base commutative, dans le cas des anneaux), notons que l'on dispose en plus d'une structure multiplicative donnée par le produit tensoriel. Comme il est distributif sur la somme directe, il fournit une structure d'anneau commutatif sur le groupe de Grothendieck.

[1] On passera sous silence les détails de théorie des ensembles. Au besoin, on travaillera dans un univers fixé dans lequel on prendra tous les objets et morphismes, et toutes les catégories seront donc petites.

1.2 Modules sur un anneau et K_0 algébrique

Soit R un anneau non nécessairement commutatif. Le groupe de Grothendieck de la catégorie additive des R-modules à gauche quelconques n'est pas très intéressant, puisque pour tout module M, on peut écrire $M \oplus M^\infty = M^\infty$, et donc $[M] = 0$ dans le groupe de Grothendieck.

On obtient un objet beaucoup plus intéressant si l'on se restreint à la catégorie $\mathbf{Mod}(R)$ des R-modules à gauche de type fini, mais il a tendance, cette fois, à être trop gros (le théorème de structure des groupes abéliens de type fini dit par exemple que $K_0\,\mathbf{Mod}(\mathbf{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par $[\mathbf{Z}]$ et les $[\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}]$ pour tout nombre premier p et tout $k \geqslant 1$). La catégorie que l'on préfère considérer, et qui fournit une construction plus maniable, est celle des modules *projectifs* de type fini, c'est-à-dire des modules qui sont facteurs directs de R-modules libres de type fini.

Définition 4 On note $\mathbf{Pr}(R)$ la catégorie additive des R-modules à gauche projectifs de type fini. Son groupe de Grothendieck est appelé groupe de Grothendieck de R, et noté $K_0(R)$.

Par exemple, si tout R-module projectif de type fini est libre, $K_0(R)$ est le groupe monogène engendré par $[R]$. C'est par exemple le cas quand R est un corps ou un anneau principal (et alors $K_0(R)$ est même $\mathbf{Z}$ en tant qu'anneau).

Remarque Deux modules projectifs M et N définissent la même classe dans $K_0(R)$ si et seulement s'ils sont *stablement équivalents*, c'est-à-dire qu'il existe n tel que $M \oplus R^n$ est isomorphe à $N \oplus R^n$. En effet, $K_0(R)$ est obtenu à partir du monoïde des classes d'isomorphisme de $\mathbf{Pr}(R)$ en adjoignant formellement un inverse à $[R]$, puisque alors tout module projectif a un inverse : si $M \oplus M' = R^k$, on a : $-[M] = [M'] - k[R]$. C'est sous cette forme, comme théorie de l'équivalence stable, qu'apparaît classiquement la K-théorie.

Remarque Une autre remarque importante est que le K_0 algébrique est fonctoriel au sens suivant. Si $f : R \to S$ est un morphisme d'anneaux, on a un foncteur naturel $f_* : \mathbf{Pr}(R) \to \mathbf{Pr}(S)$ donné par l'extension des scalaires $(- \otimes_R S)$, qui commute aux sommes directes (et au produit tensoriel dans le cas commutatif), d'où un morphisme de groupes (et le cas échéant d'anneaux) $f_* : K_0(R) \to K_0(S)$. De plus, si S est un R-module projectif de type fini, la restriction des scalaires fournit dans l'autre sens un morphisme de groupes abéliens $f^* : K_0(S) \to K_0(R)$.

Exemple 1 Les anneaux dont on aura besoin du K_0 dans la suite sont des algèbres semi-simples finies sur des corps. Or il est facile de calculer le groupe de Grothendieck dans ce cas particulier. En effet, une telle algèbre A est produit d'un certain nombre n d'algèbres de matrices sur des corps gauches, a alors exactement n modules simples $V_1, \ldots, V_n$ à isomorphisme près (les «vecteurs colonnes» de ces algèbres de matrices), et tout module de type fini s'écrit comme somme de puissances des V_i (en particulier, tout module est projectif). Il en résulte que $K_0(A)$ est le groupe abélien libre engendré par les V_i.

1.3 Fibrés vectoriels et K_0 topologique

Soit X un espace topologique connexe. On a une théorie analogue à la précédente pour les fibrés vectoriels de base X.

1.3.1 Définition et constructions de base

Définition 5 Soit F un espace topologique non vide, et G un groupe d'homéomorphismes de F. On appelle *espace fibré sur* X de fibre F la donnée d'un espace topologique au-dessus de X, $\pi : E \to X$ dont les fibres sont homéomorphes à F, et tel que tout point x de X a un voisinage U au-dessus duquel il existe un homéomorphisme $\pi^{-1}(U) \to U \times F$ (où $U \times F$ est vu comme espace sur U par la première projection).

Un *fibré de groupe structural* G, ou G*-fibré*, sur X est un fibré E muni d'une action continue de G préservant les fibres, et telle que les trivialisations locales $\pi^{-1}(U) \to U \times F$ soient des G-morphismes pour l'action naturelle de G sur $U \times F$. Un G-fibré est dit *principal* si l'action sur chaque fibre est de plus simplement transitive.

Les morphismes de fibrés et de G-fibrés se définissent de la façon évidente.

Dans ce langage, un *fibré vectoriel* réel (resp. complexe) de rang n sur X est un fibré de fibre $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) et de groupe structural $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$).

On note $\mathbf{VB_R}(X)$ et $\mathbf{VB_C}(X)$ les catégories des fibrés vectoriels réels et complexes sur X, et $\mathbf{VB}(X)$ si l'on ne veut pas préciser le corps de base. Ce sont des catégories additives : l'objet nul est $X \times 0$, la somme de morphismes de fibrés $E \to F$ se calcule fibre à fibre, et la somme directe $E \oplus F$ n'est autre que le produit fibré. Si l'on note $\pi : E \to X$ et $\pi' : F \to X$ les morphismes structuraux, on a :

$$E \oplus F = E \times_X F = \{(y, y') \in E \times F \ / \ \pi(y) = \pi'(y')\}$$

qui est naturellement un espace au-dessus de X, clairement localement trivial, et de fibre $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$.

Définition 6 On note $KO(X)$ et $K(X)$ les groupes de Grothendieck des catégories $\mathbf{VB_R}(X)$ et $\mathbf{VB_C}(X)$ respectivement. Ce sont les groupes de K-théorie réelle et complexe de l'espace X.

Exemple 2 L'exemple trivial, mais néanmoins essentiel, de cette construction, est celui où $X = *$ est réduit à un point. Alors un fibré vectoriel est juste la donnée d'un espace vectoriel, et l'on a donc $K(*) = KO(*) = \mathbf{Z}$. De façon moins triviale, la théorie qu'on va développer plus loin donnera une approche de la K-théorie des sphères. Il est en tout cas facile de voir que S^1 possède un fibré en droites réel non trivial, qui est le fibré de Möbius M. Il n'est pas très difficile de voir que $M \oplus M$ est trivial, et en fait $KO(S^1) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est engendré par $[M]$ et le fibré trivial de rang 1.

Comme on l'a signalé, on dispose sur $\mathbf{VB}(X)$, et donc sur la K-théorie, d'une structure multiplicative donnée par le produit tensoriel. La façon la plus naturelle de le construire est sans doute par recollement.

De manière générale, pour un G-fibré $\pi : E \to X$ de fibre F, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X qui le trivialise. Notons $\eta_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ les trivialisations locales. Alors les $\eta_j \circ \eta_i^{-1}$, avec l'abus de notation habituel, déterminent des G-automorphismes de $(U_i \cap U_j) \times F$, c'est-à-dire des applications $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$. E peut alors se voir comme quotient de la réunion disjointe des $U_i \times F$ par l'identification de $(x, v) \in U_i \times F$ avec $(x, g_{ij}(x)(v)) \in U_j \times F$ quand $x \in U_i \cap U_j$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que la donnée, pour un recouvrement (U_i) de X, d'applications de recollement g_{ij} vérifiant la condition de compatibilité $g_{jk} g_{ij} = g_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ détermine un G-fibré sur X de fibre F.

On dispose alors d'une construction naturelle du produit tensoriel de deux fibrés E_1 et E_2 sur X, de rangs n_1 et n_2. On se donne pour cela un recouvrement (U_i) qui trivialise E_1 et E_2, et les applications de recollement correspondantes $g_{ij}^{(k)} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(E_k)$, $k = 1, 2$. Alors $E_1 \otimes E_2$ est le fibré vectoriel de rang $n_1 n_2$ déterminé par les applications de recollement :

$$g_{ij}^{(1)} \otimes g_{ij}^{(2)} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(E_1 \otimes E_2)$$

Il résulte des propriétés du produit tensoriel d'espaces vectoriels que l'opération $\otimes$ ainsi définie sur $\mathbf{VB}(X)$ est commutative, associative, distributive sur la somme directe, et a pour élément neutre le fibré trivial de rang 1. Elle fait donc de $K(X)$ et $KO(X)$ des anneaux commutatifs unitaires.

D'autres fibrés peuvent être déduits d'un fibré E de rang n par le même type de construction. Il s'agit des constructions habituelles de l'algèbre multilinéaire, comme les puissances symétriques et extérieures $\mathrm{Sym}^q(E)$, $\Lambda^q(E)$ et les algèbres graduées correspondantes, le fibré dual $\check{E} = \Lambda^{n-1}(E)$, les exponentielles internes, etc., mais aussi par exemple du fibré projectif $\mathbf{P}(E)$ de groupe structural PGL_n, et dont les fibres sont les $\mathbf{P}(E_x)$.

On sera amené à considérer plus particulèrement le cas où les fibres de E sont des espaces euclidiens ou hermitiens. Notons que quand la base X est paracompacte, tout fibré vectoriel a au moins une structure euclidienne ou hermitienne. En effet, par exemple dans le cas réel, soit (U_i) est un recouvrement de X trivialisant localement fini, (ϕ_i) une partition de l'unité subordonnée, et $\eta_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{R}^n$ les trivialisations locales. On obtient pour chaque i un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ sur $\pi^{-1}(U_i)$ à partir de celui de $\mathbf{R}^n$, et il suffit de poser en chaque point $x \in X$:

$$\langle u, v \rangle_x = \sum_i \phi_i(x) \langle u, v \rangle_i$$

Cette structure euclidienne sur les fibres permet d'associer encore de nouveaux fibrés à E, notamment le fibré des sphères unité $\mathbf{S}(E)$, celui des boules unité $\mathbf{B}(E)$, ou encore le fibré principal de groupe $O(n)$ des bases orthonormées de E.

1.3.2 Fonctorialité et K-théorie relative

Tout ce qui suit s'applique à la K-théorie réelle comme à la K-théorie complexe. On notera $K(X)$ le groupe de K-théorie sans plus de précision.

Soit $f : Y \to X$ une application continue. On peut tirer en arrière par f les fibrés vectoriels de base X de la façon suivante. Si $\pi : E \to X$ est un tel fibré, de rang n, on considère :

$$f^*E = Y \times_X E = \{(y, v) \in Y \times E \ / \ f(y) = \pi(v)\}$$

muni de $f^*\pi : f^*E \to Y$ la première projection. Alors pour tout $y \in Y$, on a l'identification naturelle :

$$(f^*E)_y = (f^*\pi)^{-1}(y) = \{(y, v) \ / \ v \in E_{f(y)}\} \cong E_{f(y)}$$

qui fournit une action de GL_n sur f^*E préservant les fibres. De plus, $f^*\pi$ est bien localement trivial. En effet, pour $y \in Y$, on considère U un voisinage trivialisant de $f(y)$ dans X, et une trivialisation linéaire $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$. Alors on obtient encore une trivialisation linéaire en tirant en arrière par f :

$$\begin{array}{rcl} f^*\phi : (f^*\pi)^{-1}(f^{-1}(U)) & \to & f^{-1}(U) \times F \\ (y, v) & \mapsto & \big(y, \mathrm{pr}_2 \circ \phi(v)\big) \end{array}$$

Donc $f^*\pi$ est bien un fibré vectoriel sur Y, et on peut tirer en arrière de manière générale les morphismes de fibrés vectoriels, d'où un foncteur :

$$f^* : \mathbf{VB}(X) \to \mathbf{VB}(Y)$$

qui commute de plus aux sommes directes et aux produits tensoriels. On en déduit donc un morphisme d'anneaux $K(X) \to K(Y)$ encore noté f^*. En particulier, K est un foncteur contravariant des espaces topologiques dans les anneaux commutatifs.

Définition 7 Soit X un espace muni d'un point de base $*$, et $\iota : * \to X$ l'inclusion. On appelle K-théorie réduite de X l'idéal $\widetilde{K}(X)$ de $K(X)$ qui est le noyau de ι^*. Si Y est un sous-espace fermé de X, on note en particulier $K(X, Y) = \widetilde{K}(X/Y)$, où X/Y est l'espace obtenu en contractant Y en un point (et muni de la topologie quotient).

On a alors la suite exacte de $K(X)$-modules :

$$0 \to \widetilde{K}(X) \to K(X) \to K(*) \to 0$$

(la surjectivité résultant de l'existence des fibrés triviaux). En particulier, comme $K(*) = \mathbf{Z}$, la structure de $\widetilde{K}(X)$ ne dépend pas du point de base choisi. De plus, en tant que suite exacte de groupes abéliens, la suite est scindée, puisque le morphisme $K(X) \to K(*)$ a pour section le morphisme $K(*) \to K(X)$ induit par l'application constante $X \to *$. Ainsi, comme groupe abélien, on a :

$$K(X) = K(*) \oplus \widetilde{K}(X) = \mathbf{Z} \oplus \widetilde{K}(X)$$

Pour finir, il nous faut mentionner la propriété essentielle qui fait de la K-théorie une construction intéressante du point de vue topologique.

Théorème 1 *Soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel, et $f_0, f_1 : Y \to X$ des applications homotopes. Alors si Y est paracompact, les fibrés vectoriels f_0^*E et f_1^*E sont isomorphes.*

Si l'on note $F : Y \times I \to X$ une homotopie de f_0 à f_1, f_0^*E et f_1^*E sont les restrictions à $Y \times \{0\}$ et $Y \times \{1\}$ de F^*E. Le théorème découle donc de la proposition suivante.

Proposition 2 *Soit X un espace paracompact, et E un fibré vectoriel sur $X \times I$. Alors les restrictions de E à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ sont isomorphes.*

Démonstration. On commence par les deux observations suivantes.

1. Si les restrictions E_1 et E_2 d'un fibré $E \to X \times [a, b]$ à $X \times [a, c]$ et $X \times [c, b]$ sont triviales pour un certain $c \in [a, b]$, alors E est trivial. En effet, soit $h_1 : E_1 \to X \times [a, c] \times \mathbf{R}^n$ et $h_2 : E_2 \to X \times [c, b] \times \mathbf{R}^n$ des trivialisations. Quitte à composer h_2 par l'isomorphisme $X \times [c, b] \times \mathbf{R}^n \to X \times [c, b] \times \mathbf{R}^n$ donné sur chaque «tranche» $X \times \{x\} \times \mathbf{R}^n$ par la fonction que donne $h_1 h_2^{-1}$ sur $X \times \{c\} \times \mathbf{R}^n$, on peut supposer que h_1 et h_2 coïncide sur $X \times \{c\} \times \mathbf{R}^n$, et donc se recollent pour fournir une trivialisation $h : E \to X \times [a, b] \times \mathbf{R}^n$.
2. On peut en déduire que pour tout fibré E sur $X \times I$, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que E soit trivial sur chaque $U_i \times I$. En effet, pour chaque point $x \in X$, la trivialité locale fournit des voisinages $U_{x,1}, \dots, U_{x_k}$ de x et une subdivision $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ de I telle que E soit trivial sur $U_{x,j} \times [t_{j-1}, t_j]$. La remarque précédente permet d'en déduire que E est trivial sur $U_x \times I$, avec U_x l'intersection des $U_{x,j}$.

À partir de là, raisonnons d'abord sur une base X compacte. On dispose alors d'un recouvrement ouvert fini $(U_1, \dots, U_m)$ de X telle que E soit trivial au dessus de $U_i \times I$, et il existe une partition de l'unité $(\phi_1, \dots, \phi_m)$ subordonnée au recouvrement. On note alors $\psi_i = \phi_1 + \cdots + \phi_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$. En particulier, $\psi_0 = 0$ et $\psi_1 = 1$. Soit de plus $X_i = \{(x, y) \in X \times I \ / \ y = \psi_i(x)\}$ le graphe de ψ_i, et E_i la restriction de E à X_i.

L'homéomorphisme naturel $X_i \to X_{i-1}$ donné par $(x, \phi_i(x)) \mapsto (x, \phi_{i-1}(x))$ est l'identité en dehors de U_i. Comme E est trivial sur $U_i \times I$, il se prolonge en un isomorphisme de fibrés $h_i : E_i \to E_{i-1}$ qui est l'identité en dehors de $\pi^{-1}(U_i)$. Le composé $h_1 \circ \cdots \circ h_m : E_m \to E_0$ fournit alors bien un isomorphisme entre la restriction de E à $X_m = X \times \{1\}$ et sa restriction à $X_0 = X \times \{0\}$.

Dans le cas d'une base paracompacte quelconque, on peut procéder de même avec un recouvrement (U_i) qui est cette fois dénombrable et localement fini. Il suffit de voir que la «composée infinie» $h_1 \circ h_2 \circ \cdots$ a bien un sens, ce qui est le cas puisqu'au voisinage de tout point $x \in X$, toutes les fonctions h_i sauf un nombre fini sont l'identité. □

On peut noter que le résultat reste valable, avec la même preuve, pour des espaces fibrés qui ne sont pas nécessairement des fibrés vectoriels. Par ailleurs, on en déduit immédiatement l'invariance par homotopie de la K-théorie :

Corollaire 3 *Si $f : Y \to X$ est une équivalence d'homotopie entre espaces paracompacts, le foncteur $f^* : \mathbf{VB}(X) \to \mathbf{VB}(Y)$ est une équivalence de catégories, qui* *induit donc un isomorphisme* $f^* : K(X) \to K(Y)$ *en* K*-théorie. En particulier, tout fibré vectoriel sur un espace paracompact contractile est trivial.*

1.3.3 Fibré supplémentaire et théorème de Swan

Même si ça ne sera pas directement utile, il est difficile de parler de K-théorie algébrique et de K-théorie topologique sans mentionner les liens profonds qui existent entre les deux. Remarquons tout d'abord que dans le cas d'une base compacte, la K-théorie comme nous l'avons définie est aussi, comme dans le cas les anneaux, l'ensemble des classes d'équivalence stable de fibrés vectoriels, d'après le théorème suivant.

Théorème 4 *Soit* X *un espace compact, et* $\pi : E \to X$ *un fibré vectoriel. Il existe un fibré* $E^\perp$ *tel que* $E \oplus E^\perp$ *soit trivial.*

Démonstration. Notons qu'il suffit de construire une application $E \to \mathbf{R}^N$ (ou $E \to \mathbf{C}^N$) pour un certain N qui soit linéaire injective sur les fibres. En effet, une telle application fournit un plongement f de E dans le fibré trivial $X \times \mathbf{R}^N$, et en utilisant le produit scalaire sur $\mathbf{R}^N$, on peut construire l'espace :

$$E^\perp = \{(x, v) \in X \times \mathbf{R}^N \ / \ v \in f(E_x)^\perp \subset \mathbf{R}^N\}$$

dont on voit facilement que c'est un sous-fibré vectoriel de $X \times \mathbf{R}^N$. Il est alors évident que $E \oplus E^\perp \cong X \times \mathbf{R}^N$.

L'application $u : E \to \mathbf{R}^N$ recherchée peut s'obtenir par une construction analogue à celle du plongement de Whitney pour une variété compacte. On commence par prendre un recouvrement fini (U_i) de X par m ouverts trivialisants, et une partition de l'unité (ϕ_i) subordonnée. Soit de plus $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{R}^n$ une trivialisation linéaire au-dessus de U_i. On pose alors, avec l'abus de notation évident :

$$\begin{array}{rcl} u : E & \to & (\mathbf{R}^n)^m \\ x & \mapsto & \big(\phi_i(\pi(x))\,\mathrm{pr}_2(h_i(x))\big)_{1 \leqslant i \leqslant m} \end{array}$$

C'est une application continue, linéaire sur les fibres, et la i-ème composante est un isomorphisme sur les fibres au-dessus de U_i, donc elle vérifie bien les conditions voulues. □

Considérons alors la correspondance qui à un fibré vectoriel $\pi : E \to X$ associe l'espace vectoriel $\Gamma(X, E)$ de ses sections globales continues :

$$\Gamma(X, E) = \{s : X \to E \ / \ \forall x, \ \pi(s(x)) = x\}$$

Si l'on note $C(X)$ l'anneau des fonctions continues sur X (à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ selon le cas), alors $\Gamma(X, E)$ est de façon évidente un $C(X)$-module. De plus, si l'on choisit $E^\perp$ tel que $E \oplus E^\perp$ soit un fibré trivial de rang N, il vient :

$$\Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, E^\perp) = \Gamma(X, E \oplus E^\perp) = C(X)^N$$

donc quand X est compact, $\Gamma(X,E)$ est un $C(X)$-module projectif de type fini. Bien sûr, si $f : E \to F$ est un morphisme de fibrés, il induit un morphisme de $C(X)$-modules $u_f : \Gamma(X,E) \to \Gamma(X,F)$, $u_f(s) = f \circ s$, et donc $\Gamma(X,-)$ est un foncteur $\mathbf{VB}(X) \to \mathbf{Pr}(C(X))$.

Il est pleinement fidèle. En effet, soit u un morphisme de $C(X)$-modules $\Gamma(X,E) \to \Gamma(X,F)$, et x un point de X. On considère un voisinage trivialisant U de x, et $\phi : X \to [0,1]$ une fonction continue valant 1 en x et nulle hors de U. Alors l'extension par multiplication par ϕ fournit un morphisme de $C(X)$-modules :

$$u_x : C(U) \otimes_{\mathbf{R}} E_x = \Gamma(U, E|_U) \to \Gamma(X,E) \to \Gamma(X,F)$$

et on a alors une application $f : E \to F$ définie par :

$$f(v) = u_x(1 \otimes v)(x) \quad \text{avec } x = \pi(v)$$

La $C(X)$-linéarité de u assure alors que $f(v)$ ne dépend que de v et pas du choix de l'application ϕ. De plus, f est linéaire sur les fibres, donc c'est un morphisme de fibrés vectoriels, et il vérifie en outre $u_f = u$, ce qui démontre bien la pleine fidélité :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{VB}(X)}(E,F) = \mathrm{Hom}_{C(X)}(\Gamma(X,E), \Gamma(X,F))$$

On peut voir enfin que le foncteur est essentiellement surjectif. En effet, soit $M \in \mathbf{Pr}C(X)$, facteur direct d'un module libre de rang N : $M \oplus M' = C(X)^N = \Gamma(X, X \times \mathbf{R}^N)$. On introduit naturellement l'espace :

$$E = \{(x,v) \in X \times \mathbf{R}^N \ / \ \exists s \in M,\ v = s(x)\}$$

qui est un espace au-dessus de X dont les fibres sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^N$. De plus, si l'on note E' l'espace correspondant de la même manière à M', on a en tout point $x \in X$, $E_x \oplus E'_x = \mathbf{R}^N$. En particulier, si l'on fixe un point x, il existe des éléments $s_1, \ldots, s_r$ dans M et $s_{r+1}, \ldots, s_N$ dans M' tels que $(s_1(x), \ldots, s_N(x))$ forme une base de $\mathbf{R}^N$. Mais par continuité de $y \mapsto \det(s_1(y), \ldots, s_N(y))$, cela reste vrai au voisinage de x. Il en résulte que E est bien un sous-fibré vectoriel de $X \times \mathbf{R}^N$. Enfin, une section globale de E est en particulier une section globale de $X \times \mathbf{R}^N$, donc s'écrit $s + s'$ avec $s \in M$ et $s' \in M'$. Mais l'on a nécessairement $s'(x) = 0$ pour tout x, et donc $\Gamma(X,E) = M$, ce qui est la surjectivité recherchée.

Finalement, on a obtenu le théorème de Swan :

Théorème 5 *Soit X un espace compact. Le foncteur $\Gamma(X,-)$ est une équivalence de catégories entre les fibrés vectoriels sur X et les modules projectifs de type fini sur $C(X)$. En particulier, $K(X) = K_0C(X)$.*

2 Algèbres et modules de Clifford

2.1 Rappels d'algèbres tensorielles

Nous supposons déjà connue la notion de produit tensoriel. Nous rappelons juste les points principaux, afin de motiver l'introduction des algèbres de Clifford. Soit donc E un module sur k de dimension n. [2] Nous notons son algèbre tensorielle $T(E) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k E = k \oplus E \oplus E \otimes E \oplus \ldots$. C'est une algèbre graduée. Elle est munie de la propriété universelle suivante :

Propriété universelle 1 *Soit f un morphisme de modules de E vers une algèbre F. Alors f s'étend d'une unique manière en un morphisme d'algèbres de $T(E)$ sur F.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & \nearrow & \\ T(E) & & \end{array}$$

En particulier, en prenant $f = Id$, on voit que toute algèbre sur E est un quotient de l'algèbre tensorielle $T(E)$, qui est par là «l'algèbre universelle sur E».

Le problème de cette algèbre est qu'elle est trop «grosse». En particulier, elle n'est pas de dimension finie. On va donc prendre des restrictions de cette algèbre (ou plus exactement des quotients), en essayant de trouver des algèbres qui soient à la fois assez «générales» (c'est à dire qui aient de bonnes propriétés universelles) et si possible de dimensions finies. Une première idée est de considérer l'idéal I engendré par les éléments $x \otimes x$ dans $T(E)$ et d'introduire l'algèbre extérieure $\Lambda(E) = T(E)/I$. Comme I est engendré par des éléments d'ordres 2, I est un idéal gradué : $I = \oplus I_k$ avec $I_k = I \bigcap T^k(E)$. Ainsi, la structure d'algèbre graduée de $T(E)$ induit une structure d'algèbre graduée sur $\Lambda(E) = \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k E$, avec $\Lambda^k E = T^k E / I_k$. Il est facile de vérifier que Λ^k est de dimension C_n^k, donc que $\Lambda(E)$ est de dimension 2^n. [3] On a la propriété universelle suivante :

Propriété universelle 2 *Soit f un morphisme de modules de E vers une algèbre F tel que pour tout $x \in E$, $f(x)^2 = 0$. Alors f s'étend d'une unique manière en un morphisme d'algèbres de $\Lambda(E)$ sur F.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Lambda(E) & & \end{array}$$

En effet, f s'étend en un morphisme de $T(E)$ sur f, et les propriétés de f montrent que l'on peut passer au quotient par I.

On peut également remarquer qu'on a un isomorphisme entre applications k-alternées de E vers F et les applications linéaires de $\Lambda^k E$ vers F, cela se déduit de l'isomorphisme entre les applications k-linéaires de E vers F et les applications linéaires de $T^k E$ vers F.[4]

[2]Nous supposons pour simplifier que la caractéristique de k est différente du 2. De toute façon dans la suite de ce mémoire, on s'intéresse à des espaces vectoriels sur **R** ou **C**.

[3]En effet, $\Lambda^k E = \underbrace{E \hat{\otimes} E \cdots \hat{\otimes} E}_{k fois}$, l'algèbre extérieure est ainsi l'algèbre universelle gauche sur E.

[4]Ce qui prouve au passage la note 3...

$\Lambda^k E$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de k-vecteurs, c'est à dire d'éléments de la forme $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k$, $x_i \in E$. On peut donner une vision géométrique simple des k-vecteurs. Si on suppose que E est un espace euclidien (ou plus généralement que E est muni d'une forme quadratique), alors on peut étendre le produit scalaire à $\Lambda^k E$ par

$$< x_1 \wedge \cdots \wedge x_k, y_1 \wedge \cdots \wedge y_k >= \begin{vmatrix} x_1 \cdot y_1 & \dots & x_1 \cdot y_k \\ \vdots & & \vdots \\ x_k \cdot y_1 & \dots & x_k \cdot y_k \end{vmatrix}$$

En effet,

$$(y_1, \dots, y_k) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 \cdot y_1 & \cdots & x_1 \cdot y_k \\ \vdots & & \vdots \\ x_k \cdot y_1 & \dots & x_k \cdot y_k \end{vmatrix}$$

est une application anti-symétrique.

Ainsi, $< x_1 \wedge \cdots \wedge x_k, x_1 \wedge \cdots \wedge x_k >$ est le volume du parallélépipède de base $(x_1, \dots, x_k)$. Comme $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ est orienté, on peut ainsi visualiser ce k-vecteur comme un volume orienté.

y

x

FIG. 1 – Le bivecteur $x \wedge y$

Citons pour conclure ces quelques rappels un lemme algébrique caractérisant les k-vecteurs.

Lemme 6 *Condition de décomposabilité*
Soit $z \in \Lambda^k E$. Soit V_z le sous-module de E formé par les $x \in E$ tels que $z \wedge x = 0$. Alors z est un k-vecteur si et seulement si $\dim V_z = k$.

Démonstration. Soit $q = \dim V_z$ et (x_i) une base de V_z. Montrons qu'il existe $v \in \Lambda^{k-q} E$ tel que $z = v \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_q$.

En effet, complétons (x_i) en une base de E. Comme $z \in \Lambda^k E$, $z = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_q} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$. Par définition, $z \wedge x_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Donc les α_I ne contenant pas l'indice i, $1 \leqslant i \leqslant q$ sont nuls (car quand on multiplie par x_i il ne reste plus que les termes ne contenant originellement pas x_i et ils restent libres). Tous les termes contiennent donc au moins $x_1 \wedge \cdots \wedge x_q$ et $z = v \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_q$.

Or si $q = p$, alors forcément $v \in k$ et z est bien un k-vecteur. Réciproquement, si $z = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \neq 0$, les (x_i) forment un système libre de V_z, donc $\dim V_z = p$ car on vient de voir que $\dim V_z \leqslant p$ dans tous les cas. □

2.2 Construction de l'algèbre de Clifford

Nous prenons toujours E un k-ev et nous le munissons d'une forme quadratique Q. Un des problèmes majeurs concernant l'algèbre extérieure, c'est que $\|a \wedge b \leqslant |a||b|$ mais il n'y a pas égalité en général (car $x \wedge x = 0\,!$). Or on aimerait bien une algèbre ayant cette propriété, car la multiplication par un vecteur engendrerait une rotation. On va donc chercher une algèbre $C(E)$ telle que[5]

- $x^2 = Q(x)$ pour tout $x \in E$ (on aura alors trivialement : $2b(x, y) = xy + yx$ si b est la forme bilinéaire associée à Q).
- E engendre $C(E)$

On remarque que ΛE vérifie ces propriétés pour $Q = 0$. Ce qui motive la construction suivante :

Définition 8 Soit $I(Q)$ l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes x - Q(x).1$ dans $T(E)$. Alors on définit l'algèbre de Clifford comme étant le quotien de $T(E)$ par $I(Q)$, c'est-à-dire : $C(Q) = T(E)/I(Q)$. [6]

Remarque

- Soit $i_Q : E \to C(Q)$ la composée canonique de $E \to T(E) \to C(Q)$. On voit facilement que i_Q est une injection (car les éléments annulés par le passage au quotient sont de degré au moins deux), ce qui nous permet d'identifier E à $i_Q(E) \subset C(Q)$.
- Par construction même, on a $x \cdot x = Q(x) \cdot 1$, donc $C(E)$ répond bien à la motivation initiale.

Les propriétés de l'algèbre extérieure que nous avons vu en rappel se généralisent trivialement aux algèbres de Clifford. Elles vérifient la propriété universelle suivante :

Propriété universelle 3 *Soit $\Phi : E \to A$ une application linéaire de E dans une algèbre unifère A, qui vérifie $\Phi(x)^2 = Q(x) \cdot 1$ pour tout $x \in E$. Alors il existe un unique morphisme $\tilde{\Phi} : C(Q) \to A$ qui prolonge ϕ.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & A \\ \downarrow & \nearrow & \\ C(E) & & \end{array}$$

Démonstration. On procède comme dans les rappels, on étend Φ à $T(E)$ puis on passe au quotient. $\square$

2.3 Premières propriétés, structure élémentaire.

2.3.1 Quelques morphismes

L'idéal $T(E)$ définissant l'algèbre de Clifford n'est pas un idéal gradué pour la **Z**-graduation usuelle de l'algèbre tensorielle. En revanche, comme $T(E)$ est engendré par

[5] En fait ces propriétés caractérisent l'algèbre de Clifford si on suppose de plus que C(E) n'est pas engendrée par un sous-espace strict de E.

[6] Nous noterons de temps en temps par abus de notation l'algèbre de Clifford $C(E)$ si l'on sous-entend la forme quadratique définie sur E.

une somme d'éléments de degré pair, on peut munir $C(E)$ d'une $\mathbf{Z}/2$-graduation : la graduation induite par $T(E) = T^+E \oplus T^-E$ où $T^+E = \oplus T^{2i}E$ et $T^-E = \oplus T^{2i+1}E$. Ainsi $C(E) = C^+E \oplus C^-E$ où C^+E est l'ensemble des éléments «pairs» de $C(E)$ et C^-E des éléments «impairs». On vérifie sans problème que

$$\begin{aligned} C^+C^+ &\subset C^+ \\ C^-C^- &\subset C^- \\ C^+C^- &\subset C^- \\ C^-C^+ &\subset C^- \end{aligned}$$

donc on a bien une $\mathbf{Z}_2$-graduation.

Nous allons maintenant nous servir de la propriété universelle 3 pour construire quelques morphismes.

Proposition 7 *On a un foncteur pleinement fidèle de* $\mathbf{Mod}_Q \to \mathbf{Alg}$ *de la catégorie des modules munis d'une forme quadratique dans la catégorie des algèbres par*

- $E \to C(E)$
- $f : (E, Q) \to (F, Q')$ *(où pour tout* $x \in E$, $Q'(f(x)) = Q(x)$*)* $\mapsto \tilde{f} : C(E) \to C(F)$

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'on peut bien étendre f. Or f est à valeur dans F, donc dans l'algèbre $C(F)$ via l'injection canonique de F dans $C(F)$, et pour tout $x \in E$, $f(x)^2 = Q'(f(x)) = Q(f(x))$, donc on peut bien étendre f à $C(E)$. □

Définition 9

- En prenant le cas $E = F$ et $f = -Id$ on obtient un automorphisme $\alpha : E \to C(Q)$ tel que $\alpha(x) = -x$. α est appelé l'automorphisme canonique de $C(Q)$.
- Si on considère $C(E)^{\mathbf{opp}}$ l'algèbre opposée de $C(E)$ et f l'identité de E dans $C(E)^{\mathbf{opp}}$, toujours par la propriété universelle on obtient un anti-automorphisme β de $C(Q)$ qui est l'identité sur E. C'est la transposée : $\beta(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = x_n \cdots x_2 \cdot x_1$ On note $x^t = \beta(x)$
- Ainsi, $x \mapsto \bar{x}$ défini par $x \mapsto \alpha(x^t) = \alpha(x)^t$ est un anti-automorphisme.

2.3.2 Structure élémentaire

Nous allons maintenant étudier la structure de l'algèbre de Clifford. Nous utiliserons le :

Lemme 8 *Soit* $E = E_1 \oplus E_2$ *une décomposition orthogonale de* E *par rapport à* Q*. Alors* $C(Q) \cong C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2)$*.*

Remarque Ici $C(Q_1)\hat{\otimes}C(Q_2)$ dénote le produit tensoriel gauche de $C(Q_1)$ et $C(Q_2)$, où si $A = \sum A^\alpha$ et $B = \sum B^\beta$, sont deux algèbres $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graduées, on définit $A\hat{\otimes}B$ comme étant l'espace vectoriel $\sum_{\alpha,\beta} A^\alpha \otimes B^\beta$ muni de la multiplication : $(u \otimes x_i) \cdot (y_j \otimes v) = (-1)^{ij} u y_j \otimes x_i v$ On remarque que $A\hat{\otimes}B$ est aussi graduée par $\sum A^i \otimes B^j (i + j \equiv k \pmod 2))$

Démonstration. On définit $\Psi : E \to C(Q_1)\hat{\otimes}C(Q_2)$ par $\Psi(x) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$ si $x = x_1 + x_2$ dans $E_1 \oplus E_2$. Alors

$$\begin{aligned}\Psi(x)^2 &= (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2)^2\\ &= (x_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes x_2^2) \text{ car l'algèbre est gauche}\\ &= (Q_1(x_1) + Q_2(x_2)) \cdot (1 \otimes 1)\\ &= Q(x) \cdot (1 \otimes 1)\end{aligned}$$

Donc Ψ s'étend en $\tilde{\Psi} : C(Q) \to C(Q_1)\hat{\otimes}C(Q_2)$. Or $C(Q_1)\hat{\otimes}C(Q2)$ est engendrée en tant qu'algèbre par les $x_1 \otimes 1$ et les $1 \otimes x_2$ donc $\tilde{\Psi}$ est surjective. L'injectivité viendra de l'égalité des dimensions, que nous étudions maintenant. □

Théorème 9 *$C(Q)$ est de dimension 2^n, et une base est donnée par $(e_{i_1} \cdots e_{i_p})$ avec $1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_m \leqslant n$ et (e_i) une base de E*

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la dimension.

Si $\dim E = 1$, $T(E)$ s'identifie à l'algèbre des polynômes $k[X]$ et $I(Q)$ est l'idéal engendré par $X^2 - a$. Donc $C(Q)$ est de dimension 2.

Si $\dim E > 1$, on écrit $E = E' \oplus E_1$, la somme étant orthogonale et $\dim E_1 = 1$.

Le lemme nous donne une surjection de $C(E)$ sur $C(E')\hat{\otimes}C(E_1)$. Or par hypothèse de récurrence, $C(E')$ est de dimension 2^{n-1} donc $C(E)$ est au moins de dimension 2^n.

Mais il est facile de voir que les $(e_{i_1} \cdots e_{i_p})$ où $1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_m \leqslant n$ sont générateurs (car $e_i^2 \in k$), donc $C(E)$ est de dimension 2^n ce qui conclut la récurrence. (ce qui montre au passage que les $(e_{i_1} \cdots e_{i_p})$ forment bien une base.) □

En particulier, on a ainsi (par exemple en prenant une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E) :

$$C(Q) = k[t_1]\hat{\otimes}k[t_2]\hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes}k[t_n] \tag{1}$$

où les t_i sont des éléments de degré deux sur k : $t_i^2 = Q(e_i)$.

Nous voyons par là l'importance de la structure graduée de $C(Q)$. $C^i(Q) = \{x \in C(Q) \mid \alpha(x) = (-1)^i x\}$. Cette structure graduée est donc fonctionnelle.

Nous concluons cette section par quelques exemples dans le cas où $k = \mathbf{R}$, qui montrent la généralité des algèbres de Clifford.

Exemple 3

- Si E est de dimension 1. $C(E)$ a pour base $(1, u)$ avec $u^2 = Q(e)$.
  - Si $Q(e) = -1$, on retrouve l'ensemble $\mathbf{C}$.
  - Si $Q(e) = 1$ on trouve l'ensemble des nombres complexes hyperboliques.
  - Si $Q(e) = 0$, on trouve l'ensemble des nombres duaux.
- Si $\dim E = 2$ et $Q(x) = -x_1^2 - x_2^2$, $C(Q)$ est engendré par $1, e_1, e_2, e_1e_2$. On a :

$$\begin{gathered} e_1^2 = -1\\ e_2^2 = -1\\ (e_1e_2)^2 = -(-1)^2 = -1\\ e_2 \cdot (e_1e_2) = -e_1e_2^2 = e_1\\ (e_1e_2) \cdot e_1 = e_2 \end{gathered}$$

On obtient l'algèbre des quaternions.

2.4 Cas des algèbres de Clifford réelles

2.4.1 L'algèbre C_k

Nous allons spécialiser ce qui précède au cas des espaces réels de dimension finie. Soit donc $\mathbf{R}^k$ l'espace réel de dimension k et $Q_k(x_1, \ldots, x_k) = -\sum x_i^2$ la forme quadratique négative canonique. Alors on définit l'algèbre C_k comme l'algèbre $C(Q_k)$ et bien sûr on identifie $\mathbf{R}^k$ et son injection dans C_k, ainsi que $\mathbf{R}$ avec $\mathbf{R} \cdot 1 \subset C_k$

Si on note $(e_1, \ldots, e_k)$ la base canonique de R^k, on voit que C_k est engendrée (en tant qu'algèbre) par $(e_1, \ldots, e_k)$ Ainsi, pour $k = 0, C_k = \mathbf{R}$

Nous allons maintenant déterminer la structure de C_k.

Proposition 10 *L'algèbre C_k est isomorphe (en tant que $\mathbf{R}$-algèbre) à des produits tensoriels gauches de $\mathbf{C}$:*

$$C_k \cong \mathbf{C} \hat{\otimes} \mathbf{C} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathbf{C} \text{ } k \text{ termes} \tag{2}$$

Démonstration. Grâce au lemme 8, il suffit de montrer que C_k est isomorphe à $\mathbf{C}$. Or C_1 est engendré par 1 et e_1. Or par définition, $e_1 \otimes e_1 = -1$. D'où $C_1 \cong \mathbf{R}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbf{C}$. □

Corollaire 11 *C_k est l'algèbre universelle unifère engendrée sur $\mathbf{R}$ par k symboles $e_1, \ldots, e_k$ vérifiant les relations :*

$$e_j^2 = -1, \qquad e_i e_j + e_j e_i = 0 \tag{3}$$

Démonstration. $e_i e_j + e_j e_i = 0$ vient de ce que les e_i sont dans $C^1(Q_k)$ et que l'algèbre est gauche. Quand à $e_j^2 = -1$ cela vient immédiatement de la structure de C_1 et de la proposition 10. □

2.4.2 Détermination des algèbres C_k

Le problème, pour déterminer les C_k, c'est que ce sont des produits tensoriels gauches de C. Nous allons nous ramener au calcul de vrais produits tensoriels en introduisant C'_k, l'algèbre de Clifford sur $\mathbf{R}^k$ de $Q_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum x_i^2$. C'est l'algèbre universelle unifère engendrée sur $\mathbf{R}$par les k symboles $e'_1, \ldots, e'_k$ vérifiant les relations :

$$e_j'^2 = -1, \qquad e'_i e'_j + e'_j e'_i = 0 \tag{4}$$

(Il suffit d'adapter le corollaire 11).

Pour cela, on utilisera la

Proposition 12

$$C_k \otimes_{\mathbf{R}} C'_2 \cong C'_{k+2}$$

$$C'_k \otimes_{\mathbf{R}} C_2 \cong C_{k+2}$$

Rappel Il peut être utile de rappeler que si A et B sont deux algèbres, alors $A \otimes B$ peut être munie d'une structure d'algèbre par $a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$

Dans le cas d'algèbres de dimensions finies, $C = A \otimes B$ est caractérisée par les propriétés suivantes[7]

- $ab = ba$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$
- C est engendrée par A et B
- $\dim C = (\dim A)(\dim B)$

Démonstration. Pour distinguer $\mathbf{R}^k \subset C'_k$ de $\mathbf{R}^k \subset C_k$, on note le premier $\mathbf{R}'$.

Soit $\Psi : \mathbf{R}'^{k+2} \to C_k \otimes C'_2$ défini par

$$\Psi(e'_i) = \begin{cases} e_{i-2} \otimes e'_1 e'_2 & 2 < i \leqslant k \\ 1 \otimes e'_i & 1 \leqslant i \leqslant 2 \end{cases}$$

Un calcul facile montre que Ψ satisfait la propriété universelle des algèbres de Clifford et s'étend donc en un morphisme de $C'_{k+2} \to C_k \otimes C'_2$ Or Ψ est clairement surjective (l'image de la base contient des générateurs de $C_k \otimes C'_2$, donc c'est un automorphisme, par égalité des dimensions). La première assertion se démontrer de même, en considérant :

$$\Psi'(e_i) = \begin{cases} e'_{i-2} \otimes e_1 e_2 & 2 < i \leqslant k \\ 1 \otimes e_i & 1 \leqslant i \leqslant 2 \end{cases}$$

$\square$

Nous avons maintenant tous les outils qu'il faut, en utilisant les isomorphismes élémentaires suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{F}(n) & \cong & \mathbf{R}(n) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{F} \\ \mathbf{R}(n) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}(m) & \cong & \mathbf{R}(nm) \\ \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} & \cong & \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \\ \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} & \cong & \mathbf{C}(2) \\ \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H} & \cong & \mathbf{R}(4) \end{cases} \tag{5}$$

où $\mathbf{F}$désigne un des trois corps $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ou $\mathbf{H}$et $\mathbf{F}(n)$ représente l'anneau des matrices $n \times n$ sur $\mathbf{F}$.

Enfin, les relations entre les e_i et les e'_i nous donnent :

$$\begin{array}{ll} C_1 \cong \mathbf{C} & C'_1 \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \\ C_2 \cong \mathbf{H} & C'_2 \cong \mathbf{R}(2) \end{array}$$

Démonstration. On a déjà vu dans l'exemple 3 que $C_1 \cong \mathbf{C}$, que $C'_1 \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ et $C_2 \cong \mathbf{H}$ (en effet, $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$, qui est vue comme algèbre par multiplication composante par composante, peut-être vue comme l'ensemble des éléments de la forme : $a + jb$, avec $j^2 = 1, j \neq 1$, en prenant par exemple $1 = (1, 1)$ et $j = (1, -1)$. C'est donc bien l'algèbre des nombres complexes hyperboliques).

Pour C'_2, on considère le morphisme :

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

k	C_k	C'_k	$C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = C'_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$
1	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$	$\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$
2	$\mathbf{H}$	$\mathbf{R}(2)$	$\mathbf{C}(2)$
3	$\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$	$\mathbf{C}(2)$	$\mathbf{C}(2) \oplus \mathbf{C}(2)$
4	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{C}(4)$
5	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{H}(2) \oplus \mathbf{H}(2)$	$\mathbf{C}(4) \oplus \mathbf{C}(4)$
6	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{H}(4)$	$\mathbf{C}(8)$
7	$\mathbf{R}(8) \oplus \mathbf{R}(8)$	$\mathbf{C}(8)$	$\mathbf{C}(8) \oplus \mathbf{C}(8)$
8	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{C}(16)$

TAB. 1 – Représentation des algèbres de Clifford euclidiennes et anti-euclidiennes.

On vérifie sans difficulté que c'est un isomorphisme. □

En appliquant 12 et 5 on obtient ainsi la table 2.4.2.

Et on a fini. En effet, la proposition 12, on a $C_4 \cong C'_4$, $C_{k+4} \cong C_k \otimes C_4$, $C_{k+8} \cong C_4 \otimes C_8$. Or $C_8 = C'_8 = \mathbf{R}(16)$ Ainsi, on a en utilisant $\mathbf{R}(n) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}(m) \cong \mathbf{R}(nm)$, on a $C_{8k} \cong \mathbf{R}(16^k)$. Plus généralement, si on augmente la dimension de 8, la structure n'est pas changée, mais les dimensions sont multipliées par 16. (car $\mathbf{F}(n) \cong R(n) \otimes_{\mathbf{R}} F$). On remarque que l'évolution du complexifié de C_k, qui n'est autre que l'algèbre de Clifford de Q_k sur $\mathbf{C}$, est bien plus simple : sa période est d'ordre 2.

2.4.3 Cas général

Encore une fois, seuls les résultats concernant la détermination de l'algèbre C_k nous seront utile pour la suite de ce mémoire. Toutefois, par souci de complétude, nous donnons ici des descriptions pour toute algèbre de Clifford associée à un espace vectoriel réel. Comme les formes quadratiques réelles sont déterminées par leur indice de Sylvester (p, q), nous allons étudier la structure des algèbres de Clifford associées $C_{p,q}$ (en terme d'algèbres de Matrices). Nous avons déjà étudié dans la section précédente le cas des formes définies positives et définies négatives.

Il faut cependant remarquer que nous perdons des informations en représentant. En effet, dans les algèbres de Clifford, il y a un sous-espace caractéristique, à savoir E. Dans les représentations que nous avons déjà vue, il n'y a pas de telles caractérisations «immédiates» de E.

Commençons par remarquer que l'on a aussi déjà trouvé la structure des formes quadratiques complexes. Cela vient du lemme suivant :

Lemme 13 *Soit K' un sur-corps commutatif du corps K. Soit Q une forme quadratique sur E, un K-espace vectoriel. Soit Q' le forme quadratique étendue à l'amplifié de E par K' : $E' = E \otimes K'$. Alors $C'(E) = C(E) \otimes K' \cong C(E')$.*
(«L'algèbre de Clifford de l'amplifié est l'amplifié de l'algèbre de Clifford.»)

[7]En effet, la propriété1 donne un morphisme Ψ de $A \otimes B$ dans C, qui est surjectif par 1 et injectif par 1.

Démonstration. Soit u l'application K'-linéaire qui envoie $e_i \otimes 1 \in E' \mapsto e_i \otimes 1 \in C'(E)$. (Si l'on note i l'injection canonique de $E \to C(E)$, u n'est autre que $i \otimes 1$).

On calcule

$$(u(x \otimes a))^2 = (x \otimes a)^2 = (x \cdot x) \otimes a^2 = a^2 Q(x) = Q'(x \otimes a)$$

or comme les éléments de E' s'écrivent comme sommes finies d'éléments de cette forme, on a donc : $\forall z \in E', u(z)^2 = Q'(z)$.

D'où par propriété universelle des algèbres de Clifford on obtient un morphisme de $C(E')$ dans $C'(E)$. C'est un isomorphisme car les bases s'appliquent l'une sur l'autre. $\square$

Soit donc Q_1 une forme quadratique sur $\mathbf{C}^n$. Soit Q_2 la forme quadratique définie négative canonique sur $\mathbf{R}^n$, et Q'_2 son extension au complexifié $R^n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong \mathbf{C}^n$. Par le lemme 13, on sait que $C(Q'_2) \cong C(Q_2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Or comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, toutes les formes quadratiques sont équivalentes, et par fonctorialité (proposition 7), $C(Q'_2) \cong C(Q_1)$.

D'où

$$C(Q_1) \cong C(Q_2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}(n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbf{C}(n-1) \oplus \mathbf{C}(n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Passons maintenant à la structure des $C_{p,q}$. Nous nous servirons de celles que nous connaissons déjà grâce aux isomorphismes suivants :

Proposition 14

1. *$Cl_{p+1,q+1} \cong \mathrm{Mat}(2, C_{p,q})$*
2. *$Cl_{p,q} \cong C_{q+1,p-1}$ (symétrie)*

Démonstration. Commençons par l'isomorphisme 1. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthogonale de $\mathbf{R}^{p+q}$. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n, \quad e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

anticommutent donc génèrent l'algèbre de Clifford $C_{p+1,q+1}$ (car de plus $e_+^2 = 1$ et $e_-^2 = -1$). $C_{p+1,q+1}$ est ainsi isomorphe à l'algèbre de matrices 2×2 à éléments dans $C_{p,q}$ donc à $\mathrm{Mat}(2, C_{p,q})$.

Remarquons que $x \in C_{p,q}$ est envoyé sur

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

On peut aussi représenter x par

$$x^+ + x^- \cdot e_+ e_- = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

où $x = x^+ + x^-$ est la décomposition de x en éléments pairs et en éléments impairs. On vérifie que $e'_i = e_i e_+ e_-$ génèrent une copie de $Cl_{p,q}$, or ils commutent avec e_+ et e_- (qui engendrent $C_{1,1}$), et les e'_i, e_+ et e_- génèrent $C_{p+1,q+1}$. D'où

$$C_{p+1,q+1} \cong C_{p,q} \otimes C_{1,1} \cong C_{p,q} \otimes \mathrm{Mat}(2, \mathbf{R})$$

ce qui donne une autre preuve du résultat.

Pour le second isomorphisme, soit toujours $e_1, \ldots, e_n$ une base orthogonale de $\mathbf{R}^{p+q}$. Soit $e'_1 = e_1$ et $e'_i = e_i e_1$ si $i > 1$. Les e'_i anticommutent et $e_1'^2 = e_1^2$, $e_i'^2 = -e_i^2$ donc ils génèrent $C_{q+1,p-1}$. Comme ils ont même dimension, on conclut que

$$C_{p,q} \cong C_{q+1,p-1}$$

□

Cela nous permet grâce au tableau 2.4.2 de caractériser tous les $C_{p,q}$, $p + q \leqslant 7$. (cf tableau 2, où on a noté pour simplifier ${}^2\mathbf{F} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}$). Nous retrouvons la périodicité de 8, en fait on a même une double périodicité : sur les diagonales, et sur les horizontales. Nous retrouverons cette périodicité lors de l'étude du K_0 de certains fibrés vectoriels. Ces périodicités découlent du

Théorème 15
- $C_{p,q} \cong C_{p-4,q+4}$ *pour* $p \geqslant 4$ *(Cartan, 1908)*
- $C_{p+8,q} \cong C_{p,q+8} \cong \mathrm{Mat}(16 C_{p,q})$

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthogonale de R^{p+q}. Formons

$$e'_i = e_i e_1 e_2 e_3 e_4 \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$
$$e'_i = e_i \qquad \text{pour } i > 4$$

alors les e'_i génèrent $C_{p-4,q+4}$ ce qui montre que $C_{p,q} \cong C_{p-4,q+4}$.

Pour la deuxième assertion, soit $e_1, \ldots, e_{n+8}$ une base orthogonale de $C_{p,q+8}$. Posons

$$e'_i = e_i e_{n+1} \cdots e_{n+9} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Alors les e'_i génèrent une sous-algèbre isomorphe à $C_{p,q}$ tandis que $e_{n+1}, \ldots, e_{n+8}$ engendrent $C_{0,8} \cong \mathrm{Mat}(16, \mathbf{R})$ (cf le tableau 2.4.2). Or ces deux algèbres commutent et engendrent $C_{p,q+8}$, d'où

$$C_{p,q+8} \cong C_{p,q} \otimes \mathrm{Mat}(16, \mathbf{R}) \cong \mathrm{Mat}(16, C_{p,q})$$

L'autre assertion se démontre de même, par symétrie. □

2.5 Algèbres de Clifford sur un corps quelconque.

Pour le lecteur intéressé, nous citons ici quelques résultats concernant les algèbres de Clifford sur un corps quelconque (en particulier sur des corps algébriquement clos). Comme cette section a juste un intérêt culturel, nous ne prouverons généralement pas les résultats obtenus. Elles peuvent se trouver dans [Cru74] par exemple.

$p+q$ \ $p-q$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0								$\mathbf{R}$							
1							$\mathbf{C}$		${}^2\mathbf{R}$						
2						$\mathbf{H}$		$\mathbf{R}(2)$		$\mathbf{R}(2)$					
3					${}^2\mathbf{H}$		$\mathbf{C}(2)$		${}^2\mathbf{R}(2)$		$\mathbf{C}(2)$				
4				$\mathbf{H}(2)$		$\mathbf{H}(2)$		$\mathbf{R}(4)$		$\mathbf{R}(4)$		$\mathbf{H}(2)$			
5			$\mathbf{C}(4)$		${}^2\mathbf{H}(2)$		$\mathbf{C}(4)$		${}^2\mathbf{R}(4)$		$\mathbf{C}(4)$		${}^2\mathbf{H}(2)$		
6		$\mathbf{R}(8)$		$\mathbf{H}(4)$		$\mathbf{H}(4)$		$\mathbf{R}(8)$		$\mathbf{R}(8)$		$\mathbf{H}(4)$		$\mathbf{H}(4)$	
7	${}^2\mathbf{R}(8)$		$\mathbf{C}(8)$		${}^2\mathbf{H}(4)$		$\mathbf{C}(8)$		${}^2\mathbf{R}(8)$		$\mathbf{C}(8)$		${}^2\mathbf{H}(4)$		$\mathbf{C}(8)$

TAB. 2 – Représentation des algèbres de Clifford réelles.

Soit donc E un k-ev de dimension n, Q une forme quadratique sur E. Comme cela peut se remarquer lorsqu'on étudie les algèbres de Clifford réelles ou complexes, on obtient des résultats très différents selon que n est pair ou non.

En fait, on a le résultat suivant, qui montre qu'il suffit d'étudier l'un de ces cas :

Proposition 16 *Si $n = 2r+1$, Q forme quadratique sur E non dégénérée, alors*
- *$C^+(Q) \cong C(Q_1)$, Q_1 étant une forme quadratique sur un espace de dimension $2r$.*
- *$C(Q) \cong C^+(Q_2)$, Q_2 étant une forme quadratique sur un espace de dimension $2r+2$.*

et Q_1, Q_2 sont non dégénérées.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ non isotrope et $F = (x_0)^\perp$. Sur F, nous considérons la forme quadratique Q_1 :

$$Q_1(y) = -Q(x_0)Q(y), y \in F$$

Q_1 est non dégénérée, en effet, si $u = x + y \in E$, avec $x \in kx_0$, $y \in F$:

$$\begin{aligned} Q(u) &= Q(x+y) \\ &= Q(x) + Q(y) \\ &= (a_0)^2 Q(x_0) + Q(y) \end{aligned}$$

Donc si Q_1 était dégénérée, on aurait une décomposition de Q en moins de n carrés. C'est impossible.

Enfin, si $y \in F$,

$$(x_0 y)^2 = -y^2 x_0^2 = -Q(x_0)Q(y) = Q_1(y)$$

. Donc $y \mapsto x_0 y$ se prolonge en un morphisme de $C(Q_1)$ dans $C^+(Q)$. Par égalité des dimensions, c'est un isomorphisme (l'injectivité vient de ce que si $y \in \Lambda(F) \neq 0$, $x_0 y \neq 0$ car $x_0 \notin F$. Comme x_0 est non isotrope, $x_0 y \neq 0$ dans $C(E)$ non plus).

Pour construire Q_2, il suffit de considérer $F = E \oplus x_0 k$, et on définit Q_2 par $Q_2(x_0) = \alpha \neq 0$, $-\alpha Q_2(y) = Q(y)$ pour $y \in E$, et en prenant $x_0 \perp E$. La même démonstration que précédemment appliquée à $C(Q_2)$ montre que $C^+(Q_2) \cong C(Q)$.
$\square$

Théorème 17 *Si $n = 2r$ est pair, Q non dégénérée, alors $C(Q)$ est une algèbre centrale simple ($Z = k \cdot 1$).*

Si de plus Q est neutre, alors $C(Q)$ est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel S de dimension 2^r sur k : $C(Q) \cong \operatorname{End} S$.

Dans ce cas, et si $r > 0$, $C^+(Q)$ est composée directe de deux idéaux isomorphes à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 2^{r-1} sur k.

Si $n = 2r+1$ est impair, Q non dégénérée, alors $C(Q)$ a pour centre une extension quadratique de k ($Z = k.1 + k \cdot e_1 \cdots e_n$). Soit D le discriminant de Q. Alors

- *Si $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ n'est pas un carré, le centre est un corps et $C(Q)$ est simple.*
- *Si $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ est pas un carré, le centre s'écrit $Z = ku \oplus kv$, avec $uv = 0$, $u^2 = u$, $v^2 = v$. De plus, $C(Q) = C(Q)u \oplus C(Q)v$, et $C(Q)u$, $C(Q)v$ sont les seuls idéaux non triviaux de $C(Q)$.*

Enfin, si Q est d'indice maximum, alors $C(Q)$ est composée directe de deux idéaux isomorphes à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 2^r sur k, $C^+(Q)$ est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 2^r sur k

Rappel L'indice d'une forme quadratique est la dimension d'un sous-espace vectoriel complètement isotrope maximal (La théorème de Witt montre que l'indice ne dépend pas du sous-espace isotrope maximal choisi). Q est neutre si elle est non dégénérée et d'indice maximum (dans ce cas, si n est pair, E est hyperbolique). C'est toujours le cas si Q est non dégénérée et que k est algébriquement clos.

Ainsi, le théorème précédent montre que les représentations pour les algèbres de Clifford sur des corps algébriquement clos sont les mêmes que les représentations d'algèbres de Clifford complexes.

2.6 Spineurs

2.6.1 Motivations

On sait que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a^2 + b^2 = 1$$

Il est donc isomorphe au groupe unité $\mathbf{U}$ de $\mathbf{C}$ (on le voit en prenant par exemple la représentation classique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}^2$, ou encore en faisant agir $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ par $u \cdot x \mapsto ux$).

Ceci nous donne une paramétrisation de $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$. Il est classique que l'on peut également paramétrer $\mathrm{SO}(3, R)$ et $\mathrm{SO}(4, \mathbf{R})$ grâce aux quaternions.

Plus précisément si on note G le groupe unité de $\mathbf{H}$ (c'est à dire l'ensemble des $\{x \in \mathbf{H} \mid N(x) = x\bar{x} = 1\}$, alors l'action par conjugaison de G sur les quaternions purs $\mathrm{Im}(\mathbf{H}) \cong \mathbf{R}^3$ induit une suite exacte

$$1 \to \{1, -1\} \to G \stackrel{u \cdot x = uxu^{-1}}{\to} \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$$

(on vérifie que cette suite est non scindée, donc on ne peut pas paramétrer fidèlement $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ à l'aide d'un sous-groupe de G).

On peut également paramétrer $\mathrm{SO}(4, \mathbf{R})$ par $(u_1, u_2) \cdot x \mapsto u_1 x u_2^{-1}$. Cela induit également une suite exacte

$$1 \to \{(1,1), (-1,-1)\} \to G \times G \to \mathrm{SO}(4, \mathbf{R})$$

Enfin, on peut noter que G permet de paramétrer fidèlement $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$ via $u \cdot x \mapsto ux$. (on peut trouver ces résultats dans [Lou97]).

On cherche à étendre ceci à des espaces de dimensions supérieures (et également à d'autres formes quadratiques que la forme euclidienne canonique).

Une des idées qui vient, est de multiplier par des k-vecteurs. Mais on a déjà vu que ça ne marchait pas, car l'algèbre extérieure ne conserve pas la norme. Par contre, si on considère $x = x_1 \cdots x_k$ un «k-vecteur» de $C(Q)$, on peut définir sa norme par : $N(x) = Q(x_1) \cdots Q(x_k) = xx^t$. Si $N(x) = 1$, et $y \in E$, alors $N(xy) = N(y)$. Cependant, xy n'a aucune raison d'être dans E. Par contre ce sera le cas pour xyx^{-1}. Pour pouvoir paramétrer tout le groupe orthogonal, il nous faudra étendre ceci à d'autres éléments de $C(Q)$ et utiliser une norme «tordue».

2.6.2 Les groupes $\mathrm{Pin}\, Q$ et $\mathrm{Spin}\, Q$

Précisons donc les idées de la partie précédente. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (en fait, on peut étendre ce qui va suivre à tout corps commutatif de caractéristique 0, modulo les résultats admis dans la section précédente). Q une forme quadratique non dégénérée sur E, un $\mathbf{K}$-ev de dimension n.

On note $C^*(Q)$ le groupe des éléments inversibles de $C(Q)$.

Définition 10 Le groupe de Clifford (tordu) $\mathbf{\Gamma}$ est le sous-groupe des éléments $x \in C^*(Q)$ qui vérifient pour tout $y \in E$: $\alpha(x)yx^{-1} \in E$.

Enfin, on pose $\mathbf{\Gamma}^+ = \mathbf{\Gamma} \bigcap C^+(Q)$

Comme α est un automorphisme, $\mathbf{\Gamma}$ est clairement un sous-groupe. De plus, comme α et la transposition β laissent E stable, α et β induisent un automorphisme et un anti-automorphisme sur $\mathbf{\Gamma}$ (et donc la conjugaison, $x \to \bar{x}$ induit également un anti-automorphisme).

La définition de $\mathbf{\Gamma}$ nous donne immédiatement une représentation $\rho : \mathbf{\Gamma} \to \mathrm{Aut}(E)$ par $\rho(x) \cdot y = \alpha(x)yx^{-1}$. Cette représentation est presque fidèle.

Proposition 18 *Le noyau de ρ est $\mathbf{K}^*$.*

Démonstration. Si $x \in \mathrm{Ker}\, \rho$, on a donc

$$\alpha(x)y = yx \quad \text{pour tout } y \in E \tag{6}$$

Décomposons x en $x = x^+ + x^-$. Alors (6) devient

$$x^+ y = yx^+ \tag{7}$$

$$x^- y = yx^- \tag{8}$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $\alpha_k = Q(e_k)$. Écrivons $x^+ = a + e_1 b$, où e_1 n'apparaît ni dans a, ni dans b. Donc $a \in C^+(Q)$ et $b \in C^-(Q)$. En spécifiant $y = e_1$ dans (7), on obtient :

$$ae_1 - \alpha_1 b = ae_1 + \alpha_1 b$$

Comme Q est non dégénérée, $\alpha_1 \neq 0$ donc $b = 0$. Ce qui montre que e_1 n'apparaît pas dans l'écriture de x^+. En appliquant ceci aux autres éléments de la base, on trouve que $x^+ \in \mathbf{K}$.

On procède de même pour x^-, si $x^- = a + e_1 b$, alors (8) appliqué à $y = e_1$ nous donne

$$\begin{aligned} ae_1 + e_1 b e_1 &= -(e_1 a + e_1^2 b) \\ ae_1 + \alpha_1 b &= ae_1 - \alpha_1 b \end{aligned}$$

D'où comme précédemment, $x^- \in \mathbf{K}$, ce qui n'est possible que si $x^- = 0$ car $x^- \in C^-(Q)$. □

Ceci va nous permettre de définir une norme sur le groupe de Clifford.

Définition 11 Nous définissons $N : C(Q) \to C(Q)$ par [8]

$$N(x) = x\bar{x}$$

Si $x \in E$, $N(x) = -Q(x) = -\|x\|^2$.

Proposition 19 *N est un morphisme de $\mathbf{\Gamma}$ dans $\mathbf{K}^*$, stable par α.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{\Gamma}$. Pour montrer que $N(x) \in \mathbf{K}^*$, il suffit de montrer que $N(x) \in \operatorname{Ker} \rho$. Or

$$\alpha(x) y x^{-1} = y', \quad y' = \rho(x) y \in E$$

D'où, puisque $y^t = y$,

$$\begin{aligned} (x^t)^{-1} y \alpha(x)^t &= \alpha(x) y x^{-1} \\ y \alpha(x^t) x &= x^t \alpha(x) y \end{aligned}$$

Donc $\alpha(x^t)x \in \operatorname{Ker} \rho \subset \mathbf{K}^*$, ce qui amène (en transposant) $N(x^t) = x^t \alpha(x) \in \mathbf{K}^*$. Comme β est un anti-automorphisme de $\mathbf{\Gamma}$, on a bien $N(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathbf{K}^*$.

$N(xy) = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = N(x)N(y)$, donc c'est bien un morphisme.

Enfin, $N(\alpha(x)) = \alpha(x)x^t = \alpha(N(x)) = N(x)$. □

Proposition 20 *$\rho(\mathbf{\Gamma})$ est contenu dans le groupe des isométries de (E, Q).*

Démonstration. En utilisant la proposition 19 et le fait que $E \backslash \{0\} \subset \mathbf{\Gamma}$, on obtient :

$$N(p(x) \cdot y) = N(\alpha(x) y x^{-1}) = N(\alpha(x)) N(y) N(x^{-1}) = N(y)$$

□

[8] On remarque que pour $C_1 = \mathbf{C}$ et $C_2 = \mathbf{H}$, on retrouve la norme habituelle.

En fait, ρ est une surjection de $\mathbf{\Gamma}$ sur $\mathrm{O}(Q)$ (cf le théorème suivant). Cependant, ce groupe est trop gros, (en particulier, il n'est pas simplement connexe, on a donc aucune chance de trouver le revêtement universel de $\mathrm{O}(Q)$ de cette manière).

On va essayer de restreindre l'espace de départ. On a déjà vu que $\rho(x) = \rho(y) \Leftrightarrow x \in Ky$. On va donc essayer de se restreindre aux éléments de norme 1. Cependant, si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, si $N(x) < 0$, on ne peut pas trouver de tel élément dans $\mathbf{K}x$. Ceci nous conduit en fait à restreindre ρ aux éléments de norme ± 1 (plus généralement, pour un corps $\mathbf{K}$ quelconque, si on note A un système de représentant de $\mathbf{K}/\mathbf{K}^2$, on se restreindra aux éléments de normes dans A.)

Nous supposons dans la suite que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Nous traiterons ensuite le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Théorème 21 *Soit* $\mathrm{Pin}\, Q = N^{-1}(\pm 1)$. *On a une suite exacte*

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathrm{Pin}\, Q \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(q) \to 1$$

(on note $\mathbf{Z}_2$ le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$)

Démonstration. Montrons d'abord que ρ est surjective. Soit $a \in E \bigcap C^*(Q)$ ($E \bigcap C^*(Q)$ est l'ensemble des vecteurs non isotropes de E). On calcule

$$\rho(a) \cdot x = -axa^{-1} = \frac{axa}{Q(a)} = \frac{a}{Q(a)}(2B(x,a) - ax) \tag{9}$$

$$= -x + \frac{2B(x,a)}{Q(a)} \tag{10}$$

ce qui prouve que $a \in \mathbf{\Gamma}$, et de plus que la symétrie par rapport à l'hyperplan $a^\perp \in \rho(\mathbf{\Gamma})$. Appliquant ceci à $\frac{a}{\sqrt{\pm N(a)}}$ (suivant que $N(a) > 0$ ou non), on trouve que les réflexions orthogonales sont dans $\rho(\mathrm{Pin}\, Q)$. Comme ces réflexions engendrent $\mathrm{O}(q)$ (théorème de Cartan-Dieudonné), on a donc $\rho(\mathrm{Pin}\, Q) = \mathrm{O}(q)$.

Enfin, $\mathrm{Ker}\, \rho \bigcap \mathrm{Pin}\, Q = \{\lambda \in \mathbf{K}^* \mid N(\lambda) = \pm 1\} = \left\{\lambda \in \mathbf{R}^* \mid \lambda^2 = \pm 1\right\} = \pm 1$.

D'où le résultat. □

Corollaire 22 $\mathbf{\Gamma} = \{\lambda x_1 \cdots x_k\}$, *avec* $\lambda \in \mathbf{R}^*$ *et les* x_i *des vecteurs isotropes de* E. *(et* $\mathbf{\Gamma}^+$ *est obtenu en prenant* k *pair).*

Ainsi dans C_n, on peut définir $\mathrm{Pin}\, Q$ comme étant le noyau de $N : \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{R}^*$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{\Gamma}$. Écrivons $p(x) = u_1 \cdots u_k$, où les u_i sont des réflexions orthogonales par rapport à $x_i^\perp$. Alors $p(x) = p(x_1 \cdots x_k)$, d'où $x_1 \cdots x_k x^{-1} \in \mathrm{Ker}\, p = \mathbf{R}^*$. Ce qui prouve l'assertion. □

On a aussi un revêtement de $\mathrm{SO}(q)$, il est donné par le groupe des spineurs.

Définition 12 On pose $\mathrm{Spin}(Q) = \mathrm{Pin}^+(Q) = \mathrm{Pin}(Q) \bigcap \mathbf{C}^+(Q)$. C'est le groupe des spineurs de Q.[9]

Proposition 23

[9]On a aussi une autre notion, qui est celle de représentation spinorielle. Il s'agit d'une représentation irréductible de $C(Q)$ dans un espace S. S est alors appelé espace des spineurs, et par abus les représentations induites sur $\mathrm{Pin}\, Q$ et $\mathrm{Spin}\, Q$ sont également qualifiées de représentations spinorielles.

- $\operatorname{Pin} Q = \operatorname{Pin}^+ Q \bigcup \operatorname{Pin}^- Q$
- *On a la suite exacte :*

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to \operatorname{Spin} Q \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}(q) \to 1$$

Démonstration. La première assertion vient de ce que $\operatorname{Pin} Q = \{\pm x_1 \cdots x_k\}$, or $x_1 \cdots x_k \in C^{\pm}(Q)$ selon que k est pair ou impair.

Ainsi, un élément de $\operatorname{Spin} Q$ s'envoie sur un produit pair de réflexions orthogonales, donc est dans $\mathrm{SO}(Q)$ (et il s'agit bien d'une surjection car $\operatorname{Pin}^- Q \bigcap \mathrm{SO}(Q) = \emptyset$). □

Passons maintenant au cas complexe. Tout ce qui s'étend se transpose immédiatement au cas complexe, si l'on définit $\operatorname{Pin} Q$ comme le noyau de la norme. Cependant ceci nous donne une paramétrisation de $\mathrm{O}(Q)$, c'est à dire d'une forme hyperbolique (car $\mathbf{C}$ est complexe).

Cependant, nous préférons nous intéresser aux liens entre $\mathrm{U}(Q)$, $\operatorname{Pin} Q$ et $\mathrm{O}(Q)$, pour Q la forme euclidienne (resp hermitienne) canonique. On constate facilement que Q ou $-Q$ conduisent au mêmes groupes, on va alors en fait plutôt étudier $C_k = C(-Q)$ car alors $\operatorname{Pin}_k = \operatorname{Ker} N$.

On prolonge α et β sur le complexifié $C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ par

$$\alpha(x \otimes z) = \alpha(x) \otimes z \tag{11}$$

$$(x \otimes z)^t = x^t \otimes \bar{z} \tag{12}$$

Ce qui suit découle mécaniquement du cas réel.

Définition 13

- $\mathbf{\Gamma}_k^c$ est le sous-groupe des éléments inversibles $x \in C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ pour lesquels $y \in \mathbf{R}^k$ implique $\alpha(x) y x^{-1} \in \mathbf{R}^k$.
- On munit $C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ de $N(x) = x\bar{x}$
- On a un morphisme

$$\mathbf{\Gamma}_k^c \to \operatorname{Aut}(\mathbf{R}^k)$$
$$\rho(x) \cdot y \mapsto \alpha(x) y x^{-1}$$

Et on a en reprenant les démonstrations

Proposition 24

- $\operatorname{Ker} \rho = \mathbf{C}^*$
- *N est un morphisme de $\mathbf{\Gamma}_k^c \to \mathbf{C}^*$*
- $\rho(\mathbf{\Gamma}_k^c) = \mathrm{O}(k)$

ce qui fait que si on définit Pin_k^c comme étant le noyau de N sur $\mathbf{\Gamma}^c(k)$, on obtient le

Théorème 25 *On a une suite exacte*

$$1 \to \mathbf{U} \to \operatorname{Pin}^c(k) Q \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(k) \to 1$$

où l'on identifie $\mathbf{U}$*et* $1 \otimes \mathbf{U} \subset \mathbf{C}_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$

Démonstration. En effet cette fois, le noyau est composé des $1 \otimes z$ tels que $z\bar{z} = 1$, c'est bien $\mathbf{U}$ $\square$

Corollaire 26 *On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Pin}(k) \times_{Z_2} \mathrm{U}(1) \to \mathrm{Pin}^c(k)$$

Démonstration.

Les inclusions $\mathrm{Pin}(k) \subset C_k$ et $U(1) \subset \mathbf{C}$ induisent une inclusion du produit fibré $\mathrm{Pin}(k) \times_{Z_2} \mathrm{U}(1)$ dans $C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Par définition de $\mathrm{Pin}^c(k)$, l'inclusion se factorise en un morphisme

$$\Psi : \mathrm{Pin}(k) \times_{Z_2} \mathrm{U}(1) \to \mathrm{Pin}^c(k)$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{U}(1) & \to & \mathrm{Pin}(k) \times_{Z_2} \mathrm{U}(1) & \to & \mathrm{Pin}(k)/\mathbf{Z}_2 & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Psi & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathbf{U} & \to & \mathrm{Pin}^c(k) & \to & \mathrm{O}(k) & \to & 1
\end{array}$$

Comme toutes les flèches (sauf Ψ) entre les deux suites exactes sont des isomorphismes, le «lemme des cinq» (ou lemme du serpent) montre que Ψ est en fait un isomorphisme.

$\square$

On définit ensuite $\mathrm{Spin}^c(k)$ comme l'image réciproque de $\mathrm{SO}(k)$. Alors le corollaire 26 nous donne

$$\mathrm{Spin}^c(k) \cong \mathrm{Spin}(k) \times_{Z_2} \mathrm{U}(1)$$

(il suffit de prendre l'intersection avec les éléments de $C^+(k)$).

L'intérêt des spineurs complexes est le suivant : alors que le morphisme naturel

$$j : \mathrm{U}(k) \to \mathrm{SO}(2k)$$

ne s'étend à $\mathrm{Spin}(2k)$, en revanche le morphisme

$$l : \mathrm{U}(k) \to \mathrm{SO}(2k) \times \mathrm{U}(1) \tag{13}$$
$$T \mapsto j(T) \times \det T \tag{14}$$

s'étend à $\mathrm{Spin}^c(2k)$.

En effet, soit $T \in \mathrm{U}(k)$, qui s'écrit dans une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_k)$

$$\begin{pmatrix} \exp it_1 & & & \\ & \exp it_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp it_k \end{pmatrix}$$

et soit $(e_1, \ldots, e_{2k})$ la base correspondante de f dans $\mathbf{R}^{2k}$:

$$e_{2j-1} = f_j \qquad e_{2j} = if_j$$

Alors l'extension $\tilde{l}$ s'obtient par :

$$\tilde{l}(T) = \prod_{j=1}^{k} (\cos t_j/2 + \sin t_j/2 \cdot e_{2j-1}e_{2j}) \times \exp\left(\frac{i\sum t_j}{2}\right)$$

2.6.3 Digression : représentation tordue contre représentation naturelle

On peut se demander pourquoi on n'a pas introduit comme on l'avait fait dans les remarques préliminaires le groupe de Clifford comme étant

$$G = \{x \in C^*(q) \mid \forall y \in E, xyx^{-1} \in E\}$$

On aurait ensuite pu définir $\phi(x) \cdot y = xyx^{-1}$ et $N(x) = xx^t$. On aurait eu bien eu cette fois, si $x \in E$, $N(x) = Q(x)$.

Cependant, il y a plusieurs inconvénients à cette méthode. Tout d'abord, si $x \in E$, $\phi(x)$ est l'opposé de la réflexion orthogonale par rapport à $x^\perp$. Ce qui fait qu'on ne peut obtenir toutes les isométries que dans le cas n pair.

Ensuite, $N(x) \in \mathbf{K}^*$ que si $x \in G$ et n pair ou $x \in G^+$ (en effet, si n est impair, le centre de $C(Q)$ n'est pas forcément $\mathbf{K}$).

C'est ce qui explique qu'on ait introduit une représentation «tordue» ρ à la place. Toutefois on peut définir le groupe des Spineurs sur G^+ ou sur $\mathbf{\Gamma}^+$, on vérifie facilement qu'on obtient le même groupe. On peut également définir le groupe $\operatorname{Pin} Q$ sur G si n est pair.

2.6.4 Algèbre de Lie de $\operatorname{Spin} Q$

Nous allons identifier l'algèbre de Lie de $\operatorname{Spin} Q$ et montrer (si Q est définie, et $n \geqslant 3$) que $\operatorname{Spin} Q$ est le revêtement universel de $\mathrm{SO}(Q)$.

Commençons par déterminer la structure d'algèbre de Lie de $C^*(Q)$. [10]

Posons $\theta_X : Y \in C(Q) \mapsto XY \in C(Q)$.

Lemme 27 $\theta : X \mapsto \theta_X$ *est un homéomorphisme analytique de* $C(Q)$ *sur un sous-espace de* $\operatorname{End} C(Q)$.

Démonstration. Si θ_{X_n} admet une limite, alors $X_n = \theta_{X_n}$ également. Donc θ est bien un homéomorphisme. Le reste est évident. □

Définition 14 On pose

$$\exp X = \theta^{-1} \exp \theta_X = \sum_0^\infty \frac{X^k}{k!}$$

$X \mapsto \exp X$ vérifie toutes les propriétés habituelles de l'exponentielle (continuité, si $XY = YX$, $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$). C'est en fait l'exponentielle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(C^*(Q))$ de $C^*(Q)$ dans $C^*(Q)$ soit encore que $\mathfrak{L}(C^*(Q)) = C(Q)$.

En effet, $t \in \mathbf{R} \mapsto \exp tX$ est un morphisme de groupe de Lie, donc X, sa dérivée en 0 appartient à $\mathfrak{L}(C^*(Q))$. Ce qui nous donne une inclusion, et pour des raisons de dimensions on a forcément égalité. D'où au passage $\dim C^*(Q) = 2^n$.

[10] C^*Q est clairement un groupe de Lie, calculer X^{-1} revient à résoudre un système de Cramer, donc il s'agit d'une application analytique.

Enfin, $\theta(C(Q))$ est une sous-algèbre de Lie de End $C(Q)$, avec le crochet habituel :

$$\begin{aligned}[\theta_X, \theta_Y] &= \theta_X\theta_Y - \theta_Y\theta_X = \theta(XY - YX) \\ &= [\mathrm{d}\,\theta(X), \mathrm{d}\,\theta(Y)] = \mathrm{d}\,\theta[X,Y] = \theta[X,Y] \quad \text{par linéarité de } \theta\end{aligned}$$

d'où le crochet de Lie est $[X,Y] = XY - YX$.

Maintenant, Spin Q est un sous-groupe fermé de $C^*(Q)*$, donc c'est un sous-groupe de Lie. Son algèbre de Lie est l'ensemble des éléments $X \in C(Q)$ tels que $\exp tX \in \operatorname{Spin} Q$.

En particulier, elle est incluse dans les X tels que

$$\exp tX\beta(\exp tX) = \pm 1$$

en dérivant en $t = 0$, on obtient $\beta(X) + X = 0$ (car β commute avec exp).

Or l'espace de ces tels X est de dimension $n(n-1)/2$. Comme Spin Q est un revêtement de $\mathrm{SO}(Q)$ (Z_2 est un sous-groupe distingué discret de Spin Q, le passage au quotient induit un revêtement). Donc l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(Q)$ est isomorphe à celle de Spin Q, en particulier elle est de dimension $n(n-1)/2$.

On a donc

$$\mathfrak{L}(\operatorname{Spin} Q) = \{X \mid X + X^t = 0\}$$

on vérifie facilement (par dimension) qu'elle est engendrée par les e_ie_j, $i < j$ (les e_i formant une base orthogonale de E)

Proposition 28 *Si Q est une forme quadratique définie positive (ou négative),* Spin $\mathbf{Q}$ *est connexe ($n \geq 2$).*

Démonstration. Comme Spin Q est un revêtement de $\mathrm{SO}(Q)$, qui est connexe lorsque Q est défini, il suffit de montrer que $+1$ et -1, le noyau du revêtement peuvent être connectés.

Or dans les deux cas, $(e_1e_2)^2 = -1$ d'où en développant en série,

$$\exp(te_1e_2) = \cos t + \sin t(e_1e_2) \tag{15}$$

$$\exp(\pi xy) = -1 \tag{16}$$

donc $t \mapsto \exp(te_1e_2)$ est bien un chemin reliant 1 et -1. □

Enfin, si $n \geq 3$, $\pi_1 \mathrm{SO}(n) = \mathbf{Z}_2$, donc $\mathrm{Spin}(n)$ est simplement connexe. C'est le revêtement universel de $\mathrm{SO}(n)$.

2.7 Modules sur les algèbres de Clifford standard

Comme on l'a vu, les algèbres de Clifford C_k et $C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ présentent une certaine périodicité. Cette périodicité se traduit encore plus nettement sur les groupes de Grothendieck des catégories de modules (grâce à l'équivalence de Morita), et il apparaît naturellement dans ces constructions des groupes très similaires aux groupes de K-théorie des sphères, et dont la périodicité correspond au théorème de Bott.

Ces similitudes sont le point de départ de l'intervention des modules de Clifford en K-théorie, qu'élucide l'article d'Atiyah, Bott et Shapiro.

2.7.1 Classification

Commençons par classifier les modules gradués sur les algèbres de Clifford C_k. Comme, encore une fois, la graduation risquerait d'être problématique, on peut se ramener à des modules non gradués grâce à la proposition suivante :

Proposition 29 *Le foncteur de la catégorie* $\mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$ *des modules gradués de type fini sur* C_k *dans* $\mathbf{Mod}(C_k^0)$ *qui à* $M = M^0 \oplus M^1$ *associe* M^0 *est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que le foncteur d'extension des scalaires, qui à M^0 associe $C_k \otimes_{C_k^0} M^0$ muni de la graduation évidente, est bien un quasi-inverse. Mais c'est clair : d'une part, on a les isomorphismes naturels

$$C_k \otimes_{C_k^0} M^0 = (C_k^0 \oplus C_k^1) \otimes_{C_k^0} M^0 = M^0 \oplus (C_k^1 \otimes_{C_k^0} M^0)$$

et donc $(C_k \otimes_{C_k^0} M^0)^0 = M^0$. D'autre part, le morphisme naturel de « multiplication externe » $C_k \otimes_{C_k^0} M^0 \to M$ est surjectif, et injectif sur $1 \otimes M^0$ et $e \otimes M^0$ (pour e un élément quelconque de C_k^1), donc c'est un isomorphisme. □

En particulier, comme les algèbres C_k^0 sont semi-simples, $\mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$ est une catégorie semi-simple, et son groupe de Grothendieck $K_{gr}(C_k)$ est le groupe abélien libre engendré par les modules gradués simples de type fini. Il est isomorphe au groupe abélien libre $K_0(C_k^0)$ engendré par les C_k^0-modules simples de type fini. On aura donc une assez bonne description de $\mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$ si l'on arrive à décrire le groupe $K_0(C_k^0)$.

Tous les résultats précédents ont bien sûr leur analogue évident sur le algèbres complexes $C_k \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. On note $K_{gr}^c(C_k)$ et $K_0^c(C_k^0)$ les groupes de Grothendieck correspondants.

Remarquons par ailleurs que l'on connaît déjà les algèbres C_k^0. En effet :

Proposition 30 *On a pour tout* k, $C_k \cong C_{k+1}^0$.

Démonstration. En effet, considérons l'application linéaire $\phi : \mathbf{R}^k \to C_{k+1}^0$ définie par $\phi(e_i) = e_i e_{k+1}$. On a, pour tout i, $\phi(e_i)^2 = e_i e_{k+1} e_i e_{k+1} = -e_i^2 e_{k+1}^2 = -1$, donc ϕ se prolonge en un morphisme d'algèbres $C_k \to C_{k+1}^0$, qui est injectif car il envoie la base canonique de C_k sur une famille libre de C_{k+1}. C'est donc un isomorphisme par égalité des dimensions. □

On a en particulier :

$$K_{gr}(C_k) = K_0(C_k^0) = K_0(C_{k-1})$$

Soit $i : C_k \to C_{k+1}$ le morphisme qui prolonge l'inclusion $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{k+1}$. Il induit par restriction des scalaires un morphisme de groupes $i^* : K_{gr}(C_{k+1}) \to K_{gr}(C_k)$. Son conoyau A_k, et l'analogue complexe A_k^c, vont jouer un rôle crucial dans toute la théorie développée par la suite. On note enfin a_k la dimension réelle de M^0, pour M un C_k-module gradué simple (ils ont clairement tous même dimension, vu la structure des algèbres C_k), et a_k^c l'analogue complexe. L'entier a_k a une très belle interprétation géométrique en termes de champs de vecteurs sur les sphères — on en dira quelques mots plus loin. On est en mesure de calculer l'ensemble des objets que l'on a définis ici.

k	C_k	$K_{gr}(C_k)$	A_k	a_k	$K^c_{gr}(C_k)$	A^c_k	a^c_k
1	$\mathbf{C}(1)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	1	$\mathbf{Z}$	0	1
2	$\mathbf{H}(1)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	2	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	1
3	$\mathbf{H}(1)\oplus\mathbf{H}(1)$	$\mathbf{Z}$	0	4	$\mathbf{Z}$	0	2
4	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	4	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	2
5	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{Z}$	0	8	$\mathbf{Z}$	0	4
6	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{Z}$	0	8	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	4
7	$\mathbf{R}(8)\oplus\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{Z}$	0	8	$\mathbf{Z}$	0	8
8	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8

$$K_{gr}(C_{k+8}) = K_{gr}(C_k) \qquad A_{k+8} = A_k \qquad a_{k+8} = 16a_k$$
$$K^c_{gr}(C_{k+2}) = K^c_{gr}(C_k) \qquad A^c_{k+2} = A^c_k \qquad a^c_{k+2} = 2a^c_k$$

TAB. 3 – Groupes de Grothendieck des catégories $\mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$.

La majeure partie de ce tableau découle immédiatement du tableau précédent et des résultats connus sur les modules sur les algèbres de matrices. Les seuls résultats non évidents sont la détermination de A_{4n} et A^c_{2n}.

Pour expliciter ce calcul, remarquons qu'à tout module gradué $M = M^0 \oplus M^1 \in \mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$, on peut associer un autre module gradué $M^* = M^1 \oplus M^0$ en translatant la graduation. Cette opération, qui commute évidemment aux sommes directes, définit ainsi une involution, encore notée $*$, sur le groupe $K_{gr}(C_k)$, et de même sur $K^c_{gr}(C_k)$.

Le fait que $A_{4n} = \mathbf{Z}$ découle alors de la proposition suivante.

Proposition 31 *Soit x et y les deux classes de C_{4n}-modules gradués simples. On a $x^* = y$ et $y^* = x$.*

Cette proposition donne bien le résultat, puisque si z désigne le générateur de $K_{gr}(C_{4n+1})$, on a $z^* = z$, donc i^*z est également stable par $*$. Par raison de dimension, il en résulte nécessairement que $z = x + y$, ce qui conclut.

La proposition découle quant à elle du lemme suivant.

Lemme 32 *Soit $y \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, et A_y l'automorphisme intérieur de C_k défini par y : $A_y(w) = ywy^{-1}$. On a alors :*

- *Pour tout module $M \in \mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$, le module A_yM, sur lequel C_k agit par $w \cdot m = A_y(w)m$, est isomorphe à M^*.*
- *Sous les mêmes hypothèses, si l'on note A^0_y la restriction de A_y à C^0_k, alors $A^0_yM^0 = M^1$.*
- *En notant ϕ l'isomorphisme $C_{k-1} \to C^0_k$ introduit à la proposition 30, on a :*

$$A^0_{e_k}(\phi(w)) = \phi(\alpha(w))$$

où α est l'automorphisme canonique de C_{k-1}.

Démonstration. Soit $M \in \mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$. L'isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire $f : A_y M \to M^*$ donné par $f(m) = y^{-1}m$ vérifie, pour tout $w \in C_k$:

$$f(w \cdot m) = y^{-1}(w \cdot m) = y^{-1}ywy^{-1}m = wf(m)$$

donc f est C_k-linéaire. De plus, comme y^{-1} est un élément de degré 1 de C_k, f envoie $(A_yM)^0 = A_y^0 M^0$ sur $M^1 = (M^*)^0$, et de même pour la composante de degré 1, donc c'est un isomorphisme de C_k-modules gradués. L'isomorphisme $A_y^0 M^0 = M^1$ est alors clair.

Par ailleurs, la dernière partie de l'énoncé est le calcul élémentaire suivant :

$$A^0_{e_k}(\phi(w)) = e_k(we_k)e_k^{-1} = e_k w = \alpha(w)e_k = \phi(\alpha(w))$$

qui résulte de ce que $e_k e_i = \alpha(e_i)e_k$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. □

Démonstration (de la proposition). La morale lemme, en passant aux groupes de Grothendieck, c'est que sous l'isomorphisme groupes abéliens $K_{gr}(C_k) \cong K_0(C_{k-1})$, l'opération $*$ se traduit par α. Mais l'on sait décrire l'action de α sur les deux classes de C_{4n-1}-modules simples : il suffit pour cela de remarquer que le centre de C_{4n-1} est engendré par 1 et $w = e_1e_2\cdots e_{4n-1}$, qui vérifie $w^2 = 1$. Les idempotents centraux minimaux sont donc $(1+w)/2$ et $(1-w)/2$, et comme $\alpha(w) = -w$, l'automorphisme α les échange. Il échange donc les deux classes de C_{4n-1}-modules simples, et donc les deux classes de C_{4n}-modules gradués simples dans $K_{gr}(C_{4n})$. □

2.7.2 Structure de Clifford sur l'algèbre extérieure

Bien sûr, on montre *mutatis mutandis* que $A^c_{2n} = \mathbf{Z}$. Cependant, on peut donner une description un peu plus explicite dans ce cas-là. En effet, considérons l'algèbre extérieure $\Lambda^*(\mathbf{C}^k)$, muni du produit hermitien pour lequel les $e_{i_1} \wedge \cdot \wedge e_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < \cdot < i_p \leqslant k$, forment une base orthonormée. On note $d_v : w \mapsto v \wedge w$ la multiplication extérieure par v, et d_v^* son adjoint. Alors on a une application bilinéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}^k \times \Lambda^*(\mathbf{C}^k) & \to & \mathbf{C} \\ (v,w) & \mapsto & L(v)w = (d_v - d_v^*)(w) \end{array}$$

avec, de plus, $L(v)^2 w = -\|v\|\, w$. En effet, on peut supposer, quitte à faire un changement de base orthogonal, que $v = \lambda e_1$. Alors on a :

$$d_v(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} \lambda e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & \text{si } i_1 \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$d_v^*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} \lambda e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & \text{si } i_1 = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

$$L(v)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} \lambda e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & \text{si } i_1 \neq 1 \\ -\lambda e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui donne bien $L(v)^2 = -\lambda^2 \,\mathrm{id} = \|v\|^2 \,\mathrm{id}$. Par conséquent, L s'étend en une action *complexe* de l'algèbre de Clifford $C_{2k} = C(\mathbf{R}^{2k})$ sur $\Lambda^*(\mathbf{C}^k)$, c'est-à-dire une structure de $(C_{2k} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$-module, avec la $\mathbf{Z}/2$-graduation naturelle par la parité du degré. Comme $\Lambda^*(\mathbf{C}^k)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $2^k = a^c_{2k}$, c'est l'un des deux modules gradués simples de $\mathbf{Mod}_{gr}(C_{2k} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$. En particulier, il fournit par passage au quotient un générateur de A^c_{2k} (qu'on pourra même identifier plus précisément comme $(-1)^k(\mu^c)^k$ avec les notations introduites plus loin).

2.7.3 Champs de vecteurs sur les sphères

On peut difficilement étudier les modules de Clifford réels et introduire les nombres de Radon-Hurwitz a_k sans évoquer leur lien important avec les champs de vecteurs sur les sphères, tel qu'il est décrit par exemple dans [MA64] **S**15b.

En effet, s'il existe une structure de C_k-module (non gradué) sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel M de dimension n, alors on peut munir M d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant par le groupe compact image de $\mathrm{Pin}(k)$ dans $\mathrm{End}(M)$. On regarde la sphère S^{n-1} comme la sphère unité pour ce produit scalaire. Alors, si l'on note $e_1, \ldots, e_k$ les générateurs usuels de C_k, on a pour tout $x, y \in M$, puisque les e_i sont dans $\mathrm{Pin}(k)$:

$$\langle e_i x, e_i y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad \langle e_i x, y \rangle = \langle e_i x, e_i(-e_i y) \rangle = -\langle x, e_i y \rangle$$

Autrement dit, les e_i sont des isométries antisymétriques. En particulier, on a pour tous $i \neq j$, on a $\langle e_i x, e_j x \rangle = \langle e_i^2 x, e_i e_j \rangle = -\langle x, e_i e_j x \rangle$, et comme cette expression est symétrique en i et j, et $e_i e_j = -e_j e_i$, il vient :

$$\langle e_i x, x \rangle = \langle e_i x, e_j x \rangle = 0$$

Il en résulte que les applications :

$$\begin{array}{rcl} X_i : S^{n-1} & \to & M \\ x & \mapsto & e_i x \end{array}$$

sont des champs de vecteurs unitaires tangents deux à deux orthogonaux sur S^{n-1}.

Or il existe une structure de C_k-module sur M si et seulement si la dimension commune a_k des C_k-modules simples (non gradués) divise n. On peut donc formuler l'énoncé suivant :

Théorème 33 *Soit r_n le plus grand entier k tel que a_k divise n. Alors il existe au moins r_n champs de vecteurs indépendants sur la sphère S^{n-1} (autrement dit, le fibré tangent à S^{n-1} possède un sous-fibré trivial de rang r_n).*

Comme on connaît déjà a_k, évaluer r_n est l'affaire d'un calcul facile. On trouve :

$$r_n = 2^c - 1 + 8d \quad \text{avec } n = 2^{c+4d}m,\ m \text{ impair et } 0 \leqslant c \leqslant 3$$

En particulier, $r_2 = 1$, $r_4 = 3$ et $r_8 = 7$. On retrouve ainsi le fait que S^1, S^3 et S^7 sont parallélisables.

D'après un résultat célèbre d'Adams [Ada62], le résultat ainsi obtenu est en fait optimal : r_n est exactement le nombre maximal de champs de vecteurs indépendants sur S^{n-1}.

On peut signaler en passant que le théorème d'Adams répond à la question, récemment survenue sur `forum` (`sciences.maths:9497` et suivants) de déterminer la dimension maximale possible d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}(n)$ qui ne contienne, outre 0, que des matrices inversibles : c'est exactement $r_n + 1$. En effet, si $\mathbf{R}^n$ est un C_k-module, les endomorphismes induits par $1, e_1, \cdots, e_k$ engendrent un espace vectoriel qui convient, car tout élément de cet espace s'écrit $u = \lambda \cdot 1 + x$, $x \in \mathbf{R}^k$, et alors :

$$N(u) = u\bar{u} = (\lambda + x)(\lambda - x) = \lambda^2 + \|x\|^2$$

Réciproquement, si V est un sous-espace de $\mathbf{R}(n)$ tel que toute matrice de $V \setminus \{0\}$ soit inversible, on peut supposer sans perte de généralité que V contient l'identité, et a donc une base de la forme $1, u_1, \ldots, u_k$. Mais alors en chaque point $x \in S^{n-1}$, $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ se projettent sur $x^\perp$ en k vecteurs linéairement indépendants, ce qui détermine k champs de vecteurs indépendants sur S^n : d'où le résultat, qui est cependant un peu plus élémentaire que le théorème d'Adams, puisqu'il est seulement question de champs de vecteurs *linéaires* sur la sphère.

2.7.4 Propriétés multiplicatives : l'anneau gradué A_*

Soit M un C_k-module gradué et N un C_l-module gradué. Alors leur produit tensoriel gauche $M \hat{\otimes} N$ est naturellement un module gradué sur $C_k \hat{\otimes} C_l$, la graduation étant choisie de façon évidente :

$$(M\hat{\otimes}N)^0 = (M^0 \otimes N^0) \oplus (M^1 \otimes N^1) \quad \text{et} \quad (M\hat{\otimes}N)^1 = (M^0 \otimes N^1) \oplus (M^1 \otimes N^0)$$

et l'action de $C_k \hat{\otimes} C_l$ donnée par :

$$(x \otimes y) \cdot (m \times n) = (-1)^{qi}(xm) \cdot (yn) \quad \text{pour } y \in C_l^q \text{ et } m \in M^i$$

Or comme C_k est la puissance k-ième de C_1 au sens du produit tensoriel gauche, on a naturellement $C_k \hat{\otimes} C_l \cong C_{k+l}$. Le produit tensoriel gauche induit donc une application bilinéaire $\hat{\otimes}$: $K_{gr}(C_k) \times K_{gr}(C_l) \to K_{gr}(C_{k+l})$, Par conséquent, si l'on note $K_* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} K_{gr}(C_k)$, K_* est une $\mathbf{Z}$-algèbre graduée pour $\hat{\otimes}$, dont on voit aisément qu'elle est associative. Donc on dispose d'un anneau gradué $(K_*, +, \cdot)$, muni de l'automorphisme $*$ introduit plus haut.

Il vérifie de plus $(u \cdot v)^* = u \cdot (v^*)$: c'est évident par définition de la graduation. Et si l'on note $i^* : K_{gr}(C_k) \to K_{gr}(C_{k-1})$ le morphisme de restriction des scalaires, on a $u \cdot (i^* v) = i^*(u \cdot v)$. Une propriété moins immédiate est que, pour $(u, v) \in K_{gr}(C_k) \times K_{gr}(C_l)$:

$$u \cdot v = \begin{cases} v \cdot u & \text{si } kl \text{ est pair} \\ (v \cdot u)^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle résulte de ce que l'opération $M\hat{\otimes}N \mapsto N\hat{\otimes}M$ est l'automorphisme induit sur le groupe de Grothendieck par l'automorphisme d'algèbre $T : C_{k+l} \to C_{k+l}$ qui étend l'échange, dans $\mathbf{R}^{k+l}$, des k premières coordonnées et des l suivantes. T s'obtient donc, au signe près, comme composé de kl automorphismes intérieurs de C_{k+l} par des vecteurs e_i. Sur K_{gr}, l'action est donc celle de kl applications de l'opération $*$, ce qui donne bien l'expression annoncée.

Remarquons que l'on a :

Proposition 34 *Soit $\lambda \in K_{gr}(C_8)$ la classe d'un C_8-module gradué simple. Alors la multiplication par λ induit un isomorphisme $K_{gr}(C_k) \cong K_{gr}(C_{k+8})$.*

Démonstration. Le résultat est clair si $K_{gr}(C_k) = K_{gr}(C_{k+8}) = \mathbf{Z}$, c'est-à-dire quand k n'est pas multiple de 4. Si maintenant $k = 4n$, soit x et $y = x^*$ les deux classes de C_k-modules gradués simples. Par raison de dimension, $\lambda \cdot x \in K_{gr}(C_{k+8})$ est l'une des deux classes de modules simples. Mais alors :

$$\lambda \cdot y = \lambda \cdot x^* = (\lambda \cdot x)^*$$

ce qui est l'autre classe de modules simples. □

De plus, l'image de $i^* : K_* \to K_*$ est un idéal gradué, et donc le conoyau $A_* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k$ est muni d'une structure d'anneau gradué déduite de celle de K_*. La multiplication par λ induit encore un isomorphisme $A_k \cong A_{k+8}$, et le résultat de commutation sur K_* se traduit par la commutativité (ou, ce qui revient au même dans ce cas, l'anticommutativité) de A_*. On peut préciser complètement la structure de cet anneau.

Théorème 35 *A_* est l'anneau gradué anticommutatif engendré par $1 \in A_0$ et par des éléments $\xi \in A_1$, $\mu \in A_4$ et $\lambda \in A_8$ soumis aux relation $2\xi = \xi^3 = 0$ et $\mu^2 = 4\lambda$.*

Démonstration. En prenant pour ξ un générateur de A_1, on a clairement $2\xi = \xi^3 = 0$, puisque $A_1 = \mathbf{Z}/2$ et $A_3 = 0$. De plus, le générateur de A_2 est ξ^2 par raison de dimension. Reste alors le calcul de μ^2.

Pour pouvoir faire des choix de signe cohérents, on introduit la terminologie suivante. Notons que pout $k = 4n$, si l'on pose $\omega = e_1 \dots e_{4n}$, ω est dans le centre de C_k^0 et est de carré 1. Si $M \in \mathbf{Mod}_{gr}(C_k)$ est un module simple, ω agit donc sur M^0 par $\varepsilon = \pm 1$. De manière générale, on dit qu'un module gradué M est un ε-module si ω agit sur M^0 par multiplication scalaire par ε. Comme $e_i\omega = -\omega e_i$, on a clairement que si M est un ε-module, M^* est un $(-\varepsilon)$-module. De plus, si M et M' sont respectivement un ε-module et un ε'-module, alors $M \hat{\otimes} M'$ est un $\varepsilon\varepsilon'$-module.

Convenons alors de choisir pour λ la classe d'un $(+1)$-module simple W dans A_8. Si μ est la classe d'un ε-module simple M sur C_4, alors $M \hat{\otimes} M$ est un $(+1)$-module simple sur C_8, de dimension réelle $(2a_4)^2 = 4 \cdot (2a_8)$. On a donc nécessairement $M \hat{\otimes} M \cong 4W$, d'où en effet $\mu^2 = 4\lambda$. □

Le raisonnement se transporte *mutatis mutandis* au cas complexe, et fournit des anneaux gradués K_*^c et A_*^c, et la périodicité s'obtient par multiplication par une classe μ^c de $(C_2 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$-module gradué simple. En fait, le théorème devient :

Théorème 36 *L'anneau gradué A_*^c est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}[\mu^c]$.*

Les conventions de signes interviennent encore dans le cas complexe. Cette fois, pour $k = 2l$, on a $\omega^2 = (-1)^l$, donc ω agit sur un $(C_k^0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$-module simple par $(\pm i)^l$. On convient de choisir pour μ^c la classe d'un $(+i)$-module gradué simple dans A_2^c. C'est avec cette convention qu'on obtient, dans A_k^c :

$$\Lambda(\mathbf{C}^k) = (-1)^k (\mu^c)^k$$

quand on muni l'algèbre extérieure de sa structure de Clifford complexe.

Par ailleurs, on peut alors exprimer le morphisme $A_* \to A_*^c$ induit par la complexification $M \mapsto M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. En prenant pour $\mu \in A_2$ la classe d'un (-1)-module simple, la complexification envoie μ sur $2(\mu^c)^2$ et donc λ sur $(\mu^c)^4$.

3 Lien avec la K-théorie

On a introduit la plupart des outils techniques nécessaires pour présenter le morphisme construit dans [MA64] **S**11, qui suggère le lien profond existant entre modules de Clifford et K-théorie. Il reste cependant une construction topologique importante à intoduire, qui est l'objet du paragraphe suivant.

3.1 Le fibré différence

Soit X un espace, et Y un sous-espace fermé. On aura besoin d'associer à un morphisme $f : E_1 \to E_0$ de fibrés vectoriels sur X qui est un isomorphisme sur Y une élément $d(f)$ de $K(X, Y)$, de façon naturelle en le couple (X, Y) et invariante par addition d'un morphisme qui est un isomorphisme sur tout X. Pour $Y = \emptyset$, on peut prendre $d(f) = [E_0] - [E_1]$, mais si Y est plus grand, une construction plus élaborée est nécessaire.

On introduit à cette fin l'espace A, somme amalgamée de deux copies X_0, X_1 de X le long de Y. Il est muni de rétractions $\pi_i : A \to X_i$, obtenues en envoyant les points de X_0 et X_1 sur le point correspondant de X_i. Les π_i fournissent alors des suites exactes scindées :

$$0 \to K(A, X_i) \xrightarrow{\rho_i^*} K(A) \xrightarrow{j_i^*} K(X_i) \to 0$$

Par ailleurs on a un homéomorphisme naturel $\phi_i : X_i/Y \to A/X_{i+1}$ qui fournit un isomorphisme $\phi_i^* : K(A, X_{i+1}) \to K(X, Y)$.

Soit alors $f : E_1 \to E_0$ un morphisme comme indiqué plus haut. On construit un fibré F sur A valant E_i en restriction à X_i, en identifiant les deux fibrés par f le long de Y. Cette construction est bien fonctorielle en f. De plus, $F_i = \pi_i^*(E_i)$ vérifie $F|_{X_i} \cong E_i \cong F_i|_{X_i}$. Par conséquent, $F - F_i$ est dans le noyau du morphisme $j_i^* : K(A) \to K(X_i)$, ce qui permet, d'après la suite exacte précédente, de définir un élément $d(f)$ de $K(X, Y)$ par :

$$\rho_i^*[(\phi_i^*)^{-1} d(f)] = F - F_1$$

Alors d est clairement additif : $d(f \oplus g) = d(f) + d(g)$. De plus, si f est un isomorphisme sur X tout entier, on a $F \cong F_1$, donc $d(f) = 0$. Il en résulte en particulier que d est invariant par addition d'un isomorphisme.

Ainsi, si l'on note $L(X, Y)$ le monoïde des classes d'isomorphisme de morphismes f à addition près d'un isomorphisme, on a défini une flèche $d : L(X, Y) \to K(X, Y)$, qui est une transformation naturelle de foncteurs additifs sur la catégorie des couples espace, sous-espace fermé. Quand $Y = \emptyset$, A est la somme disjointe de X_0 et X_1, F est le fibré valant E_i sur X_i, et l'on retrouve donc $d(f) = [E_0] - [E_1]$.

On peut noter, même si l'on ne s'en servira pas, que ces propriétés formelles suffisent à assurer, sous réserve que le couple (X, Y) soit topologiquement «gentil» (typiquement une CW-paire), que d est en fait un isomorphisme naturel, ce qui permet de donner une définition alternative de la K-théorie comme monoïde d'isomorphisme de complexes de fibrés vectoriel, dans l'esprit de la définition des groupes G_0 de Grothendieck [MA64] **SS**7–8. De plus, la définition ainsi obtenue a de bonnes propriétés multiplicatives, ce qui est un aspect de la méthode d'Atiyah-Bott qui fait souvent défaut aux démarches ultérieures, notamment que Karoubi présente dans [Kar68].

3.2 Les fibrés de Clifford

On en arrive enfin à la façon dont on peut, étant donné une structure convenable sur un fibré vectoriel $V \to X$ de rang k, associer à tout module de Clifford sur C_k une classe dans la K-théorie réduite du compactifié d'Alexandrov de V. On obtient en particulier une description particulièrement agréable de la K-théorie des sphères.

3.2.1 Cas du point, K-théorie des sphères

Commençons par considérer le cas où l'espace de base X est réduit à un point. Alors on se donne un espace euclidien V de dimension k, et un module gradué M sur $C(V) = C_k$.

Pour tout $v \in V$, la multiplication par v fournit une application linéaire $M^0 \to M^1$ dont l'adjoint $M^1 \to M^0$, au sens d'un produit scalaire quelconque invariant par $\mathrm{Spin}(V)$, est la multiplication par $-v$. De plus, comme tout élément non nul de V est de norme non nulle dans $C(V)$, cette application est un isomorphisme dès que $v \neq 0$. Par conséquent, si l'on considère le morphisme suivant, entre fibrés vectoriels triviaux sur la boule unité $\mathbf{B}(V)$ de V :

$$\begin{array}{rcl} \sigma(M) : M^1 \times \mathbf{B}(V) & \to & M^0 \times \mathbf{B}(V) \\ (m, v) & \mapsto & (-vm, v) \end{array}$$

$\sigma(M)$ est un isomorphisme en restriction à la sphère unité $\mathbf{S}(V)$. La construction du fibré différence fournit donc une classe de K-théorie $\chi_V(M) = d(\sigma(M)) \in KO(\mathbf{B}(V), \mathbf{S}(V))$, qui ne dépend bien sûr que de la classe d'isomorphisme de M et est additive en M. Or $\mathbf{B}(V)/\mathbf{S}(V)$ n'est autre que le compactifié d'Alexandrov de V, à savoir S^k. D'où un morphisme de groupes $\chi_V : K_{gr}(C_k) \to \widetilde{KO}(S^k)$.

De plus, supposons que la structure de $C(V)$-module de M s'étende en une structure de module gradué sur $C(V \oplus 1) = C_{k+1}$. Alors la restriction de $\sigma(M)$ au-dessus de $\mathbf{S}(V)$ s'étend en un isomorphisme de fibrés sur $\mathbf{S}(V \oplus 1)$, et donc en particulier en un isomorphisme $\sigma^+(M)$ sur l'hémisphère supérieur $\mathbf{S}^+(V \oplus 1)$. Or on a bien sûr $(\mathbf{B}(V), \mathbf{S}(V)) \cong (\mathbf{S}^+(V \oplus 1), \mathbf{S}(V))$. Il en résulte, par naturalité de d, que $d(\sigma(M))$ est l'image par un endomorphisme de $KO(\mathbf{B}(V), \mathbf{S}(V))$ de $d(\sigma^+(M)) = 0$. D'où $d(\sigma(M)) = 0$. L'image de la restriction des scalaires $K_{gr}(C_{k+1}) \to K_{gr}(C_k)$ s'envoie donc sur 0 par χ_V, ce qui fournit par passage au quotient un morphisme de groupes :

$$\chi_V : A_k \to \widetilde{KO}(S^k)$$

Cela s'écrit encore, en introduisant la notation «cohomologique» $\widetilde{KO}^{-n}$ pour le groupe $\widetilde{KO}$ de la n-ième suspension et $\widetilde{KO}^{*}$ pour l'anneau gradué anticommutatif $\bigoplus_n \widetilde{KO}^{-n}$ (avec la multiplication donnée par le smash-produit), sous la forme d'un morphisme de groupes additifs :

$$\chi_V : A_* \to \widetilde{KO}^{*}(*)$$

qui est en fait un morphisme d'anneaux (cela se vérifie assez mécaniquement si l'on vérifie les propriétés multiplicatives de toutes les constructions qu'on a introduites [MA64] **S**11).

Il se trouve que l'on a :

Théorème 37 *Le morphisme d'anneaux χ_V ainsi défini est un* isomorphisme*, et l'on obtient de la même manière un isomorphisme $\chi_V^c : A_*^c \to \widetilde{K}^*(*)$.*

ce qui fournit une description complète de la K-théorie réelle et complexe des sphères entièrement en termes de modules de Clifford, et en particulier leur périodicité de 8 et 2 respectivement .

Malheureusement, la démonstration donnée dans l'article est, du goût même des auteurs, assez peu satisfaisante : elle se limite à rappeler que la structure de ces anneaux est déjà connue, et à constater que les morphismes envoient bien générateurs sur générateurs. C'est décevant, mais en un sens peu surprenant : du point de vue topologique, les constructions que l'on a développées ici sont assez tautologiques. Des méthodes plus élaborées ont été mises au point ensuite pour obtenir une démonstration vraiment satisfaisante. On peut citer en particulier l'approche très élégante, mais aussi très abstraite, de Karoubi [Kar68], qui *définit* la K-théorie à coefficients dans une «catégorie de Banach» quelconque en termes de modules de Clifford, ce qui lui permet de déduire la périodicité de Bott et l'isomorphisme de Thom (dont il sera question dans un instant) de manière presque immédiate. Le théorème difficile et central de l'article est alors une version (hautement) généralisée de celui que nous venons d'énoncer, qui exprime que cette définition alternative de la K-théorie coïncide avec la définition usuelle.

3.2.2 Cas général et isomorphisme de Thom

Pour finir, examinons de quelle façon la construction qui précède se généralise au cas «relatif», où X est un espace quelconque, et V un fibré vectoriel euclidien de rang k. On lui associe un fibré en algèbres graduées $C(V)$ sur X, dont la fibre au-dessus de x est $C(V_x)$ et les applications de transition sont déduites de celles de V.

On considère alors un $C(V)$-module gradué $M = M^0 \oplus M^1$, ce qui revient à donner des fibrés vectoriels M^0 et M^1 sur X, avec des morphismes $V \otimes_{\mathbf{R}} M^0 \to M^1$ et $V \otimes_{\mathbf{R}} M^1 \to M^0$, notés $v \otimes m \mapsto vm$, tels que $v(vm) = -\|v\|^2 m$. On munit alors M^0 d'un produit scalaire invariant par $\mathrm{Spin}(V)$, qui s'étend à M en un produit scalaire invariant par $\mathrm{Pin}(V)$. Alors en tout point x, l'adjoint de la multiplication par v sur M_x^0 est la multiplication par $-v$ sur M_x^1.

Si l'on note $\pi : \mathbf{B}(V) \to X$ le fibré en boules unité associé au fibré euclidien V, on obtient alors un morphisme de fibrés vectoriels :

$$\sigma(M) : \pi^* M^1 \to \pi^* M^0$$

qui, sur la fibre au-dessus de $v \in \mathbf{B}(V)$, est la multiplication par $-v$. En restriction au fibré en sphères $\mathbf{S}(V)$, ce morphisme devient un isomorphisme, et si la structure de $C(V)$-module s'étend en une structure de $C(V \oplus 1)$-module (où 1 est le fibré en droite euclidien trivial), cet isomorphisme se prolonge au fibré en hémisphères $\mathbf{S}(V \oplus 1)$. Il en résulte que si l'on note $K_{gr}(C(V))$ le groupe de Grothendieck des $C(V)$-modules gradués de rang fini, et $A(V)$ le conoyau de la restriction $K_{gr}(C(V \oplus 1)) \to K_{gr}(C(V))$, on a un morphisme de groupes :

$$\chi_V : A(V) \to KO(\mathbf{B}(V), \mathbf{S}(V)) = \widetilde{KO}(X^V)$$

où X^V est *l'espace de Thom* de V, c'est-à-dire son compactifié d'Alexandrov.

Supposons alors que V est un *fibré spinoriel*, c'est-à-dire le fibré vectoriel $P \times_{\mathrm{Spin}(k)} \mathbf{R}^k$ associé à un $\mathrm{Spin}(k)$-fibré principal P. Alors pour tout C_k-module gradué M, $P \times_{\mathrm{Spin}(k)} M$ est naturellement un $C(V)$-module, ce qui fournit un morphisme de groupes $\beta_P : A_k \to A(V)$. On en déduit un morphisme de groupes important :

$$\alpha_P = \chi_V \beta_P : A_k \to \widetilde{KO}(X^V)$$

L'importance de ce morphisme peut par exemple se voir en considérant, pour $k = 8n$, l'élément $\mu_V = \alpha_P(\lambda^n) \in \widetilde{KO}(X^V)$, où λ est le générateur usuel de A_8. On a en effet :

Théorème 38 (isomorphisme de Thom) *$\widetilde{KO}^*(X^V)$ est le $KO^*(X)$-module gradué libre de rang 1 engendré par μ_V.*

Ce théorème profond a en particulier pour conséquence la périodicité de Bott. En effet, si l'on choisit pour V le fibré trivial $X \times \mathbf{R}^k$, et si l'on note X_+ l'espace pointé obtenu en adjoignant un point à X, on trouve :[11]

$$X^V = \mathbf{B}(V)/\mathbf{S}(V) = (X \times B^k)/(X \times S^{k-1}) = X_+ \wedge (B^k/S^{k-1}) = X_+ \wedge S^k$$

Donc en prenant $k = 8$ et V le fibré spinoriel trivial de rang 8, il vient $\widetilde{KO}(X_+) = KO(X) \cong \widetilde{KO}(X^V) = \widetilde{KO}^{-8}(X_+)$, ce qui est précisément la périodicité de Bott !

Encore une fois, cependant, la démonstration de l'isomorphisme de Thom proposée dans l'article n'est pas complètement satisfaisante. Elle utilise en effet beaucoup de propriétés topologiques non triviales de la K-théorie, et en particulier la périodicité de Bott elle-même. L'article de Karoubi [Kar68] apporte là aussi une approche éclairante.

[11] Rappelons que si A et B sont deux espaces pointés, leur somme $A \vee B$ est la somme amalgamée sur les points-base, et leur smash-produit $A \wedge B$ est $A \times B / A \vee B$. Alors la suspension est le smash-produit par S^1, et par récurrence immédiate, la n-ième suspension est le smash-produit par S^n.

Références

[Ada62] J.F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. Math. (2)*, vol. 75 :603–632, 1962.

[Cru74] A. Crumeyrolle. *Algèbres de Clifford et spineurs*. Cours et séminaires du département de Mathématiques de l'université Paul Sabatier, 1974.

[Hat03] A. Hatcher. Vector bundles & K-theory. . `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`, 2003.

[Hou73] C. Houzel. *K-Théorie (Cours de D.E.A)*. Insitut de Mathématiques et Sciences Physiques de Nice, 1972-1973.

[Kar68] M. Karoubi. K-théorie. *Ann. Sci. ÉNS (4)*, vol. 1 :161–270, 1968.

[Kar69] M. Karoubi. *K-Théorie*. Les presses de l'université de Montréal, 1969.

[Lou97] P. Lounesto. *Clifford Algebra and Spinors*. Cambridge university press, 1997.

[MA64] A. Shapiro M.F. Atiyah, R. Bott. Clifford modules. *Topology*, vol. 3 :3–38, 1964.

[Wei97] C. Weibel. An introduction to algebraic K-theory. . `http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html`, 1997.