

Mémoire de M2
Classification des groupes de réflexions complexes

Damien Robert
Réalisé sous la direction de Michel Broué

4 Octobre 2006

Table des matières

Introduction	5
1 Groupes de réflexions complexes	9
1.1 Définition d'un groupe de réflexions complexe	9
1.2 Invariants d'un groupe de réflexions	11
1.3 Sous-groupes de réflexions	13
1.3.1 Sous-groupes de réflexions fixant un sous-espace vectoriel de V	13
1.3.2 Décomposition en sous-groupes irréductibles	14
1.3.3 Éléments réguliers	15
1.4 Caractères linéaires d'un groupe de réflexions	16
2 Groupes imprimitifs	19
2.1 Introduction	19
2.2 Structure des groupes de réflexions imprimitifs	19
2.3 Sous-groupes de réflexions primitifs	24
3 Groupes de réflexions de rang 2	29
3.1 Introduction	29
3.2 Sous-groupes finis de $SU_2(\mathbf{C})$	29
3.3 Sous-groupes finis de $U_2(\mathbf{C})$	31
4 Graphes de racines et systèmes de racines	35
4.1 Introduction	35
4.2 Graphes de racines	36
4.2.1 Graphes de racines réels	40
4.2.2 Graphes de racines complexes	42
4.3 Systèmes de racines	49
4.4 Les graphes de racines primitifs	53
5 Groupes primitifs	57
5.1 Introduction	57
5.2 Le théorème de Blichfeldt	58
5.3 Groupes contenant une réflexion d'ordre 3	61
5.3.1 Cas des groupes ne contenant que des réflexions d'ordres 3 . .	61
5.3.2 Cas des groupes contenant des réflexions d'ordres 3 et 2	63
5.4 Groupes ne contenant que des réflexions d'ordres 2	64
5.4.1 Cas des groupes de dimensions 3	67

5.4.2	Cas des groupes de dimensions 4	68
5.4.3	Cas des groupes de dimensions ≥ 5	69
5.5	Les groupes de réflexions irréductibles	71
A	Le théorème de Blichfeldt	73
A.1	Le théorème de Clifford	73
A.2	Les groupes linéaires primitifs finis	75
	Bibliographie	79

Introduction

Ce mémoire a pour but de parvenir à la classification (à conjugaison près) des groupes de réflexions complexes.

État de l'art

Si V un espace vectoriel complexe, un groupe de réflexions G est un sous-groupe de $GL(V)$ engendré par des réflexions. Il est dit réel (resp. rationnel) si il existe une base de V dans laquelle les matrices des éléments de G sont à coefficients réels (resp. rationnels), si ce n'est pas le cas G sera dit complexe. Les groupes de réflexions rationnels (que l'on appelle aussi groupes de Weyl) apparaissent dans la classification des groupes algébriques ou des groupes de Lie. Cependant, lorsqu'on veut étudier plus en détails les groupes algébriques (par exemple étudier leurs représentations), on a besoin d'utiliser les groupes de réflexions complexes.

Leur classification fut effectuée par Shephard et Todd dans [ST54]. Ils donnent directement la classification des groupes de réflexions complexes. Pour classer les groupes de réflexions complexes primitifs, ils remarquent que si $G \subset GL(V)$ est un groupe de réflexions complexe, quand on regarde son action dans $\mathbf{P}V$, il donne lieu à un groupe de « collineations » (des transformations de l'espace projectif qui conservent la colinéarité) engendré par des « homologues » (ou « collineations » centrales, à savoir des « collineations » qui laissent stables des hyperplans de l'espace projectif et d'ordres fini). Ils s'appuient ensuite sur des résultats précédents disséminés dans la littérature qui ont permis de classer de tels groupes de « collineations », puis ils remontent aux groupes de réflexions : une matrice représentant une homologie à pour vecteurs propres $\lambda, \dots, \lambda, \mu$ ($\lambda, \mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$) et on peut normaliser une telle matrice d'une unique manière si $\dim V \geq 3$ pour obtenir une matrice de réflexion (en multipliant par λ^{-1}). Le cas $\dim V = 2$ est un peu plus compliqué puisqu'on peut normaliser en multipliant par λ^{-1} ou μ^{-1} et Shephard et Todd étudient ce cas à part.

À partir de la classification, ils constatent une propriété remarquable des groupes de réflexions (qui explique peut-être le fait qu'ils apparaissent dans beaucoup de domaine des mathématiques) : un groupe fini G est un groupe de réflexions si et seulement si son action sur $S(V)$ a pour invariants une algèbre de polynômes. La classification effectuée par Shephard et Todd est assez insatisfaisante car la preuve est complètement extrinsèque aux groupes de réflexions (on se ramène à des groupes que l'on connaît mieux), et surtout complètement éparpillée dans la littérature. Or il se trouve que depuis on a trouvé une preuve intrinsèque du théorème caractérisant les

groupes de réflexions en fonction de leurs invariants (voir [Bou68]), ce qui donne un espoir pour trouver une preuve de la classification utilisant la géométrie des groupes de réflexions complexes pour se ramener à un problème purement combinatoire, à la manière de la classification des groupes de réflexions réels, où l'étude des chambres permet par exemple facilement de montrer qu'un tel groupe est un groupe de Coxeter (avec comme système générateur les réflexions fixant les murs d'une chambre donnée, on renvoie encore à [Bou68] pour plus de détails).

C'est justement ce que fait Cohen dans [Coh76], où en généralisant les outils utilisés dans la classification des groupes de réflexions réels (graphes de Coxeter et systèmes de racines), il parvient à obtenir la classification des groupes de réflexions complexes de manière plus « intrinsèque » que Shephard et Todd. Cependant, il faut noter que la classification est plus compliquée dans le cas réel, car il n'y a pas l'équivalent des chambres et des murs. Du coup, il est difficile de savoir exactement quelles informations mettre dans un graphe pour généraliser les graphes de Coxeter. Dans sa preuve Cohen choisit de mettre des informations redondantes (plusieurs graphes correspondent au même groupe), ce qui rend le traitement combinatoire de ces graphes bien plus complexe. En fait, à l'instar de Shephard et Todd, il est obligé d'invoquer un théorème (de Blichfeldt) extrinsèque aux groupes de réflexions pour finir la classification. On renvoie aux Chapitres 4 et 5 pour plus de détails à ce sujet.

Ainsi, si la preuve de Cohen est une amélioration par rapport à la preuve originale de Shephard et Todd, elle n'est pas encore complètement satisfaisante. Récemment, des nouvelles manières de représenter les groupes de réflexions ont été introduites (voir [BMR98] et [Bro00]), mais elles n'ont pas encore abouti à une nouvelle preuve.

Plan et commentaire

Dans ce mémoire donc, nous suivons la preuve de Cohen. Dans le Chapitre 1, nous donnons la définition des groupes de réflexions complexes, et rappelons rapidement les principaux résultats à leurs sujets (même si tous ne nous serviront pas par la suite) pour donner une idée des méthodes que l'on a pour les étudier. Dans le Chapitre 2, nous commençons la classification proprement dite en classifiant tous les groupes imprimitifs (tâche relativement aisée, qui ne nécessite pas l'utilisation des outils introduits dans le Chapitre 4). Il reste à classifier les groupes de réflexions primitifs, or il se trouve que les outils utilisés par Cohen ne sont vraiment efficaces qu'en dimension ≥ 3 . Ainsi, comme Shephard et Todd, nous traitons le cas des groupes de réflexions de dimension 2 à part, en utilisant un marteau pilon : on détermine tous les groupes finis de $GL_2(\mathbf{C})$ puis on regarde lesquels sont des groupes de réflexions. Ce sera l'objet du Chapitre 3. Comme annoncé, on présente la généralisation par Cohen des outils qui permettent de traiter le cas réel au Chapitre 4, et nous nous en servons pour terminer la classification dans le Chapitre 5. C'est dans ce dernier Chapitre que nous donnons le théorème de Blichfeldt (Théorème 5.1) sur les groupes primitifs quelconques qui sert à restreindre les choix possibles pour un groupe de réflexions, afin d'aider à la classification. Comme il ne s'agit pas à proprement parler d'un théorème sur les groupes de réflexions, nous donnons sa preuve dans l'Appendice A.

Nous suivons de très près l'exposition donnée par Cohen dans [Coh76], en corrigeant les petites erreurs typographiques (et en essayant de ne pas trop en rajouter

nous-même...) ainsi qu'une erreur un peu plus sérieuse mais sans grandes conséquences dans le Lemme 4.19. Nous avons cependant considérablement développé les preuves données par Cohen qui se révèlent parfois assez elliptiques (on pourra ainsi comparer les preuves du Lemme 2.10, de la Proposition 2.12, du Théorème 4.20 avec les preuves originales). Nous avons également énoncé quelques résultats triviaux sur les groupes de réflexions dont se sert Cohen sans les expliciter (il s'agit essentiellement du Chapitre 1, notamment la section 1.3). Il en va de même pour les résultats trouvés par Cohen : nous explicitons certaines de leurs conséquences qui servent par la suite mais que Cohen n'énonce pas forcément (voir par exemple le Lemme 4.13, le Lemme 4.28 et le Corollaire 4.30). Enfin, nous avons donné la preuve du théorème de Blichfeldt dans l'Appendice A, et développé un peu sur comment déterminer tous les sous-groupes finis de $GL_2(\mathbf{C})$ (Chapitre 3).

On trouvera également au début de chaque section un court laïus qui sert à introduire l'objectif de cette section, et les moyens pour y parvenir.

Remerciements

Je remercie évidemment mon directeur de stage, Michel Broué, tout d'abord pour son magnifique cours sur les groupes de réflexions, qui m'a donné envie de faire mon mémoire sur ce sujet, mais aussi pour sa gentillesse et sa disponibilité à me recevoir malgré son emploi du temps chargé. Je tiens également à remercier David Bessis, qui n'a pas hésité à prendre du temps pour me voir et répondre à mes questions. J'ai également beaucoup profité du cours d'introduction à GAP ([GAP06]) de Jean-Michel, ainsi que de son cours en ligne ([Mic04]), et des TDs de Vincent Beck ([Bec06]). Je souhaiterais également remercier Laurence Dreyfus qui s'occupe du M2 Méthodes Algébriques et aide beaucoup les élèves pour toutes les formalités administratives, ainsi que tous les professeurs du M2 pour leurs cours très intéressants. Enfin je remercie mes collègues et amis de l'École Normale Supérieure pour les moments passés ensemble et les enrichissantes conversations.

Chapitre 1

Groupes de réflexions complexes, définitions et premières propriétés

1.1 Définition d'un groupe de réflexions complexe

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n , que l'on supposera muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)_V$.

Définition 1.1 (pseudo-réflexion): Un élément $g \in \text{GL}(V)$ est une (pseudo)-réflexion s'il est d'ordre fini et stabilise un hyperplan de V .

Remarque 1.2: Comme g est d'ordre fini d , il est diagonalisable. Il s'écrit donc dans une base de V comme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta \end{pmatrix}$$

où ζ est une racine primitive $d^{\text{ième}}$ de l'unité. Les vecteurs propres de g associés à ζ sont appelés les racines de g .

On remarque que g est à coefficient réel (dans une base de V) équivaut à g d'ordre 2 (et dans ce cas g est une vraie réflexion).

Par la suite, on parlera de réflexions à la place de (pseudo)-réflexions, et on précisera qu'on a une réflexion réelle, ou d'ordre 2 pour parler d'une vraie réflexion. Le lemme suivant est trivial, mais nous sera bien utile.

Lemme 1.3: *Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par g . Alors soit W est fixé par g , soit il contient une racine de g . Réciproquement, si l'un des deux cas se produit, alors W est stable par g .*

DÉMONSTRATION: $g|_W$ est diagonalisable. ■

Définition 1.4 (Groupe de réflexions): $G \subset \text{GL}(V)$ est un groupe de réflexions s'il est engendré par des réflexions. Un sous-groupe de réflexions de G est un sous-groupe H de G qui est un groupe de réflexions. On note $\text{Ref}(G)$ l'ensemble des réflexions de G et $\text{Rac}(G)$ leurs racines.

Si $\dim V = n$, on dira que G est de dimension n

Définition 1.5 (terminologie): Si $G \subset \text{GL}(V)$, on notera V^G l'ensemble des points fixes par G . Si $g \in G$, on notera $V^g = V^{\langle g \rangle}$ l'ensemble des points fixes de g (où $\langle g \rangle$ note le sous-groupe de G généré par g). Si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel, on dira qu'il est stable par G si $\forall g \in G, g.W \subset W$, et qu'il est fixe par G si $W \subset V^G$.

Remarque 1.6: Soit $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe de réflexions fini. Il est classique qu'on peut alors voir G comme un sous-groupe de $\text{U}(V)$, quitte à le conjuguer (prendre une forme hermitienne définie positive et la moyenner par les éléments de G pour obtenir une forme hermitienne définie positive stable par les éléments de $G : (\cdot | \cdot)_G$. $(\cdot | \cdot)_G$ est conjugué à $(\cdot | \cdot)_V$, donc G est conjugué à un sous-groupe fini de $\text{U}(V)$). Par la suite, quand on parle d'un groupe de réflexions $G \subset \text{GL}(V)$, on supposera implicitement qu'il s'agit d'un sous-groupe fini de $\text{U}(V)$.

Si $W \subset V$ est stable par G son orthogonal l'est aussi, ainsi G est complètement réductible¹

Définition 1.7: Soit s une réflexion unitaire de racine a et de valeur propre non triviale ζ . On notera $s = s_{a,\zeta}$ et on a :

$$s_{a,\zeta}(x) = x - (1 - \zeta) (a | a)^{-1} (x | a) a$$

Si $\zeta = \exp(2i\pi d^{-1})$, on note aussi $s_{a,\zeta} = s_{a,d}$. Enfin si $d = 2$, on notera $s_a = s_{a,2}$.

Remarque 1.8 (Comportement d'une réflexion par conjugaison): Soit $s = s_{a,\zeta}$ une réflexion (avec les notations de la Définition 1.7), et $u \in \text{U}(V)$ une transformation unitaire. Alors $us_{a,\zeta}u^{-1} = s_{u.a,\zeta}$ est toujours une réflexion. Et les racines de usu^{-1} sont les images par u des racines de s .

Définition 1.9 (Groupe de réflexions réel): Soit G un groupe de réflexions. On dit que G est réel s'il fixe un \mathbf{R} -sev V_0 de V tel que l'application canonique $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V_0 \rightarrow V$ est bijective. Autrement dit, G est réel s'il existe une base de V telle que la matrice de tout élément de G dans cette base soit à coefficients réels.

Si G n'est pas réel, on dira que G est un groupe de réflexions complexe.

Remarque 1.10: Si G est un groupe de réflexions réel, toute réflexion de G est d'ordre 2. On peut montrer (cf. [Bou68]) que les groupes de réflexions réels sont exactement les groupes de Coxeter. On connaît donc la classification des groupes de réflexions réels ([Bou68]).

Réciproquement, si G est un groupe de réflexions dont toutes les réflexions sont d'ordres 2, pour qu'il soit réel, la Définition 1.7 montre qu'il faut et suffit qu'on puisse choisir pour toute réflexion s de G une racine a_s tel que $\left\{ (a_s | a_{s'})_{s,s' \in \text{Ref}(G)} \right\} \subset \mathbf{R}$ (car alors il suffit de prendre un système libre maximal parmi les $\{a_s\}$ et de le compléter par une base de V^G ; voir le Lemme 1.18, en fait il suffit même de trouver de telles racines a_{s_i} pour des réflexions qui engendrent G).

¹Et l'intérêt de prendre un produit scalaire c'est que l'on a un moyen canonique d'obtenir un supplémentaire stable de W

La théorie des caractères nous donne la proposition suivante :

Proposition 1.11: *Soit G un groupe fini, ρ une représentation irréductible de G et χ son caractère. On pose*

$$v(\rho) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$$

Alors

$$v(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ est réel} \\ -1 & \text{si } \rho \text{ n'est pas réel, mais est conjugué à } \bar{\rho} \\ 0 & \text{sinon, i.e. si } \chi \text{ est à valeurs complexes} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION (RAPIDE): On sait qu'il existe un produit scalaire hermitien G -invariant sur V . De plus, χ est réel \Leftrightarrow il existe une forme bilinéaire b G -invariante et non dégénérée sur V . Et ρ est réel \Leftrightarrow il existe une forme bilinéaire symétrique b G -invariante et non dégénérée sur V . Enfin si V est irréductible, l'espace des formes bilinéaires G -invariantes est de dimension au plus 1, en particulier toute forme bilinéaire est nulle ou non dégénérée, et dans ce cas est soit symétrique, soit antisymétrique. Comme $C := |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$ est le produit scalaire de $\chi_{\text{Sym}^2(V^*)} - \chi_{\text{Alt}^2(V^*)}$ avec la représentation triviale 1_G de G , la théorie des caractères montre que C est la dimension des formes bilinéaires symétriques invariantes par G sur V moins celle des formes bilinéaires antisymétriques, et la proposition découle de ce qui précède. \blacksquare

Remarque 1.12: On sait que pour un groupe de réflexions, le deuxième cas ne peut se produire, car son corps de définition est donné par son caractère.

1.2 Invariants d'un groupe de réflexions

L'intérêt majeur qui pousse à étudier les groupes de réflexions, et par là à comprendre leur classification, vient de ce qu'ils ont une caractérisation algébrique extrêmement jolie, en termes d'invariants.

Définition 1.13: Soit $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe. Il agit sur $S = S(V)$ via $g.f : v \rightarrow f(g^{-1}.v)$. On note $R = S^G$ les invariants polynomiaux par cette action.

On a alors le théorème suivant, qui fut démontré par Shephard et Todd ([ST54]) en se servant de la classification des groupes de réflexions. Chevalley réussit à le démontrer sans se servir de la classification, voir pour une preuve [Bou68].

Théorème 1.14: *Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) G est un groupe de réflexions
- (ii) R est une algèbre de polynômes, c'est à dire qu'il existe des polynômes homogènes f_1, \dots, f_n algébriquement indépendants qui engendrent R comme algèbre

(iii) Il existe $f_1, \dots, f_n \in R$ des polynômes homogènes algébriquement indépendants tels que $|G| = \deg(f_1) \times \dots \times \deg(f_n)^1$

Si tel est le cas, soit I l'idéal homogène engendré par les f_i . Alors S/I est isomorphe à la représentation régulière de G .

On note d_i les degrés des f_i qui apparaissent dans le Théorème 1.14. On suppose que $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Il est facile de voir que les d_i ne dépendent pas du choix des f_i , on les appelle les degrés caractéristiques de G .

Corollaire 1.15: Soit G un groupe de réflexions irréductible et d_i ses degrés caractéristiques. Alors G est un groupe de réflexions réel si et seulement si $d_1 = 2$.

DÉMONSTRATION: G est réel \Leftrightarrow il existe une forme bilinéaire symétrique b G -invariante sur V et non dégénérée $\Leftrightarrow \text{Sym}^2(V^*)^G \neq \{0\}$ vu que V est irréductible. Mais comme $\text{Sym}^2(V^*) \simeq_G S^2(V)$, cela équivaut au fait qu'il y ait un polynôme invariant de degré 2 dans S . Comme V est irréductible, il n'y a pas de polynôme invariant de degré 1 dans S (sinon on aurait un vecteur stable par G), donc cela équivaut bien au fait qu'un élément de la base algébrique de R soit de degré 2. ■

Il y a encore plusieurs autres caractérisations équivalentes d'un groupe de réflexions, mais comme ce n'est pas le but de ce mémoire, nous ne détaillerons pas davantage.

On peut obtenir des informations numériques sur le groupe G grâce aux séries de Poincaré. Si G agit sur un espace vectoriel gradué $E = \bigoplus E_n$ avec E_n de dimension finie, on définit le caractère gradué de E par $\chi(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n(g) T^n$, où χ_n est le caractère de l'action de G sur E_n .

Les formules usuelles d'orthogonalité des caractères se conservent pour les caractères gradués. On obtient ainsi :

Lemme 1.16 (Molien): Soit G un groupe de réflexions et χ un caractère irréductible de G , et χ' le caractère gradué de l'action de G sur S . Alors

$$\text{grdim } S^\chi = \langle \chi', \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\chi(g^{-1})}{\det(1 - gT)} = P_\chi(T) \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - T^{d_i}}$$

où P_χ est un polynôme, appelé le "fake degré" de χ .

DÉMONSTRATION: La première égalité vient de la théorie des caractères (gradués), la seconde vient de ce que $\chi'(g) = \deg(1 - gT)^{-1}$, enfin pour la dernière égalité d'après le paragraphe qui suit le Théorème 1.14 : $S \simeq S_G \otimes I$ pour l'action de G sur S , avec S_G isomorphe à la représentation régulière de G . Donc $S^\chi \simeq S_G^\chi \otimes I$ or $\text{grdim } I = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - T^{d_i}}$. ■

En appliquant le Lemme 1.16 au caractère trivial, on obtient les résultats suivants :

¹En fait, la Proposition 1.17 montre que f_1, \dots, f_n vérifient (ii) si et seulement si ils vérifient (iii)

Proposition 1.17: *Soit G un groupe de réflexions et d_1, \dots, d_n ses degrés caractéristiques. Alors*

- (i) $|G| = d_1 d_2 \dots d_n$
- (ii) *Soit h le nombre de réflexions dans G . Alors $h = \sum_{i=1}^n d_i - 1$*
- (iii) $|\mathcal{Z}(G)| = \text{pgcd}(d_1, \dots, d_n)$

Pour d'autres résultats obtenus en utilisant les séries de Poincaré (notamment la formule de Solomon qui généralise la Proposition 1.17), on pourra consulter les cours de Broué et ceux de Michel.

Notons que les résultats de cette section ne vont pas réellement servir pour la classification (à part peut-être pour calculer des informations numériques une fois qu'on a exhibé un groupe de réflexion donné, si l'on ne veut pas laisser [GAP06] faire le travail), donc nous ne développerons pas plus sur le sujet.

1.3 Sous-groupes de réflexions

1.3.1 Sous-groupes de réflexions fixant un sous-espace vectoriel de V

Soit $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe de réflexion. On change un peu la Définition 1.4 en disant que G est de dimension n lorsque $n = \dim(V^G)^\perp$ (ie la dimension de G est la dimension de tout supplémentaire stable par G des points fixes de V).

De même, on dit que G est irréductible (resp primitif) en dimension n , si G est irréductible (resp primitif) sur un (donc tous) supplémentaire de V^G stable par G .

On emploie cette terminologie pour pouvoir travailler dans \mathbf{C}^∞ plus tard lorsqu'on cherchera les groupes de réflexions de toute dimension.

Lemme 1.18: *Soit $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe de réflexions engendré par (s_1, \dots, s_p) . Alors $W = (V^G)^\perp$ est engendré par les racines des réflexions de G et même par les racines de (s_1, \dots, s_p) . Donc si on choisit une racine a_i pour s_i , on a :*

- (i) $\dim G = \dim \langle a_1, \dots, a_p \rangle$
- (ii) *Si $s \in G$ est une réflexion, toute racine de s est combinaison linéaire des (a_i) .*

DÉMONSTRATION: En effet, si s est une réflexion de G , et a une racine de s , alors $V^s = a^\perp$. Comme $V^G = \bigcap_{s \in \text{Ref}(G)} V^s$, W est bien engendré par les racines des réflexions de G . En fait, on a même $V^G = V^{s_1} \cap \dots \cap V^{s_p}$, donc on a bien $W = \langle s_1, \dots, s_p \rangle$ ■

Définition 1.19: Soit $X \subset V$ un sous-ensemble. On note $G_X = \{g \in G, gx = x \text{ pour tout } x \in X\}$. Alors G_X est un sous-groupe de réflexions (théorème de Steinberg [Ste74]).

Définition 1.20: Soit $v \in V$ et $W = v^\perp$. Alors G_W est un groupe de réflexions¹, et $G_W \subset \text{GL}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ donc G_W est un groupe fini cyclique.

¹En fait le théorème de Steinberg appliqué à un sous-espace de codimension 1 est bien plus facile à montrer que dans le cas général, en effet si $g \in G - \{\text{Id}\}$ fixe W , il stabilise son orthogonal $\mathbf{C}v$, donc est une réflexion

On note $o_G(v) = |(G_W)|$. C'est l'ordre du sous-groupe de réflexions cyclique de G engendré par les réflexions de G qui ont v pour racine.

Remarque 1.21: Ainsi, G est engendré par les réflexions $\{s_{a, o_G(a)}, \text{ où } a \text{ parcourt les racines de } G\}$. De plus, par la Remarque 1.8, o_G est invariant par G .

1.3.2 Décomposition en sous-groupes irréductibles

Soit $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe de réflexions¹. On définit une relation d'équivalence sur les racines de G comme la cloture transitive de la relation \sim telle que $v \sim w$ si et seulement si v et w ne sont pas orthogonales.

Soit $R = \bigsqcup_{i=1}^m R_i$ la décomposition des racines en classes d'équivalences, G_i le sous-groupe de réflexions de G engendré par les réflexions ayant des racines dans R_i , et V_i l'espace vectoriel engendré par R_i . Enfin on note V_R l'espace vectoriel engendré par les racines de G .

Proposition 1.22: *On a les assertions suivantes*

- (i) V_i est stable par G et G_i (donc G) est irréductible sur V_i
- (ii) $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i \oplus V^G$
- (iii) $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$

On se servira du lemme trivial suivant

Lemme 1.23: *Soit g une réflexion unitaire de racine v . g laisse stable $W \subset V$ si et seulement si $w \in W \cup W^\perp$. g laisse fixe W si et seulement si $v \in W^\perp$. En particulier, g fixe $w \in V$ si et seulement si $(v|w) = 0$.*

DÉMONSTRATION (DU LEMME): Cela vient immédiatement du fait que g est unitaire donc stabilise W si et seulement si il stabilise W^\perp , que $V = W \oplus W^\perp$ et du Lemme 1.3. ■

DÉMONSTRATION (DE LA PROPOSITION):

- (i) Par le Lemme 1.23 on remarque déjà que G_i agit trivialement sur $V = \bigoplus_{j \neq i} V_j \oplus V^G$. Maintenant soit $s \in G_i$ une réflexion de racine v . Si $w \in V_i$ est une racine d'une réflexion t de G , alors $s(w)$ est une racine de $sts^{-1} \in G$, de plus $(s(w)|v) = (w|s(v)) \neq 0$ donc $s(v) \in G_i$. Donc V_i est stable par G_i et est laissé fixe par les G_j , $j \neq i$. Or si $g \in G$ est une réflexion, g appartient à l'un des G_l , or comme G est un groupe de réflexions, G est engendré par les G_l , donc laisse stable V_i .

V_i est irréductible car sinon on aurait une décomposition non triviale $V_i = W \oplus W^\perp$. Or W (et W^\perp) contient au moins une racine de G_i , sinon il serait invariant par G_i , or c'est absurde car V_i est généré par des éléments non invariants². Donc on a exhibé deux racines orthogonales dans V_i , ce qui contredit la définition de R_i .

¹Rappelons que l'on suppose G fini, et par là qu'on peut supposer de plus $G \subset \text{U}(V)$

²En effet si v est racine d'une réflexion g , alors par définition v est un vecteur propre associé à une valeur propre non triviale de g , donc n'est pas stabilisé par g

- (ii) On a $V_R = \bigoplus_{j \neq i} V_j$, et par le même raisonnement que pour V_i , aucun élément de V_R n'est fixe par G . On en déduit que $V_R^\perp = V^G$.
Enfin on a $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$ car V_i est stable par G_j pour tout $j \neq i$ alors qu'aucun vecteur de V_j n'est stable par G_j .
- (iii) Pour terminer, on sait déjà que G est engendré par les G_i , et le même raisonnement nous montre que $G_i \cap \prod_{i \neq j} G_j = \{Id\}$ si $i \neq j$, ce qui achève de montrer la proposition.

Corollaire 1.24 (Extension d'un groupe irréductible): *Soit G un groupe de réflexions de V irréductible en dimension r (c'est à dire que si $W = (V^G)^\perp$, $\dim W = r$ et G est irréductible dans W). Soit s une réflexion de $U(V)$. Alors $\langle G, s \rangle$ est irréductible de dimension $r + 1 \Leftrightarrow s$ ne stabilise pas W (ou de manière équivalent s ne stabilise pas V^G) \Leftrightarrow si a est racine de s , $a \notin W \cup V^G$.*

DÉMONSTRATION: Rappelons que W est engendré par les racines de G . Si a est une racine de s , $G' = \langle G, s \rangle$ est de dimension $r + 1$ si et seulement si $a \notin W$.

La deuxième équivalence vient du Lemme 1.23. Pour la première équivalence, si G' est irréductible de dimension $r + 1$, comme G stabilise W , s ne le stabilise pas car $\dim W = r$. Réciproquement, si s ne stabilise pas W , on a vu que G' est de dimension $r + 1$ et que si a est une racine de s , $a \notin W^\perp$. a n'est donc pas orthogonale à toutes les racines de G , et G' est irréductible par la Proposition 1.22. ■

Ainsi on a décomposé G en sous-groupes irréductibles. Cela montre qu'il suffit de se restreindre à des groupes de réflexions irréductibles pour obtenir la classification.

1.3.3 Éléments réguliers

On termine cette section par un théorème de Springer concernant les éléments réguliers d'un groupe de réflexions. Encore une fois ce résultat ne va pas nous servir pour la classification, sauf éventuellement pour simplifier les calculs une fois que l'on a exhibé un groupe de réflexions donné.

Définition 1.25: Un élément $v \in V$ est dit régulier s'il n'est fixé par aucune réflexion de G . (c'est à dire $G_v = 1$ avec les notations de la Définition 1.19). Un élément g de G est dit régulier s'il a un vecteur propre régulier.

Théorème 1.26 (Springer [Spr74]): *Soit ζ une racine primitive $d^{\text{ème}}$ de l'unité. Soit $g \in G$ un élément régulier ayant v comme vecteur propre régulier et ζ comme valeur propre associée. Soit W l'espace propre correspondant. Alors*

- (i) g est d'ordre d , et les autres vecteurs propres de g sont $\zeta^{1-d_1}, \dots, \zeta^{1-d_n}$.
- (ii) $\dim W = \text{Card} \{i, d \text{ divise } d_i\}$
- (iii) La restriction à W du centralisateur de g dans G donne un groupe de réflexions dont les degrés sont les d_i divisibles par d
- (iv) La classe de conjugaison de g consiste en les éléments de G qui ont $\dim W$ valeurs propres ζ

1.4 Caractères linéaires d'un groupe de réflexions

Avant de commencer la classification proprement dite, on va d'abord déterminer tous les caractères linéaires d'un groupe de réflexions, car cela nous sera utile pour la suite (par exemple pour trouver à quoi ressemble l'abélianisé d'un groupe de réflexions).

Soit $a \in V - \{0\}$, on note l_a le polynôme linéaire $l_a(x) = (x|a)$.

Lemme 1.27: *Soit a et b des racines de G , ζ une racine de l'unité. On suppose qu'il existe $c \in \mathbf{C}^*$ tel que $s_{a,\zeta}.l_b = cl_b$. Alors $c = 1$ ou $c = \zeta^{-1}$ et dans ce cas $a \in \mathbf{C}b$*

DÉMONSTRATION: En effet, cela revient à $s_{a,\zeta^{-1}}(b) = cb$, donc b est un vecteur propre de $s_{a,\zeta^{-1}}$ de valeur propre associée c . On a bien $c = 1$, ou $c = \zeta^{-1}$ et dans ce cas b est racine de $s_{a,\zeta^{-1}}$, donc proportionnel à a . ■

Soit \sim la relation d'équivalence définie sur les racines de G par $a \sim b$ ssi a et b sont proportionnels. On prend un système de représentant unitaire pour chaque classe d'équivalence, et on note τ la fonction qui à une racine associe son représentant. Si a est une racine de $s \in \text{Ref}(G)$, on note $a_s = \tau(a)$. Enfin on note $P = \{\mathbf{U}a, a \in \text{Rac}(G)\}$ l'ensemble des classes d'équivalences de racines unitaires.

Soit O une orbite dans $\text{Rac}(G)$, on définit $f_O \in S$ par $f_O = \prod_{x \in O} l_{\tau(x)}$. On définit de plus un caractère linéaire

$$\chi_O : G \rightarrow U \text{ par } \chi_O(g) = \prod_{a_{s_i} \in \tau(O)} (\det s_i)^{-1}$$

où $g = s_1 s_2 \dots s_r$ est une décomposition de g en réflexions de G .

Proposition 1.28:

- (i) χ_O est bien défini et $g \in G$, $g.f_O = \chi_O(g)f_O$
- (ii) Tout caractère linéaire de G est un produit de tels χ_O

DÉMONSTRATION:

- (i) Il suffit de vérifier que si $s \in G$ est une réflexion de valeur propre ζ , alors

$$s.f_O = \begin{cases} f_O & \text{si } a_s \notin \tau(O) \\ \zeta^{-1} f_O & \text{si } a_s \in \tau(O) \end{cases}$$

ce qui montrera au passage que χ_O est bien défini.

Soit x_1, x_2, \dots, x_r une orbite de s dans O , telle que $s(x_i) = x_{i+1}$ et $s(x_r) = x_1$ (pour simplifier les notations, on pose $x_{r+1} = x_1$). Il existe donc $c_i \in \mathbf{C}^*$ tels que $s(\tau(x_i)) = c_i \tau(x_i)$. Soit $h = \prod_{i \leq r} l_{\tau(x_i)}$.

On obtient

$$s.h = \left(\prod_{i \leq r} \bar{c}_i \right) h \tag{1.1}$$

et

$$s^r(l_{\tau(x_1)}) = \left(\prod_{i \leq r} \bar{c}_i \right) l_{\tau(x_1)} \quad (1.2)$$

Si $\prod_{i \leq r} \bar{c}_i \neq 1$, alors s^r a $\tau(x_1)$ comme racine (par (1.2) et le Lemme 1.27), donc s aussi. Ainsi $h = l_{a_s}$ et donc par (1.1) $s.h = \zeta^{-1}h$. Or si l'on décompose O en orbite sous l'action de s , il y a au plus une orbite réduite à un multiple de a_s , ce qui conclut la preuve.

- (ii) Si φ est un caractère non trivial de G , et soit $f \in S$ un polynôme homogène de degré minimal tel que $g.f = \varphi(g)f$ pour tout $g \in G$ (un tel polynôme existe par le Théorème 1.14). Soit $s \in G$ une réflexion telle que $\varphi(g) \neq 1$. Pour tout $v \in a_s^\perp$, on a $f(v) = f(s^{-1}v) = (s.f)(v) = \varphi(s)f(v)$, donc $f(v)=0$. Ainsi f est divisible par $l_{a_s} = (\cdot | a_s)$, et donc par $l_{\tau(v)}$ pour tout v dans l'orbite de a_s par G . Donc f est divisible par f_0 , et une induction immédiate permet de conclure. ■

Si O est une orbite de G dans V , alors $o_G(v)$ ne dépend pas de $v \in O$, on note ce nombre $o_G(O)$.

Corollaire 1.29: $\frac{G}{[G,G]}$ est un produit direct de groupes cycliques d'ordres $o_G(O)$, où O parcourt les orbites par G de $\text{Rac}(G)$.

DÉMONSTRATION: $\frac{G}{[G,G]} \simeq \text{Hom}(G, \mathbf{U})$ est engendré par les χ_O d'après la Proposition 1.28. Il reste à vérifier que si O_1, O_2, \dots, O_m sont des orbites distinctes et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des entiers tels que $\chi_{O_1}^{\lambda_1}, \chi_{O_2}^{\lambda_2}, \dots, \chi_{O_m}^{\lambda_m} = 1$, alors $\chi_{O_1}^{\lambda_1} = \chi_{O_2}^{\lambda_2} = \dots = \chi_{O_m}^{\lambda_m} = 1$

Mais cela vient de ce que si $s \in \text{Ref}(G)$ a une racine dans O_1 (et que s est d'ordre $o_G(O_1)$), alors χ_{O_1} agit fidèlement sur $\langle s_1 \rangle$, et les $\chi_{O_i}(s) = 1$ si $i \neq 1$ (toujours d'après la Proposition 1.28) ■

Chapitre 2

Classification des groupes de réflexions imprimitifs

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de déterminer tous les groupes de réflexions imprimitifs (mot que l'on va bientôt définir), tâche qui se révèle bien plus facile que la classification des groupes de réflexions primitifs. Ceci sera l'objet de la section 2.2, où l'on verra que les groupes de réflexions imprimitifs irréductibles forment une famille infinie $G(de, e, n)$ à 3 paramètres. Enfin dans la section 2.3 on utilisera cette classification pour obtenir des résultats lorsqu'un groupe de réflexions contient un sous-groupe de réflexions primitif ou imprimitif donné.

Dans la suite du Chapitre, on notera V un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

2.2 Structure des groupes de réflexions imprimitifs

Définition 2.1 (Groupes imprimitifs): Soit $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un groupe. Il est dit imprimitif si l'on peut décomposer V en une somme directe $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_t$ de sous-espaces vectoriels non triviaux, tels que $\{V_i, 1 \leq i \leq t\}$ soit stable par G . On dit alors que les V_i forment un système d'imprimitivité de G .

G est dit primitif s'il n'est pas imprimitif. Comme un groupe fini est complètement réductible, si G est primitif, il est irréductible.

Remarque 2.2: Si on a une représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ irréductible, alors ρ est une représentation imprimitive si et seulement si $\rho = \mathrm{Ind}_H^G$ où $H = \mathrm{Stab}(V_1)$ (avec les notations de la Définition 2.1). On rappelle que $\mathrm{Ind}_H^G = \mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} \cdot$ est le foncteur d'induction, adjoint à gauche du foncteur restriction : $\mathbf{C}[G]\text{-MOD} \rightarrow \mathbf{C}[H]\text{-MOD}$. On pourra consulter le Théorème A.1 et la Remarque A.2 pour plus d'informations.

Définition 2.3: Un polynôme $p \in S$ est dit semi-invariant s'il existe un caractère linéaire χ de G tel que $g.p = \chi(g)p$ pour tout $g \in G$

Proposition 2.4 (Structure des groupes de réflexions imprimitifs): Soit G un groupe de réflexions irréductible et imprimitif dans V ($n = \dim V \geq 2$), et soit $(V_i)_{1 \leq i \leq r}$ un système d'imprimitivité de G . Alors :

- (i) $\dim V_i = 1$ et $t = n$. De plus il existe des polynômes linéaires homogènes distincts l_1, \dots, l_n tels que $l_1 l_2 \dots l_n$ soit un polynôme homogène semi-invariant de degré n .
- (ii) Si s est une réflexion de G , alors
 - soit $sV_i = V_i$ pour tout i , et il existe un j tel que les racines de s soient dans V_j
 - soit il existe $i \neq j$ tel que $sV_i = V_j$, $sV_k = V_k$ si $k \neq i, j$, les racines de s sont dans $V_i \oplus V_j$ et s est d'ordre 2.
- (iii) Soit $\psi : G \rightarrow S_n$ le morphisme qui à $g \in G$ associe la permutation qu'il induit sur le système d'imprimitivité (V_i) . Alors ψ est surjective et admet une section (dans la catégorie des groupes).
- (iv) $V_i \perp V_j$ si $i \neq j$
- (v) Si v est une racine d'une réflexion d'ordre 2 de G , et w une racine d'une réflexion d'ordre > 2 non proportionnelle à v , alors $|(v|w)| \in \{0, 2^{-1/2}\}$.

DÉMONSTRATION:

- (i) Supposons qu'il existe i tel que $\dim V_i > 1$. Comme G est irréductible il existe une réflexion $s \in G$ telle que $sV_i = V_j$ ($i \neq j$). Comme $\text{Fix}(s) = \text{Ker}(s - \text{Id})$ est de codimension 1, $\dim(V_j \cap V_i) > 0$, ce qui contredit $V_j \cap V_i = 0$. Pour établir la dernière partie de (i), il suffit de prendre un vecteur unitaire $a_i \in V_i$ et de prendre pour l_i le polynôme linéaire homogène défini par $l_i(a_i) = 1$ et $l_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ (en fait ((iv)) montre que $l_i = (\cdot | a_i)$). Comme $V_i = \mathbf{C}a_i$ et que les (V_i) forment un système d'imprimitivité de G , on vérifie immédiatement que $g.l_1 \dots l_n = \lambda l_1 \dots l_n$ où $\lambda \in \mathbf{C}^*$.
- (ii) Soit s une réflexion de G de racine unitaire a et valeur propre non triviale ζ . Si s stabilise chaque V_i , alors le Lemme 1.3 montre que a est dans l'un des V_j . Sinon, on peut supposer que s ne stabilise pas V_1 . Par le Lemme 1.3, $(a|V_1) \neq 0$ et $a \notin V_1$. On peut supposer que $sV_1 = V_2$. Il existe $x_1 \in V_1 \setminus 0$ et $x_2 \in V_2 \setminus 0$ tel que $s(x_1) = x_2$. Il existe j tel que $s^2(x_1) \in V_j$. On a

$$x_2 = s(x_1) = x_1 - (1 - \zeta)(x_1 | a) a \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} s^2(x_1) &= x_1 - (1 - \zeta^2)(x_1 | a) a \\ &= x_2 - (1 - \zeta)(x_2 | a) a \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1) montre que $a \in (V_1 \oplus V_2) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Donc $s^2(x_1) \in V_1 \oplus V_2$ et $j = 1, 2$. Mais (2.2) montre que $j \neq 2$ car $a \notin V_2$. Donc $s^2(x_1) = x_1$ et $\zeta^2 = 1$ i.e. $\zeta = -1$ et s est d'ordre 2. Si s ne stabilise pas V_i pour un $i > 2$, c'est à dire si $sV_i = V_j$, $j \neq i$ ($j > 2$), le même raisonnement nous dit que $a \in (V_i \oplus V_j) \cap (V_1 \oplus V_2) = 0$ ce qui nous donne la contradiction cherchée.

- (iii) Comme G est irréductible, pour tout $j > 1$, il existe une réflexion s_j telle que $sV_1 = V_j$. (ii) nous donne immédiatement que $\psi(s) = (1j)$. Donc G est surjectif. De plus la preuve de (ii) nous montre que l'on peut trouver $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \dots, x_n \in V_n$ tel que $s_j(x_1) = x_j, s_j(x_j) = x_1$ et $s_j(x_i) = x_i$ si $i \notin \{1, j\}$. Donc la restriction de ψ au sous-groupe de réflexions $\langle s_2, \dots, s_n \rangle$ de G est un isomorphisme, d'où la section recherchée.
- (iv) $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n l_i(x) \overline{l_i(y)}$ définit un produit scalaire invariant par G (c'est le produit scalaire qui rend orthonormaux les (a_i)) : en effet $g.l_i = \lambda l_j$ avec $\lambda \in \mathbf{U}$ vu que (V_i) est un système d'imprimitivité et que g est unitaire, et $g.\overline{l_i} = \overline{\lambda l_j}$. Il est bien connu que l'espace des produits scalaires sur V invariants par G est de dimension 1 si G est irréductible, donc le produit scalaire ainsi défini est un multiple de $(\cdot | \cdot)$, et on a donc bien $V_i \perp V_j$.
- (v) Soit w une racine d'une réflexion d'ordre > 2 , alors par (ii) il existe i tel que $w \in V_i$. Si v est une racine d'une réflexion s d'ordre 2, alors soit $v \in V_j$ pour un j donné, et alors on a bien (v), soit par exemple $v \in (V_1 \oplus V_2) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Si $j \neq 1, 2$, on a $(v | w) = 0$. On peut donc supposer $j = 2$ et $w = x_2$, on est dans la situation de (2.2) et si l'on fait le produit scalaire par x_2 , on obtient :

$$0 = 1 - 2 |(x_2 | a)|^2$$

donc $|(x_2 | a)| = 2^{-1/2}$. ■

Remarque 2.5: La preuve de Proposition (v) montre plus généralement que si v est une racine d'une réflexion d'ordre 2 de G , et $w \in V_i$ est non proportionnelle à v , alors $|(v | w)| \in \{0, 2^{-1/2}\}$

Si l'on ne spécifie pas une base de \mathbf{C}^n , lorsqu'on considère la matrice d'une application linéaire, cela sera par rapport à la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Définition 2.6: Soit Π_n le groupe des matrices de permutations $n \times n$. On note $A(de, e, n)$ où $d, e \in \mathbf{N}^*$ le groupe des matrices diagonales à coefficients dans \mathbf{U}_{de} et dont le déterminant est dans \mathbf{U}_d^1 . Comme Π_n normalise $A(de, e, n)$, on peut donc définir $G(de, e, n) = A(de, e, n) \rtimes \Pi_n$, c'est un sous-groupe du groupe des matrices monômiales.

On vérifie que $G(de, e, n)$ est un groupe de réflexion imprimitif, avec comme système d'imprimitivité $(\mathbf{C}\varepsilon_i)$. En effet, on vérifie immédiatement que $A(de, e, n) = A(d, 1, n).A(de, de, n)$ donc $G(de, e, n) = G(d, 1, n).G(de, de, n)$. Or $G(d, 1, n)$ est engendré par les matrices de transpositions $(1, i)$ (qui sont bien des réflexions) et par la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi/d} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

et $G(de, de, n)$ est engendré par les matrices de transpositions et par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\pi/de} & 0 \\ e^{2i\pi/de} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} j$$

¹Ainsi $A(de, e, n)$ est composé des matrices $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{ij} = \zeta_{i,j} \delta_i^j$ avec $\zeta_{i,j}^{de} = 1$ et $\det(a_{ij})^d = 1$

(réflexion d'ordre 2 de racine $\varepsilon_1 - \exp(2\pi i/de)\varepsilon_2$). \diamond

On posera $m = de$ pour alléger les notations.

Remarque 2.7: Le groupe symétrique pouvant être engendré par les transpositions $(12), (23), \dots, ((n-1)n)$, c'est à dire des réflexions d'ordres 2 et de racine $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$ on voit que $G(de, e, n)$ est engendré par $n+1$ réflexions (et même n réflexions si $e = 1, m$).

Théorème 2.8: *Soit $n \geq 2$ et soit G un groupe de réflexions irréductible et imprimitif de V . Alors G est conjugué¹ à un certain $G(de, e, n)$. Réciproquement $G(de, e, n)$ est irréductible si et seulement si $de > 1$ et $(de, e, n) \neq (2, 2, 2)$*

DÉMONSTRATION:

– Soit donc un tel G . La Proposition 2.4 nous fournit une base orthonormale e_1, e_2, \dots, e_n telle que $V_i = \mathbf{C}e_i$ forme un système d'imprimitivité de G . De plus, pour tout $j > 1$ il existe une réflexion $s_j \in G$ telle que $s(e_1) = e_j$. Quitte à conjuguer G , on peut supposer que $e_i = \varepsilon_i$. Toujours d'après la Proposition 2.4, Π_n est un sous-groupe de G . Soit $d = o_G(e_1)$ c'est à dire d est l'ordre du sous-groupe de réflexions de G qui laisse e_1^\perp invariant. Alors $A(d, 1, n)$ est un sous-groupe de G .

Toujours d'après la Proposition 2.4, les réflexions de G qui ne sont pas dans $A(d, 1, n)$ sont les réflexions $s' \in G$ telles que $s'(e_i) = \lambda e_j$ où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{U} \setminus 1$, avec $s'(e_k) = e_k$ si $k \neq i, j$. On peut supposer que $i = 1$ et $j = 2$ quitte à conjuguer par une permutation. Soit $s = s_2$ la permutation $(1, 2)$. Alors

$$ss' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

Donc λ est une racine de l'unité et $H = \{st, \text{ où } t \text{ est une réflexion telle que } tV_1 = V_2\}$ est un groupe cyclique fini d'ordre m . On vérifie que $d|m$ (considérer $s \begin{pmatrix} e^{2i\pi/d} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} : V_1 \rightarrow V_2$). Ainsi si l'on pose $m = de$, $A(de, de, n)$ est également un sous-groupe de G , donc $G \supset G(de, e, n)$. Or toute réflexion s de G est dans $G(de, e, n)$. C'est le cas si s a une racine dans V_1 (dans ce cas $s \in A(d, 1, n)$, où si s envoie V_1 sur V_2 par définition de d et $m = de$. Mais par conjugaison par une permutation, on peut toujours se ramener à un de ces deux cas. Donc $G = G(de, e, n)$

– On sait que $V = W \oplus W^\perp$ où $W = \mathbf{C}(e_1 + \dots + e_n)$ est la décomposition de V en somme d'irréductibles sous l'action de Π_n . Comme chaque représentation irréductible de Π_n n'apparaît qu'une fois dans V , c'est aussi la décomposition en composantes isotypiques. Ainsi les espaces non triviaux stables de V par Π_n sont W ou W^\perp . Ainsi si $G(de, e, n)$ n'est pas irréductible, comme il contient Π_n , il fixe W (quitte à passer à l'orthogonal). Or pour que $A(de, e, n)$ stabilise W , il faut que les coefficients diagonaux des éléments de $A(de, e, n)$ doivent être

¹Rappel : on cherche à trouver les groupes de réflexions à conjugaison près dans $\mathbf{U}(V)$

tous égaux. Il est facile de voir que cela impose $(de, e, n) \in \{(1, 1, n), (2, 2, 2)\}$. Réciproquement, il est évident que $G(1, 1, n)$ et $G(2, 2, 2)$ sont réductibles sur V . ■

Remarque 2.9:

- (i) La liste des groupes de réflexions réels sera donnée dans Théorème 4.18. Les groupes de réflexions imprimitifs réels qui y apparaissent sont $W(B_n)$ et $W(D_n)$. L'action de $\Pi_n = G(1, 1, n)$ sur $(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)^\perp$ représente $W(A_{n-1})$ ($n \geq 2$). $W(A_n)$ est primitif.
- (ii) On note X_1, \dots, X_n les éléments $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ dans S , on a alors $S = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$. Les $(n-1)$ premiers polynômes symétriques en les $(X_i)^{de}$ (i.e. $X_1^m + \dots + X_n^m$, $\sum i < j X_i^m X_j^m, \dots, \sum i = 1^n \prod j \neq i X_j^m$) ainsi que $(X_1 X_2 \dots X_n)^d$ sont invariants sous $G(de, e, n)$, homogènes et algébriquement indépendants, de plus le produit de leur degré est égal à $e^{-1}(de)^n n! = |G(de, e, n)|$. Ainsi le Théorème 1.14 montre que les degrés caractéristiques de $G(de, e, n)$ sont $m, 2m, \dots, (n-1)m, dn$ et la Proposition 1.17 montre que $|\mathcal{Z}(G(de, e, n))| = d \times \text{pgcd}(e, n)$ Enfin le polynôme semi-invariant qui correspond à au système d'imprimitivité $\mathbf{C}\varepsilon_1, \dots, \mathbf{C}\varepsilon_n$ dans la Proposition 2.4(i) est $X_1 \dots X_n$.
- (iii) Le calcul des degrés caractéristiques de $G(de, e, n)$ et le Corollaire 1.15 montrent que les groupes irréductibles imprimitifs réels sont $G(2, 1, n) = W(B_n) = W(C_n)$ ($n \geq 2$) et $G(2, 2, n) = W(D_n)$ ($n \geq 3$)
- (iv) $G(4, 4, 2)$ est conjugué à $G(2, 1, 2)$ et se sont les seuls groupes conjugués parmi les $G(de, e, n)$ irréductibles (celà se voit à l'aide de (ii) en regardants les polynômes invariants).
- (v) Enfin, les caractères linéaires de $G(de, e, n)$ sont déterminés par les orbites de G dans P (Rappel : $P = \{\mathbf{C}a, a \text{ racine de } G\}$ est la classe d'équivalence des racines de G). Or les racines de $G(de, e, n)$ sont de deux sortes : les racines qui sont dans $\mathbf{C}\varepsilon_i$ (il n'y en a que si $d \neq 1$), qui donnent lieu à une orbite de longueur n . Et il y les racines qui sont dans $V_i \oplus V_j \setminus (V_i \cup V_j)$ qui sont des racines (de réflexions) d'ordre 2. Comme $G(de, e, n) \supset \Pi_n$, on peut supposer que $i = 1, j = 2$ et que la racine correspond à la réflexion

$$s = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & 0 \\ \bar{\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

s a pour racine $-\zeta\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Si $n \geq 3$, toutes les racines de ce type sont sur la même orbite car :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\zeta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\bar{\mu}\zeta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on obtient une orbite de longueur $de \times n(n-1)/2$. Si $n = 2$, on a

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\zeta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\zeta \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\bar{\zeta}\mu^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc on a également une seule orbite de longueur m pour les racines de ce type, sauf si e est pair et d impair, dans ce cas on a deux orbites de longueurs $de/2$

2.3 Sous-groupes de réflexions primitifs

La classification des groupes de réflexions imprimitifs va nous permettre de déduire des informations sur un groupe de réflexions lorsqu'il contient un sous-groupe de réflexions primitif. Cela nous sera très utile pour la classification des groupes de réflexions primitifs.

Lemme 2.10: *Soit G un groupe de réflexions irréductible de V . Si G a un sous-groupe de réflexions H primitif en dimension $r > 1$ et non conjugué à $W(A_r)$, alors G est primitif.*

DÉMONSTRATION: Soit $W = (V^H)^\perp$ l'espace vectoriel de dimension r sur lequel H agit primitivement. Si $r = n$, G est primitif. Supposons donc que $r < n$ et que G a pour système d'imprimitivité L_1, \dots, L_n . H est primitif, donc irréductible sur W . Si $L_i \subset W$ pour un certain i , alors comme HL_i engendre W et que HL_i est la somme directe des L_j contenus dans W (par définition d'un système d'imprimitivité), on obtient donc que W est imprimitif, sauf si $W = L_i$. Mais dans ce cas, $r = 1$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi

$$L_i \not\subset W \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \quad (2.3)$$

Soit $s \in H$ une réflexion de racine $a \in V$. Comme $s \in H$, $a \in W$. Si s stabilise tous les L_i , alors il existe j tel que $a \in L_j$ par la Proposition 2.4(ii), mais comme L_j est de dimension 1, $L_j \subset W$, ce qui contredit (2.3). Donc on peut supposer que $sL_1 = L_2$ et que s est d'ordre 2. Si s' est une autre réflexion de H qui envoie L_1 sur L_2 , et a' une racine de s' , alors $a \approx a'$, car si c'était le cas, on aurait $s, s' \in o_H(a)$ or par ce qui précède, $|o_H(a)| = 2$, et on aurait $s = s'$. Donc $\mathbf{C}a + \mathbf{C}a'$ est de dimension 2 et $a, a' \in L_1 + L_2$ d'où $W \supset \mathbf{C}a + \mathbf{C}a' = L_1 + L_2$, ce qui contredit (2.3).

Ainsi pour tout $i \neq j$, il y a au plus une réflexion de $s \in H$ telle que $sL_i = L_j$. Donc la Proposition 2.4(iii) montre que H est conjugué à un sous-groupe de Π_n engendré par les transpositions (ij) telles qu'il existe une réflexion dans H qui envoie V_i sur V_j . Il est classique qu'un tel sous-groupe est un produit de groupes symétriques $\Pi_{m_1} \times \dots \times \Pi_{m_k}$ ¹. Mais $H \hookrightarrow \mathbf{U}(W)$ est irréductible sur W , donc le théorème de structure des algèbres semi-simples nous dit que $\mathbf{C}[H]$ est simple, et donc H est conjugué à un Π_t . Comme H est de dimension r , $t = r + 1$ et H est bien conjugué à $W(A_r)$. ■

¹Considérer le graphe de sommets $\{1, 2, \dots, n\}$ et tel qu'il existe une arête entre i et j ssi la transposition (ij) fait partie des transpositions qui engendrent le sous-groupe. Alors le sous-groupe est égal à $\Pi_{m_1} \times \dots \times \Pi_{m_k}$ où les m_i sont les cardinaux de chaque composante connexe du graphe

Lemme 2.11: $G(de, e, n)$ ($n \geq 2$) a un unique système d'imprimitivité (et est irréductible) si et seulement si $(de, e, n) \notin \{(2, 1, 2), (4, 4, 2), (3, 3, 3), (2, 2, 4)\}$

DÉMONSTRATION: On sait que $L_i = \mathbf{C}\varepsilon_i$ constitue un système d'imprimitivité de $G(de, e, n)$. Supposons qu'il existe une orbite de P qui donne lieu à un autre système d'imprimitivité, c'est à dire qu'il y a une autre orbite dans P de longueur n . La Remarque 2.9(v) nous donne

$$n = 2 \text{ et } n = m \times \text{pgcd}(2, d) \times \text{pgcd}(2, de)^{-1} \quad (2.4)$$

ou

$$n > 2 \text{ et } 2n = de \times n(n-1) \quad (2.5)$$

Or (2.4) conduit à $(de, e, n) \notin \{(2, 1, 2), (4, 4, 2), \}$ et (2.5) est impossible car $de > 1$ vu que l'on suppose $G(de, e, n)$ irréductible.

Supposons qu'il existe un système d'imprimitivité V_1, \dots, V_n différent de L_1, \dots, L_n . V_1, \dots, V_n ne vient pas d'une orbite de P par ce qui précède. Soit l_1, \dots, l_n les polynômes linéaires homogènes définis par rapport à V_1, \dots, V_n dans Proposition 2.4(i) et posons $f = l_1 l_2 \dots l_n$. C'est un polynôme semi-invariant. Ainsi $f = I f_{O_1} f_{O_2} \dots f_{O_m}$ où I est invariant et les O_i des orbites de G dans P (voir la Proposition 1.28). Si f n'est pas invariant, il existe i tel que $l_i | f_{O_1}$ (car S est factoriel), mais G étant irréductible, pour tout j il existe $g \in G$ tel que $g.l_i = l_j$ (en fait il suffit de prendre la réflexion qui correspond à (ij)), donc $\prod_{1 \leq i \leq n} l_i | f_{O_1}$, $f = f_{O_1}$ et $\deg f_{O_1} = \deg f = n$ ce qui contredit ce qui précède. f est donc invariant. La Remarque 2.9(ii) nous dit que f est un polynôme en les X_i^{de} et $(X_1 \dots X_n)^d$. Mais comme $\deg f = n$, f n'est pas un polynôme en $(X_1 \dots X_n)^d$ sauf si $d = 1$, et dans ce cas f est proportionnel à $X_1 \dots X_n$, ce qui contredit le fait que les V_i forment un système d'imprimitivité différent des L_i . Donc f est un polynôme homogène en les X_i^{de} , d'où $de | n$.

On écrit $l_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$ et l'on pose $r_j = |\{i, \alpha_i = \alpha_j\}|$ et $r_0 = |\{i, \alpha_i \neq 0\}|$. Si $g \in \Pi_n$ stabilise $\mathbf{C}l_1$, il doit permuter entre eux les α_i égaux à α_j , donc $\text{Stab}_{\Pi_n} \mathbf{C}l_1 \leq r_j!(n - r_j)!$. Cette inégalité est toujours valable, si $j = 0$. Mais comme l'orbite est de longueur au plus n , on obtient

$$n \geq n!(r!)^{-1}((n - r_j)!)^{-1} = \binom{n}{r_j}$$

Donc $r_j = 1, n - 1, n$. Or $r_0 \neq 1$. Supposons que $r_0 = n - 1$. Comme le stabilisateur de $\mathbf{C}l_1$ dans $G(de, e, n)$ est d'ordre $\leq d^2 e \times (n - 1)!^1$, d'où

$$n \geq \frac{d(de)^{n-1}n!}{d^2 e(n-1)!} = (de)^{n-2}n$$

¹En effet, on regarde d'abord le stabilisateur dans $A(de, e, n)$: il faut multiplier tous les éléments non nuls de l_1 par le même élément pour stabiliser $\mathbf{C}l_1$, ce qui donne de choix, et on peut multiplier l'élément nul de l_1 par le coefficient que l'on veut, du moment que le déterminant est respecté, ce qui donne d choix. Ainsi $|\text{Stab}_{A(de, e, n)} l_0| = d^2 e$ et $|\text{Stab}_{\Pi_n} l_0| \leq (n - 1)!$ et l'on vérifie facilement que l'on a $|\text{Stab}_{G(de, e, n)} l_0| = |\text{Stab}_{A(de, e, n)} l_0| \times |\text{Stab}_{\Pi_n} l_0| \leq d^2 e(n - 1)!$ (Attention, il n'est pas vrai en général que pour un groupe $G = H.K$, $\text{Stab}_G x = \text{Stab}_K x \times \text{Stab}_H x$, mais pour ce cas particulier c'est vrai).

et $n = 2$, et $l_1 \in \mathbf{C}X_1$ ou $l_1 \in \mathbf{C}X_2$ ce qui contredit le fait que V_1, \dots, V_n est différent de L_1, \dots, L_n (à permutation près). Donc $r_0 = n$. Par les mêmes arguments que la note 1 page 25 on a que $|\text{Stab}_{G(de,e,n)} l_0| \leq (de)n!$ d'où

$$n \geq \frac{d(de)^{n-1}n!}{den!} = (de)^{n-2}d$$

Comme $de|n$, cela donne $(de, e, n) \in \{(2, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 3)\}$ ■

Proposition 2.12: *Soit G un groupe de réflexions primitif de V , et H un sous-groupe de réflexions irréductible et imprimitif de dimension m , avec $1 < m < n$. Si H a un unique système d'imprimitivité L_1, \dots, L_m dans $(V^H)^\perp$, alors il existe une réflexion s_0 de G tel que $\langle H, s_0 \rangle$ est primitif de dimension $m + 1$.*

DÉMONSTRATION: Posons $W = (V^H)^\perp$; $\dim W = m$. On procède par récurrence sur $n - m$.

Supposons $m = n - 1$ et posons $L_n = V^H$. Alors L_1, \dots, L_m est un système d'imprimitivité de H dans V . C'est l'unique système d'imprimitivité de H dans V constitué d'espaces de dimensions 1. En effet, supposons que l'on ait un autre système d'imprimitivité V_1, \dots, V_n avec $\dim V_i = 1$. Alors si

$$V_i \not\subset W \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \tag{2.6}$$

le preuve du Lemme 2.10 montre que H est conjugué à $\Pi_n = G(1, 1, n)$. Mais ce dernier groupe agit primitivement sur W (il agit comme $W(A_{n-1})$), ce qui contredit le fait que H est imprimitif. Donc on peut supposer par exemple que $V_1 \subset W$. Comme H est irréductible sur W , $HV_1 = W$ et W est la somme des $V_i \subset W$ (et on peut supposer que ce sont V_1, \dots, V_{n-1} car $\dim W = n - 1$). Comme H a un unique système d'imprimitivité, $\{V_1, \dots, V_{n-1}\} = \{L_1, \dots, L_{n-1}\}$, et comme W est stable par H , on a aussi $V_n = W^\perp = L_n$.

Comme G est primitif, il existe une réflexion s de G qui ne respecte pas ce système d'imprimitivité (par exemple $sL_1 \neq L_i (\forall i)$). Cependant $\langle H, s \rangle$ n'est pas de dimension n si s a ses racines dans W , donc s ne convient pas forcément. Mais dans ce cas, s stabilise W . Comme G est irréductible, il existe une réflexion t de G qui ne stabilise pas L_n (une telle réflexion a alors ses racines dans $W \cup W^\perp$). Si t ne respecte pas le système d'imprimitivité L_i , $s_0 = t$ convient¹, sinon on a $tL_n = L_i$, $L_i \subset W$. Mais si on conjugue t par une réflexion de H qui envoie L_i sur L_1 (cf. la Proposition 2.4) puis par s , on obtient une réflexion s_0 qui ne respecte pas le système d'imprimitivité (L_i) et qui ne stabilise pas W , ce qu'on voulait.

Maintenant, supposons que $n < m - 1$ et qu'il n'existe pas de réflexion s_0 comme dans la Proposition. G étant irréductible, il existe une réflexion s de G qui a pour racine $a \notin W \cup W^\perp$. $H' = \langle H, s \rangle$ est de dimension $m + 1$, irréductible dans $W + sW$ (par choix de s) et imprimitif par hypothèse. La preuve du cas $n = m - 1$ traitée précédemment montre que H et donc a fortiori H' a un unique système d'imprimitivité (dans $W + sW$): $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ ou $L_{m+1} = W^\perp \cap (W + sW) =$

¹En effet, $\langle H, t \rangle$ est irréductible de dimension n , donc s'il a un système d'imprimitivité (V_i) , $\dim V_i = 1$ (Proposition 2.4), donc par ce qui précède $(V_i) = (L_i)$ (à permutation près), mais cela contredit le choix de t

$W^\perp \cap sW$. Comme $a \notin W \cup W^\perp$, il existe i tel que $sL_i = L_{m+1}$. La Proposition 2.4 dit alors que s est d'ordre 2, et quitte à renuméroter on peut supposer que $sL_i = L_i$ si $i < m$, $sL_m = L_{m+1}$. Choisissons $(a_i \in L_i)$ des vecteurs unitaires tels que $sa_i = a_i$ si $i < m$ et $sa_m = a_{m+1}$. L'hypothèse de récurrence nous donne une réflexion s' de G , de racine unitaire $b \in V$, telle que $H'' = \langle H, s, s' \rangle$ est primitif dans $W'' = W + sW + s'W + s'sW$. Soit a_{m+2} un vecteur unitaire de $W'' \cap (W + sW)^\perp$.

Comme H'' est primitif (donc irréductible), il existe un $i \leq m+1$ tel que $s'a_i \notin W + sW$. La Proposition 2.4 montre qu'il existe $g \in H'$ tel que $ga_i = \alpha a_m$ ($\alpha \in \mathbf{U}$). Quitte à remplacer s' par $gs'g^{-1}$, on peut supposer que $s'a_m \notin W + sW$. Comme $\langle H, s' \rangle$ est imprimitif (de dimension $m+1$), le même raisonnement que pour H' montre que s' est d'ordre 2, et s' laisse stable le système d'imprimitivité $(L_1, \dots, L_m, W^\perp \cap s'W)$, d'où $s'a_m \in W^\perp \cap s'W \subset W^\perp \cap W'' = \mathbf{C}a_{m+1} \oplus \mathbf{C}a_{m+1}$. Or $s'a_m = a_m - 2 \times 2^{-1/2}b$ (par la Remarque 2.5), donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tels que $b = 2^{-1/2}(a_m - \lambda a_{m+1} - \mu a_{m+2})$. Ainsi, $sa_m = a_{m+1}$, $s'a_{m+1} = a_{m+1} - 2^{1/2}\lambda b$ et $(ss'sa_m | a_m) = (s'a_{m+1} | a_{m+1}) = 1 - |\lambda|^2$. Mais $\langle H, ss's \rangle$ est irréductible¹ et imprimitif en dimension $m+1$, donc $|(ss'sa_m | a_m)| \in \{0, 1\}$ (selon que $ss's$ stabilise ou non L_m). D'où $b = 2^{-1/2}(a_m - \lambda a_{m+1})$ ou $2^{-1/2}(a_m - \mu a_{m+2})$, et donc $s'a_m = \lambda a_{m+1}$ ou $s'a_m = \mu a_{m+1}$. Donc s' conserve le système $(\mathbf{C}a_i)$, comme c'est aussi le cas des réflexions de H' vu que $a_{m+2} \in W''^{H'}$, on a exhibé un système d'imprimitivité de H'' , contradiction. \blacksquare

¹En effet $ss's$ a pour racine sb qui n'appartient pas à W car $b \notin W + sW$ puisque H'' est irréductible

Chapitre 3

Groupes de réflexions de rang 2

3.1 Introduction

Comme on l'a dit dans l'introduction, déterminer les groupes de réflexions imprimitifs est une tâche aisée. Les $G(de, e, n)$ donnent ainsi lieu à une famille infinie de groupes de réflexions irréductibles (et imprimitifs). La classification des groupes de Coxeter finis et par là des groupes de réflexions réels irréductibles donne lieu à une seconde famille infinie (et primitive) : les $W(A_n)$

Il reste 34 groupes sporadiques, qui sont des groupes de réflexions primitifs. Or il se trouve que parmi eux, 19 groupes sont de rang 2 (tous complexes). Les outils développés dans la suite du mémoire, qui cherchent à généraliser (de manière pas totalement satisfaisante) la combinatoire sur les graphes de Coxeter qui aboutit à la classification des groupes de réflexions réels ne fonctionnent vraiment qu'en rang ≥ 3 (voir le Lemme 4.19(ii)). Il reste donc le problème de trouver ces 19 groupes sporadiques de rang 2. Pour cela, il semble que le plus simple est de donner la liste de tous les sous-groupes finis de $U_2(\mathbf{C})$, puis de déterminer lesquels parmi ceux-ci sont des groupes de réflexions.

Or il se trouve que $PSU_2(\mathbf{C}) \simeq SO_3(\mathbf{R})$ et les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbf{R})$ sont bien connus. Comme $PSU_2(\mathbf{C}) = SU_2(\mathbf{C}) / \{\pm \text{Id}\}$, on remonte facilement aux sous-groupes finis de $SU_2(\mathbf{C})$. Enfin, $U_2(\mathbf{C})$ est engendré par $SU_2(\mathbf{C})$ et les matrices scalaires $\lambda \text{Id}, \lambda \in \mathbf{U}$, ce qui va nous permettre de remonter aux sous-groupes finis de $U_2(\mathbf{C})$ par le Proposition 3.2

3.2 Sous-groupes finis de $SU_2(\mathbf{C})$

Soit

$$\psi : \mathbf{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbf{C})$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

ψ est un isomorphisme de \mathbf{R}^3 sur l'espace \mathcal{H}_0 des matrices hermitiennes de $M_2(\mathbf{C})$ de trace nulle, telle que $\det \psi(v) = \|v\|_2$.

Et soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) &\rightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_0) \\ M &\mapsto (V \mapsto MVM^{-1}) \end{aligned}$$

Or $\forall M \in \mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$, $\varphi(M)$ préserve le déterminant, donc si on la voit comme un automorphisme de \mathbf{R}^3 , $\varphi(M)$ est une rotation. Si $M \in \mathrm{Ker} \varphi$, M commute à \mathcal{H}_0 et donc aussi à $i\mathcal{H}_0$. On vérifie que $\mathcal{H}_0 + i\mathcal{H}_0$ est l'ensemble des matrices de trace nulle, donc M est une matrice scalaire, d'où $\mathrm{Ker} \varphi = \{\pm \mathrm{Id}\}$. Ainsi $\varphi : \mathrm{PSU}_2(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ réalise une injection entre deux groupes algébriques connexes et de même dimension¹, comme l'image est fermée, φ est une bijection, donc un isomorphisme de groupes (en fait c'est même un isomorphisme de groupes algébriques car on est en caractéristique nulle).

D'où $\mathrm{PSU}_2(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$. Or les groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ sont bien connus, ils se déduisent des groupes d'automorphismes des solides réguliers de dimension 2 et 3. Il y a :

- Les groupes cycliques de rotations
- Les groupes diédraux d'ordre $2m$ ($m > 1$)
- Le groupe du tétraèdre, d'ordre 12, isomorphe à \mathfrak{A}_4
- Le groupe du cube (isomorphe au groupe de l'octaèdre car ce sont deux polygones réguliers duaux), d'ordre 24, isomorphe à \mathfrak{S}_4
- Le groupe de l'icosaèdre (isomorphe au groupe du dodécaèdre car ce sont deux polygones réguliers duaux), d'ordre 60, isomorphe à \mathfrak{A}_5 .

Il nous reste à remonter à $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$. Si H est un sous-groupe fini de $\mathrm{PSU}_2(\mathbf{C})$, on cherche à trouver les sous-groupes G de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$ dont il est image. On a :

- Son image réciproque
- Des relevés qui s'envoient bijectivement dessus (*a priori* plus durs à déterminer)

Mais ici, comme $-\mathrm{Id}$ est l'unique élément d'ordre 2 de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$, tout sous-groupe d'ordre pair de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$ contient $-\mathrm{Id}$, donc est l'image réciproque de son image dans $\mathrm{PSU}_2(\mathbf{C})$. Au vu de la liste des sous-groupes finis de $\mathrm{PSU}_2(\mathbf{C})$, il n'y a que les groupes cycliques d'ordres impairs comme relevés dans $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$.

On a donc la liste suivante des sous-groupes finis de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$:

- Les groupes cycliques d'ordre m , \mathbf{C}_m (qui sont réductibles).
- Les groupes diédraux binaires d'ordre $4m$ ($m > 1$), \mathbf{D}_m (irréductibles mais imprimitifs).
- Le groupe binaire du tétraèdre d'ordre 24, \mathbf{T} (imprimitif).
- Le groupe binaire de l'octaèdre (ou du cube) d'ordre 48, \mathbf{O} (imprimitif).
- Le groupe binaire de l'icosaèdre d'ordre 120, \mathbf{I} (imprimitif).

Remarque 3.1: La liste précédente est la liste des sous-groupes finis de $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$ à conjugaison près. En effet c'est le cas pour la liste des sous-groupes finis de $\mathrm{PSU}_2(\mathbf{C})$, et on vérifie facilement que ça reste le cas pour $\mathrm{SU}_2(\mathbf{C})$, vu qu'on prend leur image réciproque.

¹ $\dim \mathrm{SO}_3(\mathbf{R}) = \dim \mathrm{O}_3(\mathbf{R}) - 1 = \dim \mathrm{M}_3(\mathbf{R}) - 3 - 1 = 5$, et $\dim \mathrm{PSU}_2(\mathbf{C}) = \dim \mathrm{SU}_2(\mathbf{C}) = \dim \mathrm{M}_2(\mathbf{C}) - 2 - 1 = 5$

Donc à conjugaison près, on a :

$$\mathbf{C}_m = \left\langle \begin{pmatrix} e^{2i\pi/m} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/m} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbf{D}_m = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_{2m} \right\rangle$$

$$T = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^3 \\ \varepsilon & \varepsilon^7 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_2 \right\rangle \quad (\varepsilon = \exp(2i\pi/8))$$

$$O = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon^5 \end{pmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle$$

$$I = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \eta^4 - \eta & \eta^2 - \eta^3 \\ \eta^2 - \eta^3 & \eta - \eta^4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \eta^2 - \eta^4 & \eta^4 - 1 \\ 1 - \eta & \eta^3 - \eta \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\eta = \exp(2i\pi/5)) \quad \diamond$$

3.3 Sous-groupes finis de $U_2(\mathbf{C})$

$U_2(\mathbf{C})$ est engendré par $SU_2(\mathbf{C})$ et $\mathcal{Z}(U_2(\mathbf{C})) = \{\lambda \text{Id}, \lambda \in \mathbf{U}\} \simeq \mathbf{U}$. On va appliquer à $U_2(\mathbf{C})$ la proposition suivante :

Proposition 3.2: *Soit S un groupe engendré par des sous-groupes H et K , qui commutent entre eux (ainsi H et K sont distingués dans S). On note $\psi : H \times K \rightarrow S$ l'épimorphisme $(h, k) \mapsto hk$. Soit G un sous-groupe de S . On pose $A = GH \cap K$, $A' = G \cap K$, $B = GK \cap H$ et $B' = G \cap H$ ($GH = HG$ et $GK = KG$ sont bien des groupes car H et K sont distingués). Alors*

(i) $A/A' \simeq B/B'$

(ii) Si de plus K est abélien, alors $\psi(B \times_{A/A' \simeq B/B'} A) = G^1$

DÉMONSTRATION:

(i) $\frac{A}{A'} \simeq \frac{(GH \cap K)G}{G}$ et $\frac{B}{B'} \simeq \frac{(GK \cap H)G}{G}$ donc il suffit de vérifier que $(GH \cap K)G = (GK \cap H)G$. Or si $x \in (GK \cap H)G$, $x = kg$ où $k \in K \cap HG$, $g \in G$ et $k = hg'$, $h \in H$ et $g' \in G$. D'où $x = \underbrace{kg'^{-1}}_{\in H} \underbrace{g'g}_{\in G}$, donc $x \in (KG \cap H)G$. Par

symétrie on a l'autre inclusion. L'isomorphisme de A/A' sur B/B' est donné par $\sigma' : \bar{k} = \overline{hg} \in A/A' \mapsto \bar{h} \in B/B'$, avec des notations évidentes.

(ii) On note G' le produit fibré $B \times_{A/A' \simeq B/B'} A$. Ici il convient de noter que G' va dépendre de l'isomorphisme qu'on choisit entre A/A' et B/B' . Comme K est abélien, on va prendre pour isomorphisme : $\sigma(\bar{k}) = \sigma'(\bar{k}^{-1})$. On veut montrer que $\psi(G') = G$. Si $g \in G$, on peut écrire $g = hk$, $h \in B$ et $k \in A$. De plus

¹ $B \times_{A/A' \simeq B/B'} A$ représente le produit fibré de B par A au dessus de $A/A' \simeq B/B'$:

$$\begin{array}{ccc} B \times_{A/A' \simeq B/B'} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A/A' \simeq B/B' \end{array}$$

$\sigma'(\bar{k}) = \sigma'(\overline{h^{-1}g}) = \overline{h^{-1}}$, donc $(h, k) \in G'$. Réciproquement, si $x = hk$, $h \in B$ et $k \in A$ tels que $\sigma'(\bar{k}) = \overline{h^{-1}}$, alors $\exists g \in G$ tel que $\bar{k} = \overline{h^{-1}g}$ par définition de σ' , donc $\bar{x} = \bar{g}$ et $x \in G$. ■

Remarque 3.3: Comme on l'a remarqué dans la preuve, $B \times_{A/A' \simeq_\sigma B/B'} A$ dépend de l'isomorphisme σ entre A/A' et B/B' . On notera

$$(A|A'; B|B')_\sigma = \psi(B \times_{A/A' \simeq_\sigma B/B'} A)$$

Ainsi si on applique ce qui précède à $U_2(\mathbf{C})$, on obtient que ses sous-groupes finis sont de la forme

$$(\mu_{wd} | \mu_w ; A|A')_\sigma$$

où μ_m représente le groupe des racines m^{ieme} de l'unité, et $A' \triangleleft A$ sont des sous-groupes finis de $SU_2(\mathbf{C})$. Comme μ_{wd}/μ_w est cyclique, A/A' doit l'être aussi. Enfin, comme $G = (\mu_{wd} | \mu_w ; A|A')_\sigma$ est engendré par A et des matrices scalaires λId , le caractère irréductible (resp. primitif) de G ne dépend que du caractère irréductible (resp. primitif) de A .

Or en regardant la liste donnée dans la section 3.2, on voit que les inclusions distinguées à quotient cycliques de sous-groupes de $SU_2(\mathbf{C})$ sont $\mathbf{C}_m \triangleleft_r \mathbf{C}_{mr}$, $\mathbf{C}_{2m} \triangleleft_2 \mathbf{D}_m \triangleleft_2 \mathbf{D}_{2m}$ et $\mathbf{D}_2 \triangleleft_3 \mathbf{T} \triangleleft_2 \mathbf{O}$. (où $A' \triangleleft_r A$ signifie que A/A' est cyclique d'ordre r). Comme on se restreint à des sous-groupes finis irréductibles, $A \neq \mathbf{C}_m$, et on vérifie que dans ce cas la classe de $G = (\mu_{wd} | \mu_w ; A|A')_\sigma$ ne dépend pas de σ . De plus $-1 \in G$, donc $-1 \in \mu_w = G \cap \mathcal{Z}(U_2(\mathbf{C}))$, d'où w est pair. On a ainsi (presque) démontré :

Théorème 3.4: *Tout sous-groupe fini irréductible de $U_2(\mathbf{C})$ est conjugué à l'un des groupes suivant :*

- $\mu_{2q}\mathbf{D}_m, \mu_{2q}\mathbf{T}_m, \mu_{2q}\mathbf{O}_m, \mu_{2q}\mathbf{I}_m$.
- $(\mu_{4q} | \mu_{2q} ; \mathbf{D}_m | \mathbf{C}_{2m}), (\mu_{4q} | \mu_{2q} ; \mathbf{D}_{2m} | \mathbf{D}_{2m}), (\mu_{4q} | \mu_q ; \mathbf{D}_m | \mathbf{C}_m)$ (si $m \wedge 2 = 1$)
- $(\mu_{6q} | \mu_{2q} ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2), (\mu_{4q} | \mu_{2q} ; \mathbf{O} | \mathbf{T})$

Parmi ces groupes, les groupes de réflexions imprimitifs sont :

$$G(de, e, 2) \text{ conjugué à } \begin{cases} (\mu_{4q} | \mu_{2q} ; \mathbf{D}_m | \mathbf{C}_{2m}) & \text{si } e \text{ est pair, } d \text{ impair} \\ (\mu_{2q} | \mu_q ; \mathbf{D}_m | \mathbf{D}_{m/2}) & \text{si } e \text{ est impair, } d \text{ pair} \\ \mu_{2q}\mathbf{D}_m & \text{si } e \text{ est pair, } d \text{ pair} \\ (\mu_{4q} | \mu_q ; \mathbf{D}_m | \mathbf{C}_m) & \text{si } e \text{ est impair, } d \text{ impair} \end{cases}$$

les autres groupes sont imprimitifs. Pour trouver lesquels sont des groupes de réflexions, on calcule les invariants de \mathbf{T} , \mathbf{O} et \mathbf{I} , et on regarde les racines de l'unité à ajouter pour que ces invariants forment une algèbre de polynômes.

On obtient

Théorème 3.5: *Les groupes de réflexions primitifs de dimension 2, sont à conjugaison près :*

- $\mu_{6m}\mathbf{T}, (\mu_{6m} | \mu_{2m} ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$ ($m = 1, 2$).
- $\mu_{4m}\mathbf{O}, (\mu_{4m} | \mu_{2m} ; \mathbf{O} | \mathbf{T})$ ($m = 1, 2, 3, 6$).

– $\mu_{4m}\mathbf{I}$ ($m = 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$).

On trouvera ci-dessous un tableau récapitulatif, où les groupes sont ordonnés suivant la numérotation de Shephard et Todd, et où on donne leurs degrés caractéristiques, leurs ordres, et l'ordre des centres.

Numéro	Groupe	Degrés	Ordre	Ordre du centre	Nombre de réflexions d'ordres			
					2	3	4	5
4	$(\mu_6 \mu_2 ; \mathbf{T} \mathbf{D}_2)$	4,6	24	2	-	8	-	-
5	$\mu_6\mathbf{T}$	6,12	72	6	-	16	-	-
6	$(\mu_{12} \mu_4 ; \mathbf{T} \mathbf{D}_2)$	4,12	48	4	6	8	-	-
7	$\mu_{12}\mathbf{T}$	12,12	144	12	6	16	-	-
8	$(\mu_8 \mu_4 ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	8,12	96	4	6	-	12	-
9	$\mu_8\mathbf{O}$	8,24	192	8	18	-	12	-
10	$(\mu_{24} \mu_{12} ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	24,12	288	12	6	16	12	-
11	$\mu_{24}\mathbf{O}$	24,24	576	24	18	16	12	-
12	$(\mu_4 \mu_2 ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	6,8	48	2	12	-	-	-
13	$\mu_4\mathbf{O}$	8,12	96	4	18	-	-	-
14	$(\mu_{12} \mu_6 ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	6,24	144	6	12	16	-	-
15	$\mu_{12}\mathbf{O}$	12,24	288	12	18	16	-	-
16	$\mu_{10}\mathbf{I}$	20,30	600	10	-	-	-	48
17	$\mu_{20}\mathbf{I}$	20,60	1200	20	30	-	-	48
18	$\mu_{30}\mathbf{I}$	30,60	1800	30	-	40	-	48
19	$\mu_{60}\mathbf{I}$	60,60	3600	60	30	40	-	48
20	$\mu_6\mathbf{I}$	12,30	360	6	-	40	-	-
21	$\mu_{12}\mathbf{I}$	12,60	720	12	30	40	-	-
22	$\mu_4\mathbf{I}$	12,20	240	4	30	-	-	-

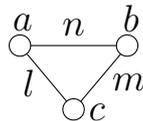
TAB. 3.1 – Groupes de réflexions primitifs de rang 2

Chapitre 4

Graphes de racines et systèmes de racines

4.1 Introduction

Il nous reste maintenant à classifier les groupes de réflexions complexes primitifs de rang ≥ 3 . Avant de le faire, nous allons introduire des outils généralisant les graphes de Coxeter et les systèmes de racines qui permettent la classification des groupes de réflexions réels. C'est ici qu'apparaît la difficulté, on n'a pas vraiment de bonne généralisation des graphes de Coxeter. Rappelons sur un exemple comment on construit les graphes de Coxeter : si l'on a un groupe G engendré par des (vraies) réflexions $\{s_a, s_b, s_c\}$, on choisit des racines $\{a, b, c\}$ correspondantes, et l'on relie par exemple la racine a à la racine b par une arête valuée, la valuation correspondant à l'ordre de $s_a s_b$ (qui est n si $|(a|b)| = \cos(k\pi/n)$, k premier à n).



L'exemple précédent contient déjà beaucoup d'informations sur G , par exemple il est fini si et seulement si $1/a + 1/b + 1/c > 1$, ce qui implique déjà que a, b ou $c < 2$.

Si par contre G est un groupe de réflexions complexe, il peut déjà contenir des réflexions d'ordre > 3 . De plus, même si $s \in \text{Ref}(G)$ est d'ordre 2, il existe une infinité de racines unitaires de s (alors que dans le cas réel, si v est racine unitaire de s , seul $-v$ l'est aussi, et on peut choisir canoniquement entre v et $-v$ en mettant un ordre sur les racines, cf. [Bou68]). Ainsi il nous faut rajouter un paramètre supplémentaire (qui varie dans \mathbf{U}) pour chaque racine d'une réflexion qui engendre G . Ces paramètres supplémentaires, on les représentera en mettant directement le produit scalaire des deux racines sur l'arête du graphe. De plus, si pour un groupe de réflexions réel, il existe un moyen quasi canonique de considérer un système de réflexions génératrices (grâce aux chambres), ce qui aboutit à des graphes de Coxeter sans cycles, il n'en est absolument pas de même pour les groupes de réflexions complexes (et en fait le Lemme 4.15 montre que si G est complexe, on ne peut pas le représenter par un graphe sans cycles). Autrement dit, un groupe

de réflexions complexe ne possède pas la géométrie d'un groupe de réflexions réel, qui permet de se ramener d'un groupe de réflexions réel à un groupe de Coxeter (grâce aux murs des chambres), c'est à dire d'un groupe qui vérifie une condition combinatoire sur les mots que l'on peut former avec, puis du groupe de Coxeter fini en question à un graphe de Coxeter, correspondance qui est bijective, ce qui fait qu'il n'y a plus ensuite qu'à classifier les graphes de Coxeter (et ces derniers sont suffisamment simple pour que leur classification se fasse assez facilement).

Ainsi on généralise les graphes de Coxeter en construisant des graphes (que l'on appellera graphes de racines) qui contiennent trop d'information, puisque plusieurs de ces graphes peuvent conduire au même groupe de réflexions complexe. De même on va généraliser les systèmes de racines réels, sauf qu'on n'aura pas de condition $\langle v, v^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$, condition qui n'a pas vraiment de sens dans le cas complexe. Pour nous un système de racines sera juste un ensemble fini de vecteurs, stables par le groupe qu'ils engendrent. Dans le cas réel, les systèmes de racines n'interviennent pas vraiment dans la classification, à part une fois que l'on a classifié les graphes de Coxeter, pour exhiber un groupe de réflexions réel représenté par ce graphe. Pour le cas complexe, leur rôle est plus important, notamment à cause de la notion d'extension propre, voir la Définition 4.32 et l'explication au début du Chapitre 5.

Il faut noter que comme pour les graphes de racines, il n'y a aucun espoir de pouvoir classifier les systèmes de racines directement, ils ne sont pas assez rigides puisqu'un même groupe de réflexions complexe peut être représenté par énormément de systèmes de racines (cela vient du fait que l'on a abandonné la condition $\langle v, v^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$), ce qui fait que l'on sera obligé d'utiliser un théorème sortant du cadre combinatoire pour finir la classification. Là encore, voir le Chapitre 5 pour plus de détails.

Pour simplifier les notations, on va travailler à partir de maintenant dans \mathbf{C}^∞ , muni du produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$. Si $G \subset U_n(\mathbf{C})$, on peut voir G comme un groupe de réflexions dans \mathbf{C}^∞ en identifiant \mathbf{C}^n avec le sous-espace de \mathbf{C}^∞ engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique : $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Ceci nous permet de travailler dans \mathbf{C}^∞ pour chercher la liste des groupes de réflexions. Comme on cherche les groupes de réflexions finis, on obtient bien des groupes de réflexions de dimension finie. C'est ici que la notation introduite dans la section 1.3.1 va nous être utile : si un groupe de réflexions G est de dimension r , alors r est le plus petit entier tel qu'un conjugué de G est contenu dans $U_r(\mathbf{C})$.

4.2 Graphes de racines

Définition 4.1 (graphe de vecteurs): Un graphe de vecteurs (unitaires) est la donnée d'un couple (B, w) où B (l'ensemble des points du graphe, que l'on appellera les racines du graphe) est un ensemble fini de vecteurs unitaires de \mathbf{C}^∞ , et w (la valuation) est une fonction de B dans $\mathbf{N} \setminus \{1\}$. Si $a \in B$, $w(a)$ est appelée l'ordre de a .

Deux graphes de vecteurs (B, w) et (B', w') sont dits isomorphes s'il existe une transformation unitaire t de \mathbf{C}^∞ qui envoie B sur B' et w sur w' . (i.e. $tB = B'$ et $w'(ta) = w(a)$ pour tout $a \in B$)

Remarque 4.2: On fera souvent l'abus de notation qui consiste à parler d'un graphe de vecteurs (B, w) , où B est un ensemble fini de vecteurs pas forcément unitaires (mais non proportionnels). Lorsqu'on parle d'un tel graphe de vecteurs (B, w) , on considère en réalité le graphe de vecteurs (B', w') où $B' = \{a/\|a\|, a \in B\}$ et $w'(a/\|a\|) = w(a)$.

Un graphe de vecteurs (B, w) peut être représenté par un graphe valué orienté Γ de la manière suivante : les points de Γ sont les éléments de B , valués par w . Pour tout couple $\{a, b\} \subset B$ on fixe une orientation (a, b) et on trace une arête de a vers b valuée par $(a|b)$ si $(a|b) \neq 0$.

Ainsi on a plusieurs représentations de (B, w) selon l'orientation que l'on a choisie. On a besoin de définir une orientation entre deux vecteurs complexes a et b pour pouvoir définir correctement la valuation de l'arête qui les relie car $(a|b) = \overline{(b|a)}$. Cependant si $(a|b) \in \mathbf{R}^*$, alors la valuation de l'arête ne dépend pas de l'orientation choisie, et donc pour simplifier on ne choisira pas d'orientation pour cette arête.

- Pour imiter les graphes de Coxeter, on fera de plus les simplifications suivantes :
- Si un point $a \in B$ est d'ordre 2, la valuation de a dans le graphe Γ sera omise.
 - Si $(a|b) = -1/2$, $w(a) = 2$ et $w(b) = 2$, la valuation $-1/2$ de l'arête connectant a et b sera omise.

Exemple 4.3: Soit $a = \varepsilon_3$ et $b = i3^{-1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$. Alors le graphe de vecteurs $L_2 = \{a, b\}$, $w(a) = 3$, $w(b) = 3$ peut être représenté par le graphe orienté suivant :

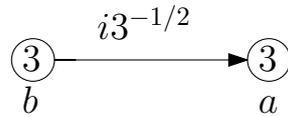


FIG. 4.1 – Le graphe L_2

Soit (B, w) un graphe de vecteurs et Γ le graphe orienté associé. Comme la donnée de Γ permet de retrouver (B, w) , on commettra l'abus de notation consistant à identifier Γ et (B, w) . Par exemple, un cycle de (B, w) sera un cycle de Γ , et on dira que (B, w) est connexe ssi Γ l'est. (on ne prend pas en compte l'orientation des arêtes de Γ lorsqu'on regarde les cycles et la connexité). Un triangle de Γ est un cycle de 3 points.

Un graphe de vecteurs $\Gamma = (B, w)$ permet de représenter un groupe de réflexions si l'on pense à $a \in B$ comme une racine d'une réflexion d'ordre $w(a)$.

Définition 4.4 (Groupe de réflexions engendré par un graphe):

Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de vecteur. On note $\dim(\Gamma)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par Γ et $W(\Gamma)$ le groupe de réflexions (pas forcément fini) engendré par les réflexions $\{s_{a,w(a)}, a \in B\}$ (avec les notations de la Définition 1.7).

- Γ est appelé un graphe de racines si :
- $\dim(\Gamma) = |B|$ (c'est à dire si les éléments de B sont linéairement indépendants).
 - $W(\Gamma)$ est un groupe de réflexions fini. ◇

Remarque 4.5:

- (i) Si G est un groupe de réflexions, il existe un graphe de vecteurs Γ tel que $G = W(\Gamma)$. En effet, si G est engendré par s_1, \dots, s_n , on choisit une racine a_i pour chaque réflexion s_i , et l'on pose $B = \{a_1, \dots, a_n\}$, $w(a_i) = o_G(a_i)$. $\Gamma = (B, w)$ est un graphe de racines si et seulement si $n = \dim(G)$, c'est à dire si et seulement si les (a_i) sont linéairement indépendants (d'après le Lemme 1.18). Ainsi les graphes de racines ne permettent pas de représenter tout les groupes de réflexions. On a cependant besoin de la condition $\dim(\Gamma) = |B|$ dans la définition d'un graphe de racines pour pouvoir travailler efficacement avec. En fait la classification des groupes de réflexions montre que tout groupe de réflexions primitif (sauf un) de rang $r > 2$ peut être engendré par r réflexions, donc sera représentable par un graphe de racines. Ceci explique pourquoi la condition précédente n'est finalement pas un obstacle à la classification des groupes de réflexions. Bien sûr on aura besoin d'un outil pour représenter les groupes de réflexions qui ne proviennent pas d'un graphe de racines (ne serait-ce que pour prouver que les groupes de réflexions primitifs de rang supérieur à 2 n'en font pas partie), ce sera le rôle des systèmes de racines.
- (ii) Si $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_p$ est la décomposition de Γ en cycles, alors $W(\Gamma) = W(\Gamma_1) \times \dots \times W(\Gamma_p)$ est la décomposition de $W(\Gamma)$ en produit de sous-groupes de réflexions irréductibles donnée par la Proposition 1.22.

Avant d'étudier plus en avant les graphes de racines, on note déjà que la condition que les vecteurs du graphe de racines soient libres implique que leur matrice de Gram est non nulle. Ceci nous servira quand on étudiera des graphes de racines explicites dans le Chapitre 5.

Lemme 4.6: *Si $\Gamma = (B, w)$ est un graphe de vecteurs avec $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, alors $\det((e_i | e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{R}^+$ et ce nombre est nul si et seulement si les (e_i) sont linéairement dépendants, dans ce cas Γ ne peut pas être un graphe de racines.*

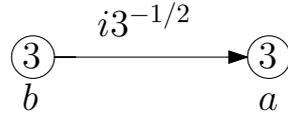
Définition 4.7: Si $\Gamma = (B, w)$ est un graphe de racines, on dit que Γ est réel (resp. complexe, primitif) si $W(\Gamma)$ est réel (resp. complexe, primitif). On dit que Γ est irréductible si $W(\Gamma)$ l'est en dimension $\dim(\Gamma)$, i.e. si Γ est connexe (d'après la Remarque 4.5(ii)).

Si $\Gamma' = (B', w')$ est un autre graphe de racines, on dit que Γ est équivalent à Γ' si $W(\Gamma)$ est conjugué à $W(\Gamma')$. Si $B \subset B'$ et $w'|_B = w$, on dit que Γ' est une extension de Γ ou que Γ est un sous-graphe de racines de Γ' .

Enfin on dit que Γ est congruent à Γ' s'il existe une transformation unitaire t de \mathbf{C}^∞ qui rend Γ isomorphe à Γ' et telle que les éléments de B sont des vecteurs propres de t .

Remarque 4.8: Si Γ est isomorphe à Γ' , $W(\Gamma)$ est conjugué à $W(\Gamma')$ donc Γ est équivalent à Γ' , mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple si on prend des réflexions différentes engendrant le même groupe, les graphes de vecteurs associés n'ont aucune raison d'être isomorphes. Enfin, si Γ est congruent à Γ' , alors $W(\Gamma) = W(\Gamma')$ (en effet, cela revient à constater que si a est une racine d'une réflexion s , alors $\lambda a, \lambda \in \mathbf{U}$ est également racine de s).

Exemple 4.9: Soit L_2 le graphe de vecteur de l'Exemple 4.3 :



L_2 est un graphe de racines irréductible, et $W(L_2) = (\mu_6 | \mu_2 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$.

Nous allons maintenant introduire un invariant indispensable pour étudier les groupes de réflexions composés de réflexions d'ordres 2.

Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de racines, et $u, v \in B$ d'ordres 2. Soit $G = \langle s_u, s_v \rangle$. G est un groupe engendré par deux éléments d'ordre 2, c'est donc un groupe diédral \mathbf{D}_m^1 d'ordre $2m$. De plus m est l'ordre de (uv) , d'où $|(u|v)| = \cos(\pi k/m)$ pour un certain k premier à m (cf. le début de [Bou68]).

Définition 4.10: On pose² :

$$d(\Gamma) = \max \{ \text{ordre}(uv) | u, v \in B \text{ d'ordres } 2 \}$$

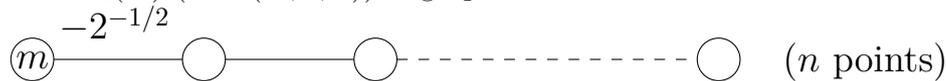
Si G est un groupe de réflexions, on pose également :

$$d(G) = \max \{ \text{ordre}(uv) | u, v \text{ sont des réflexions de } G \text{ d'ordres } 2 \} \quad \diamond$$

Remarque 4.11: Si Γ est un graphe de racines, on peut avoir $d(\Gamma) < d(W(\Gamma))$, comme le montre l'exemple suivant.

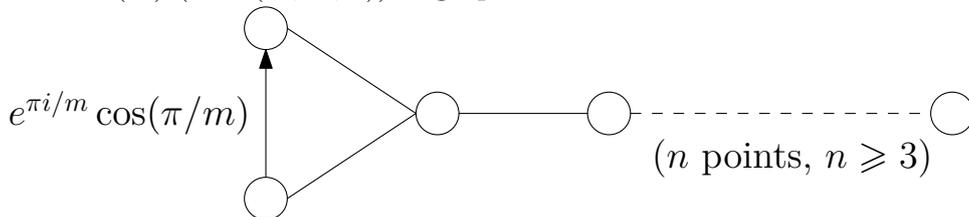
Exemple 4.12: (cf. la Définition 2.6 et la Remarque 2.7)

– Soit $B_n(m)$ (ou $\Gamma(m, 1, n)$) le graphe de vecteurs :



Alors $B_n(m)$ est un graphe de racines tel que $W(B_n(m)) = G(m, 1, n)$

– Soit $D_n(m)$ (ou $\Gamma(m, m, n)$) le graphe de vecteurs



Alors $D_n(m)$ est un graphe de racines tel que $W(D_n(m)) = G(m, m, n)$

Or

$$d(B_n(m)) = \begin{cases} 4 & \text{si } m = 2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$d(D_n(m)) = \max(3, m)$$

¹Il y a un conflit de notation avec la section 3.2, ici \mathbf{D}_m est le groupe diédral d'ordre $2m$, pas le groupe diédral binaire d'ordre $4m$

²on convient que $\max(\emptyset) = -\infty$

mais

$$d(G(de, e, n)) = \begin{cases} de & \text{si } de \geq 3 \\ 4 & \text{si } de < 3 \text{ et } d = 2 \\ 3 & \text{si } de < 3 \text{ et } d = 1 \end{cases} \quad \diamond$$

Le lemme suivant nous sera extrêmement utile pour transformer un graphe de racines représentant un groupe de réflexions G en un graphe de racines équivalent, mais plus facile à étudier.

Lemme 4.13: *Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de racines, et $(a, b) \in B$. Alors Γ est équivalent à $\Gamma' = (B', w')$, où $B' = \{b' = s_{a, w(a)}b\} \cup B \setminus \{b\}$ et*

$$w'(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in B \setminus \{b\} \\ w(b) & \text{si } x = b' \end{cases}$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de remarquer que $s_{b', w(b')} = s_{a, w(a)}s_{b, w(b)}s_{a, w(a)}^{-1}$ par la Remarque 1.8. ■

Exemple 4.14: Si a est d'ordre d , soit $\zeta = \exp(2i\pi/d)$. Alors $(s_a(b) | c) = (b | c) - (1 - \zeta)(b | a)(a | c)$. Ainsi si a n'est pas lié à b , $\Gamma' = \Gamma$. Sinon, la transformation précédente $\Gamma \mapsto \Gamma'$ est décrite dans la Figure 4.2.

Ainsi si x n'est pas lié à a , il n'y a pas de changements, si x est lié à a mais pas à b , il devient lié à b' dans Γ' , enfin si x est lié à b et à a , x sera lié ou non à b' suivant la valeur de $\mu + (1 - \zeta)\lambda\nu$ (avec les notations de la figure 4.2). On peut remarquer cependant que si $d = 2$, i.e. si $\zeta = -1$ et que $\lambda\mu\nu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, alors $\mu = \gamma\overline{\lambda\nu}$ où $\gamma \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, donc $\mu' = \mu - 2\overline{\lambda\nu} = (\gamma - 2)\overline{\lambda\nu} \neq 0$ et x_3 reste lié à b' . De plus on a toujours $\lambda\mu'\nu = (\gamma - 2) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (cela nous servira par la suite).

4.2.1 Graphes de racines réels

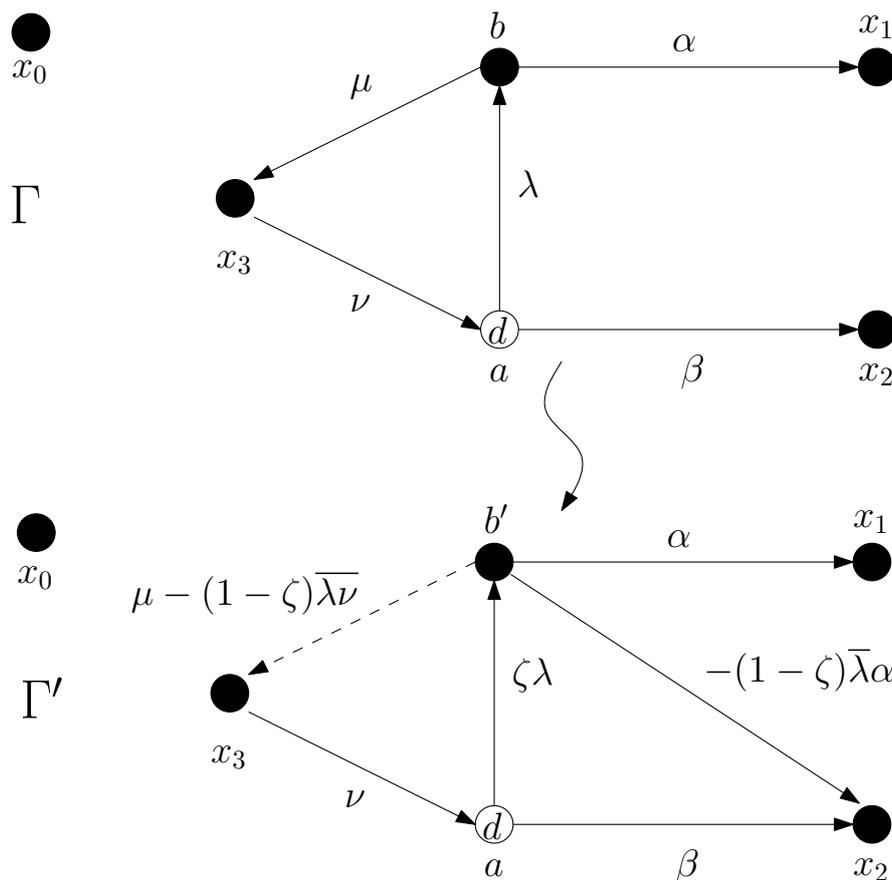
Le lemme suivant permet de caractériser les graphes de racines réels.

Lemme 4.15: *Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de racines (ou même un graphe de vecteurs).*

- (i) *Soit $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ un cycle de Γ ¹. C est complexe (i.e. $W(C)$ engendre un groupe complexe lorsqu'on voit C comme un sous-graphe de racines de Γ) si $\text{Val}(C)^2 := \prod_{i=1}^m (e_i | e_{i+1}) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.*
- (ii) *Γ est réel si et seulement si $w(B) = \{2\}$, et pour tout cycle $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ de Γ , $\prod_{i=1}^m (e_i | e_{i+1}) \in \mathbf{R}$*

¹Lorsqu'on notera un cycle $C = \{e_1, \dots, e_m\}$, on posera $e_{m+1} = e_1$ et on supposera qu'on a numéroté les e_i de telle sorte que e_i est relié à e_{i+1} c'est à dire $(e_i | e_{i+1}) \neq 0$

² $\text{Val}(C)$ dépend de l'ordre dans lequel on parcourt C , cependant si C est un cycle minimal, $\text{Val}(C)$ ne va dépendre que de l'orientation du parcours de C , et prendre le parcours dans le sens opposé va changer $\text{Val}(C)$ en son conjugué, et donc n'affectera pas le fait que $\text{Val}(C) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ ou non, ce qui est ce qui nous intéresse en vertu du Lemme 4.15

FIG. 4.2 – Γ et Γ' sont équivalents

Corollaire 4.16: Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de racines tel que $w(B) = \{2\}$. Alors si Γ n'a pas de cycles, Γ est réel. En particulier un graphe de racines complexe sans cycles est de dimension $d \geq 3$.

DÉMONSTRATION (DU LEMME):

- (i) Soit C un cycle comme dans le lemme. On voit facilement que si $W(C)$ est réel si et seulement s'il existe un graphe de racines C' congruent à C tel que tous les produits scalaires dans C' soient réels (voir la Remarque 1.10). Or prendre un cycle congruent C' ne va pas changer $\prod_{i=1}^m (e_i | e_{i+1})$, donc si $\prod_{i=1}^m (e_i | e_{i+1}) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $W(C)$ ne peut pas être réel. Par contre, parmi ces m produits scalaires, on peut en changer $m - 1$ pour qu'ils soient réels, et le dernier le sera ssi $\prod_{i=1}^m (e_i | e_{i+1}) \in \mathbf{R}$, ce qui va nous servir pour prouver (ii).
- (ii) Si $W(\Gamma)$ contient un sous-groupe complexe, il est également complexe, en particulier si Γ contient un cycle $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ tel $\prod_{i=1}^m (e_i | e_{i+1}) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Γ est complexe. Il en est de même si Γ contient une réflexion d'ordre > 2 , ce qui est le cas si $w(B) \neq \{2\}$. Réciproquement, si Γ vérifie les conditions du Lemme 4.15(ii), alors la preuve de (ii) montre que Γ est congru à un graphe dont tous les produits scalaires sont réels, donc $W(\Gamma)$ est réel. ■

Exemple 4.17: Si Γ est un triangle complexe (i.e. un graphe de racines irréductible complexe de dimension 3) tel que toutes les racines de Γ sont d'ordres 2 alors la transformation décrite dans le Lemme 4.13 donne à nouveau un triangle complexe comme le montrent le Lemme 4.15 et la discussion à la fin de l'Exemple 4.14.

Si $\Gamma = (B, w)$ est un graphe de racines tel que ses racines sont d'ordres 2, alors tous les produits scalaires sont de la forme $(u|v) = \cos(k\pi/m)$, avec k premier à m comme on l'a vu dans la discussion qui a conduit à la Définition 4.10. Quitte à remplacer u par une de ses orbites sous l'action de la rotation $s_u s_v$, on peut se ramener à un graphe équivalent où $(u|v) = -\cos(\pi/m)$ ¹. Si l'on remplace $-\cos(\pi/m)$ par m , on tombe sur un graphe de Coxeter. Donc la classification des graphes de Coxeter (cf. [Bou68]) nous donne :

Théorème 4.18: *Tout groupe de réflexions réel et irréductible peut être représenté par l'un des graphes de Coxeter Γ de la Figure 4.3. De plus $d(\Gamma) = d(W(\Gamma))$.*

*En particulier, si $\Gamma = (B, w)$ est un graphe de racines irréductible et sans cycles tel que $w(B) = \{2\}$, alors Γ est équivalent à un graphe de Coxeter irréductible.*²

4.2.2 Graphes de racines complexes

Lemme 4.19: *Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de racines irréductible.*

- (i) *Si G est un groupe de réflexions de dimension n qui contient $W(\Gamma)$, alors Γ peut être étendu en un graphe de racines Γ' tel que $W(\Gamma')$ est un sous-groupe de réflexions irréductible de G de dimension n .*
- (ii) *Si Γ est de plus complexe, $w(B) = \{2\}$, $d(\Gamma) = d(W(\Gamma))$, et $\dim(\Gamma) \geq 3$, alors il existe un graphe de racines Γ_0 complexe, irréductible et de dimension 3 tel que $W(\Gamma_0) \subset W(\Gamma)$ et $d(\Gamma_0) = d(W(\Gamma))$.*

DÉMONSTRATION:

- (i) Soit W le sev de \mathbf{C}^n engendré par les racines de Γ . On peut supposer que W est un sev propre, sinon $\Gamma' = \Gamma$ convient. Comme G est irréductible, il ne stabilise pas W , et il existe une racine unitaire v de G qui n'est pas dans $W \cup W^\perp$. Si l'on rajoute v à Γ (avec $w(v) = o_G(v)$), on obtient un graphe de racines Γ_1 irréductible (car $v \notin W^\perp$) de dimension $\dim(\Gamma) + 1$ (car $v \notin W$). On conclut par récurrence.
- (ii) Soit $n = \dim(\Gamma)$. On peut supposer $n > 3$. Par induction, il suffit de construire un graphe de racines Γ_1 de dimension $< n$ tel que $W(\Gamma_1) \subset W(\Gamma)$ et $d(\Gamma_1) = d(\Gamma)$. Soit $a, b \in B$ tels que $|(a|b)| = \cos(\pi/d(\Gamma))$. Soit $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ un cycle complexe minimal (c'est à dire qui ne contient pas de sous-cycles) de Γ . Comme C est minimal, $(e_i|e_j) = 0$ si $|j - i| > 1$ et $\{i, j\} \neq \{1, m\}$. Grâce au Lemme 4.15(ii), on peut supposer que $\prod_{i=1}^m (e_i|e_{i+1}) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Quitte à permuter les (e_i) et (a, b) , on peut supposer de plus qu'il existe un chemin

¹À partir de maintenant, on fera implicitement cette transformation dès que $w(u) = w(v) = 2$

²En fait Γ est même un des graphes de Coxeter irréductible si l'on a fait la transformation décrite dans la note 1

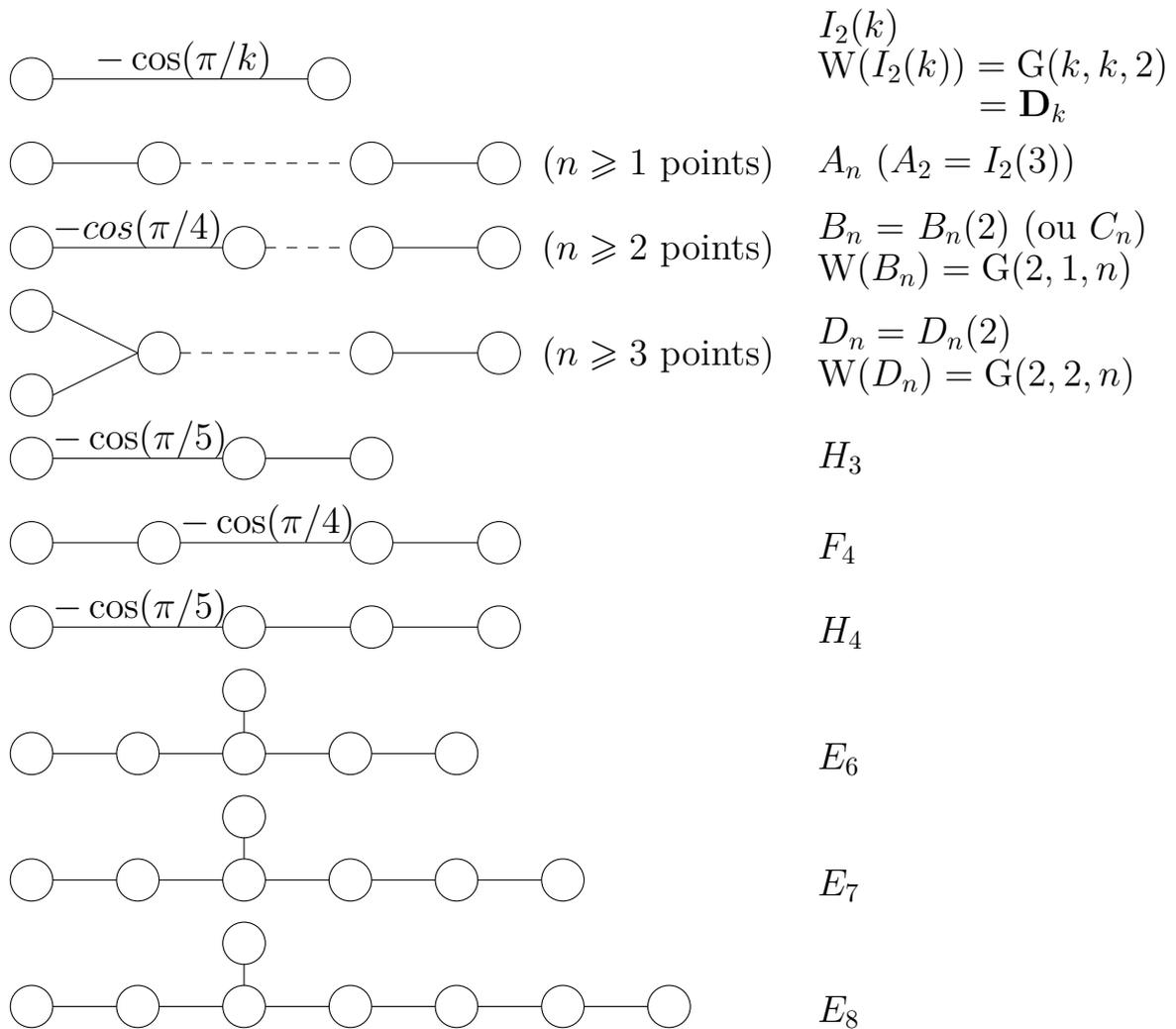


FIG. 4.3 – Les graphes de Coxeter irréductibles

minimal reliant C à $\{a, b\}$ partant de e_1 et arrivant à a . Ainsi si $\{a, b\} \cap C \neq \emptyset$, alors $e_1 = a$.

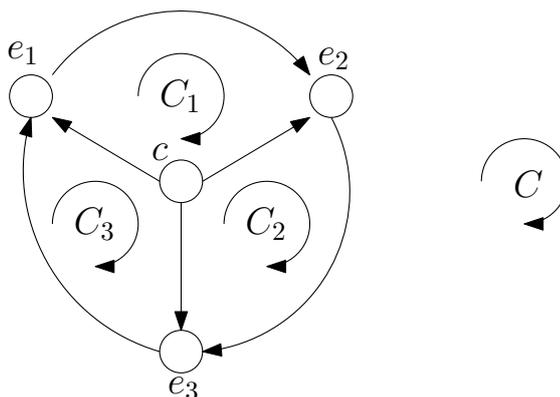
Supposons que $m \geq 4$. Si $\{a, b\} \subset C$, alors $a = e_1$ et comme b est lié à a , $b = e_2$ ou $b = e_m$. Quitte à renuméroter, on peut supposer dans tous les cas que $\{a, b\} \cap \{e_2, e_3\} = \emptyset$. Alors le sous-graphe Γ_1 engendré par $\{s_{e_2}e_3\} \cup B \setminus \{e_2, e_3\}$ convient. En effet il vérifie $d(\Gamma_1) = d(\Gamma)$, et $\dim(\Gamma_1) = \dim(\Gamma)$. Il reste à vérifier que Γ_1 est bien complexe et irréductible. Mais $s_{e_2}e_3 = e_3 - 2(e_3 | e_2)e_2$, d'où (voir aussi l'Exemple 4.14) :

$$(e_1 | s_{e_2}e_3) = -2(e_2 | e_3)(e_1 | e_2) \quad (4.1)$$

$$(s_{e_2}e_3 | e_4) = (e_3 | e_4) \quad (4.2)$$

Donc $(e_1 | s_{e_2}e_3) \times (s_{e_2}e_3 | e_4) \times \cdots \times (e_{m-1} | e_m) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (donc en particulier $\neq 0$). Ainsi Γ_1 est bien irréductible, et est complexe par le Lemme 4.15.

On peut donc supposer $m = 3$. Si $\{a, b\} \in C$, $\Gamma_1 = C$ convient. Si $\{a, b\} \cap C = \emptyset$, soit c l'unique point vérifiant $(e_1 | c) \neq 0$ dans le chemin minimal reliant e_1 à a . Si $(e_2 | c) \neq 0$ et $(e_3 | c) \neq 0$, on est dans la situation suivante (où l'on ne met pas la valuation des arrêtes) :



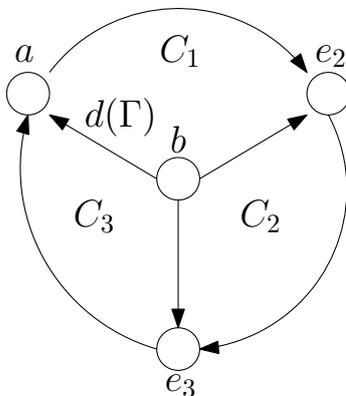
Et l'on vérifie que $\text{Val}(C) = \text{Val}(C_1) \text{Val}(C_2) \text{Val}(C_3)$ avec l'orientation donnée dans la figure. Donc au moins l'un des cycles C_i est complexe, supposons que ce soit C_1 . Le sous-graphe Γ_1 engendré par $B \setminus \{e_3\}$ convient presque, mais il n'est pas forcément irréductible, par contre la composante connexe de Γ_1 qui contient c convient elle, car a et b y apparaissent.

On peut donc supposer $(e_3 | c) = 0$. Si $(e_2 | c) = 0$, l'Exemple 4.14 montre qu'on peut se ramener au cas $(e_2 | c) \neq 0$ en remplaçant e_2 par $s_{e_1}e_2$ (ce qui ne change pas la nature du triangle $\{e_1, e_2, e_3\}$ comme le montre l'Exemple 4.17). Si le triangle $T = \{e_1, e_2, c\}$ est complexe, le graphe Γ_1 engendré par $B \setminus \{e_3\}$ convient (quitte à prendre la composante connexe contenant c). S'il est réel, alors on se ramène au cas précédent en remplaçant e_1 par $s_{e_3}e_1$. En effet $(c | s_{e_3}e_1) = (c | e_1)$, $(s_{e_3}e_1 | e_2) = (e_1 | e_2) - 2(e_1 | e_3)(e_3 | e_2) = (e_1 | e_2) - 2\gamma(e_1 | e_2)$ où $\gamma = \text{Val}(C) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Alors si $T' = \{s_{e_3}e_1, e_2, c\}$, $\text{Val}(T') = (1 - 2\gamma) \text{Val}(T) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et T' est bien complexe.

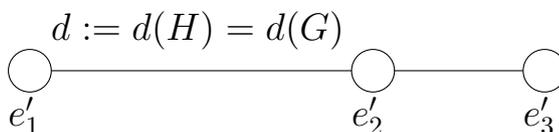
Enfin, il reste le cas $e_1 = a$ et $b \notin C$. On peut raisonner comme dans le cas précédent avec $c = b$: si par exemple $(e_3 | b) = 0$, les transformations décrites dans le paragraphe précédent fonctionnent toujours, il faut juste vérifier

que dans Γ_1 que l'on construit, on a bien $d(\Gamma_1) = d(\Gamma)$ mais c'est le cas car $(s_{e_3} a | b) = (a | b)$.

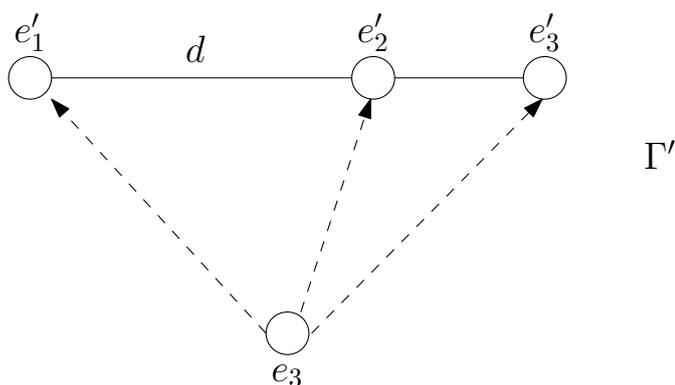
Il ne nous reste plus qu'à traiter le cas $(e_2 | b) \neq 0$ et $(e_3 | b) \neq 0$:



Si C_1 ou C_3 sont non réels, on raisonne comme dans le cas précédent : on peut enlever e_3 ou e_2 . Si ce n'est pas le cas, C_2 est complexe, mais on ne peut cette fois enlever a sous peine de risquer de diminuer $d(\Gamma_1)$ ¹. On peut supposer que $B = \{a, b, e_2, e_3\}$ sinon le graphe Γ_1 engendré par ces éléments convient. Soit $H = W(C_1)$. $d(G) = d(C_1) \leq d(H) \leq d(G)$ donc $d(H) = d(G)$. Comme C_1 est réel irréductible, la classification des graphes de Coxeter du Théorème 4.18 montre que C_1 est équivalent à

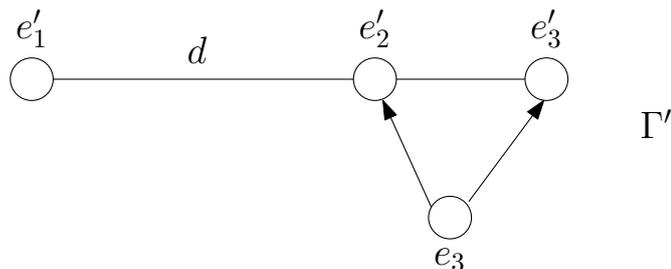


donc Γ est équivalent à Γ' :



Comme G est irréductible et complexe, Γ' contient au moins un triangle complexe. Si ce triangle contient e'_1 et e'_2 ce triangle convient. Sinon on est par exemple dans le cas suivant :

¹C'est d'ailleurs une erreur que fait [Coh76] dans la preuve du Lemme 4.5, page 401

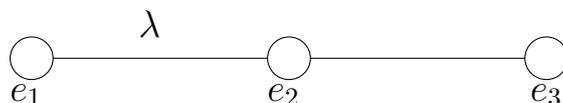


mais ici $(e'_1 | e'_3) = 0$ et l'on revient à un cas connu ($a = e'_2$, $b = e'_1$), ce qui conclut la preuve. ■

Théorème 4.20: *Soit G un groupe de réflexions complexe irréductible de dimension $n \geq 3$ dont toutes les réflexions sont d'ordres 2. Alors il existe un graphe de racines Γ complexe, irréductible et de dimension 3 tel que $W(\Gamma) \subset G$ et $d(\Gamma) = d(G)$.*

DÉMONSTRATION: On procède par récurrence sur n . Comme les réflexions de G sont d'ordres 2, les graphes de racines que l'on considère auront des racines d'ordres 2.

Soit $\lambda = \cos(\pi/d(G))$. Il existe par définition des racines unitaires e_1 et e_2 de G telles que $(e_1 | e_2) = \lambda$ (cf. la discussion qui précède la Définition 4.10 ainsi que celle qui précède le Théorème 4.18). On ajoute une racine unitaire e_3 de manière à former un graphe de racines irréductible Γ_0 (cf. le Lemme 4.19(i)). Si Γ_0 est complexe, $\Gamma = \Gamma_0$ convient. Sinon Γ_0 est réel, donc par le Théorème 4.18, Γ_0 est équivalent à :



Supposons que $n = \dim G = 3$. Comme (e_1, e_2, e_3) sont libres¹, ils forment une base des racines de G . Si pour toute réflexion s de G il existait une racine a de s telle que $(a | e_i) \in \mathbf{R}$ pour $i = 1, 2, 3$, G serait réel. Donc il existe une réflexion s de G pour laquelle ce n'est pas le cas, c'est à dire il existe une racine unitaire v de G telle que :

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbf{U}, \text{ il existe un } i \text{ tel que } \alpha(v | e_i) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \quad (4.3)$$

On remarque que $s_{e_i}v$ satisfait aussi à (4.3), en effet si par exemple $v' = s_{e_1}v = v - 2(v | e_1)e_1$, on a (cf. l'Exemple 4.14) :

$$\begin{aligned} (v' | e_1) &= -(v | e_1) \\ (v' | e_2) &= (v | e_2) - 2(v | e_1)(e_1 | e_2) \\ (v' | e_3) &= (v | e_3) \end{aligned}$$

donc si $(v' | e_1)$ et $(v' | e_3)$ sont réels, $(v | e_2)$ est complexe, et $(v' | e_2)$ l'est aussi. Le même raisonnement montre que si on change e_j par $s_{e_i}e_j$, v satisfait toujours (4.3).

Comme v satisfait à (4.3), il est relié à au moins deux (e_i) , s'il n'est pas relié à e_1 , il est relié à e_2 et quitte à prendre $v' = s_{e_2}v$, on peut supposer que v est lié à

¹On voit ainsi l'intérêt d'imposer la condition que les racines soient libres dans un graphe de racines

e_1 . Quitte à multiplier v par un $\lambda \in \mathbf{U}$, on peut même supposer que $(v|e_1) \in \mathbf{R}^*$. Si v, e_1, e_2 sont linéairement dépendants, alors $v = \lambda e_1 + \mu e_2$ car (e_1, e_2) sont libres. Alors $v, e_1, s_{e_3}e_2$ sont libres, sinon on aurait $v = \lambda' e_1 + \mu' s_{e_3}e_2 = \lambda' e_1 + \mu' e_2 - \mu' e_3$, donc par liberté de e_1, e_2, e_3 , on aurait $\mu = \mu' = 0$, et v serait proportionnel à e_1 ce qui contredit (4.3). Donc quitte à remplacer e_2 par $s_{e_3}e_2$, ce qui ne change pas la nature de Γ_0 ni celle de v comme on l'a vu, on peut supposer que v, e_1, e_2 sont libres. Soit

$$B_1 = \{e_1, e_2, v\}, B_2 = \{e_1, s_{e_2}e_3, v\}, B_3 = \{s_{e_2}e_1, e_3, v\}$$

$$B_4 = \{e_2, e_3, v\} \text{ et } B_5 = \{e_2, e_3, s_{e_2}v\}$$

et Γ_i le graphe de vecteur engendré par B_i . Supposons qu'aucun des Γ_i ne soit un graphe de racines irréductible complexe tel que $d(\Gamma_i) = d(G)$.

Comme Γ_1 est un graphe de racines irréductible tel que $d(\Gamma_1) = d(G)$, Γ_1 est réel. Or $(e_1|e_2), (v|e_1) \in \mathbf{R}^*$, donc $(v|e_2) \in \mathbf{R}$ par le Lemme 4.15(i). Donc $(e_3|v) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (par (4.3)), et $(v|s_{e_2}e_1) \in \mathbf{R}$.

Si $e_1, s_{e_2}e_3, v$ sont libres, Γ_2 est un graphe de racines tel que $d(\Gamma_2) = d(G)$ car $(e_1|s_{e_2}e_3) = (e_1|e_2)$ vu que $s_{e_2}e_3 = e_3 - 2 \times (-1/2)e_2 = e_2 + e_3$. Mais $(e_1|v) \in \mathbf{R}^*$, $(s_{e_2}e_3|e_1) \in \mathbf{R}^*$ et $(v|s_{e_2}e_3) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ vu que $(v|e_2) \in \mathbf{R}$ et $(v|e_3) \notin \mathbf{R}$. Donc Γ_2 est complexe, contradiction. Donc

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_2 e_3 \tag{4.4}$$

On a $(v|e_3) = \lambda_2/2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ donc $\lambda_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et $\lambda_1 \neq 0$ sinon $\alpha = 1/\lambda_2$ contredirait (4.3).

Notons que $(v|s_{e_2}e_1) \in \mathbf{R}$ et que $(s_{e_2}e_1|e_3) = (e_1|s_{e_2}e_3) = (e_1|e_2)$. Donc si $(v|s_{e_2}e_1) \neq 0$, le même raisonnement que pour le graphe Γ_2 s'applique au graphe Γ_3 et on obtient que

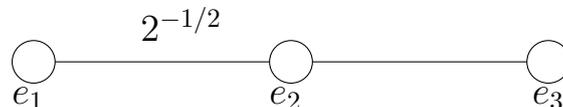
$$v = \lambda'_1 e_1 - 2\lambda\lambda'_1 e_2 + \lambda'_2 e_3 \tag{4.5}$$

Comme e_1, e_2, e_3 sont libres, (4.4) et (4.5) donnent $v = \lambda_1(s_{e_2}e_1 - 2\lambda e_3)$ ce qui contredit (4.3) avec $\alpha = 1/\lambda_1$.

Donc $(v|s_{e_2}e_1) = \lambda_1(1 - 2\lambda^2) = 0$, or $\lambda_1 \neq 0$ donc $\lambda = 2^{-1/2} = \cos(\pi/4)$. D'où $d(G) = 4$.

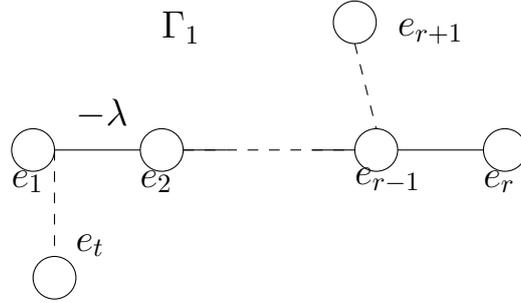
On a $(v|e_2) \neq 0$ car $(v|e_1) \neq 0$ et $(v|s_{e_2}e_1) = 0$, d'où $(v|e_2) \in \mathbf{R}^*$. v, e_2, e_3 sont libres par (4.4), donc Γ_4 est un graphe de racines complexe. Si $|(v|e_i)| = 2^{-1/2}$ pour $i = 2$ ou 3 , on obtient à nouveau une contradiction. Donc on peut supposer (quitte à remplacer v par $-v$) que $(v|e_2) = |(v|e_3)| = \cos(\pi/3) = 1/2$. D'où $2(v|e_2) = \lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2 = 1$ et $2|(v|e_3)| = |\lambda_2| = 1$. Le même raisonnement appliqué au graphe de racines Γ_5 qui est complexe car $(s_{e_2}v|e_2) \in \mathbf{R}$ et $(s_{e_2}v|e_3) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ donne $|(s_{e_2}v|e_3)| = |(v|e_3) + (e_2|v)| = |\lambda_1/\sqrt{2} + \lambda_2| = 1/2$. En regroupant ces équations, on voit que λ_2 est unitaire et vérifie $|1 + \lambda_2| = 1$. Ceci implique que $\lambda_2 \in \{j, j^2\}$.

Pour résumer, on est dans la situation suivante :



avec $v = 2^{-1/2}(1 - \lambda_2)e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_2e_3$ où $\lambda_2 \in \{j, j^2\}$. (on rappelle que l'arrête non valuée entre e_2 et e_3 signifie que $(e_2|e_3) = -1/2$.) On vérifie alors que la transformation linéaire t telle que $te_1 = -\varepsilon_3$, $te_2 = 2^{-1/2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$, $te_3 = 2^{-1/2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ est unitaire. De plus $tv = 2^{-1/2}(\lambda_2\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$. Donc le groupe $\langle s_v, s_{e_1}, s_{e_2}, s_{e_3} \rangle$ est conjugué à $G(6, 3, 3)$ (cf. cf. la Définition 2.6 et la Remarque 2.7 : avec les notations de la preuve du Théorème 2.8, on a $d = 2$, l'ordre de -1 et $m = 6$, l'ordre de $-\lambda_2$). Mais l'Exemple 4.12 donne $d(G(6, 3, 3)) = 6$ or $d(G(6, 3, 3)) \leq d(G)$ puisque $G(6, 3, 3) \subset G$ alors qu'on a vu que $d(G) = 4$. On obtient une contradiction, et cela fini la preuve du Théorème pour $n = 3$.

Supposons maintenant que $n > 3$. Soit H un sous-groupe de réflexions réel irréductible maximal (pour ces propriétés) de G contenant $W(\Gamma_0)$ (ainsi $d(H) = d(G)$). H étant réel, le Théorème 4.18, il est représenté par un graphe de Coxeter $\Gamma_1 = (B_1, w_1)$, $B_1 = \{e_1, \dots, e_r, \dots, e_t\}$. On suppose que l'on a numéroté les e_i de telle sorte que $(e_1|e_2) = -\cos(\pi/d(G))$, $(e_{i-1}|e_i) = -1/2$, $3 \leq i \leq r$ et e_r soit un point terminal de Γ_1 (c'est à dire que seul e_{r-1} est relié à e_r). C'est toujours possible comme le montre la figure 4.3 :



Comme G est complexe, il existe une racine unitaire v telle que $s_v \in G \setminus H$. Si on pose $v' = s_{e_r}v = v - 2(e_r|v)e_r$, v' est racine de la réflexion $s_{e_r}s_v s_{e_r} \in G \setminus H$. Supposons que v ou v' soit linéairement dépendant de $e_1, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_t$, et soit $H' = \langle \{s_{e_i}, i \neq r\}, s_v \rangle$. Si H' est réel, il existe un multiple λv de v qui appartient à $\mathbf{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}e_{r-1} \oplus \mathbf{R}e_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathbf{R}e_t$, donc $(\lambda v|e_r) \in \mathbf{R}$ et $\langle H', e_r \rangle$ est réel. Mais $\langle H', e_r \rangle \not\supseteq H$ et cela contredit la définition de H . Donc H' est complexe, de dimension $< \dim(G)$, et l'hypothèse de récurrence appliquée à H' permet de conclure.

Donc $v, e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_t$ engendre un graphe de racines Γ_v , et on peut supposer que Γ_v est réel grâce au Lemme 4.19(ii). De plus v est relié à l'un des $e_i, i \neq r$ car sinon e_1, \dots, e_t, v serait un graphe de vecteurs sans cycle, donc réel, ce qui contredit la maximalité de H . Comme e_r est un point terminal de Γ_1 , $e_1, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_t$ est connexe, donc Γ_v l'est aussi. De même $v', e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_t$ engendre un graphe de racines $\Gamma_{v'}$ réel irréductible.

Ainsi, quitte à remplacer v par un multiple, on peut supposer que $(v|e_i) \in \mathbf{R}$ si $i \neq r$. De plus il existe un $j \neq r$ tel que $(v|e_j) \neq 0$. Quitte à changer v par un élément de $\langle s_{e_i}, i \neq r, r-1 \rangle$ (cf. le Lemme 4.13), on peut supposer que $(v|e_{r-1}) \neq 0$. On a donc $(v'|e_{r-1}) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et $(v'|e_i) \in \mathbf{R}$ si $i < r-1$ (car alors $(e_i|e_r) = 0$). Donc $(v'|e_i) = 0$ si $i < r-1$ sinon on aurait un cycle complexe dans $\Gamma_{v'}$ par le Lemme 4.15(i). D'où $(v|e_i) = 0$ si $i < r-1$.

Posons $u = e_2 + e_3 + \dots + e_{r-1} = s_{e_2}s_{e_3} \dots s_{e_{r-2}}e_{r-1}$. u est une racine unitaire de H telle que $(e_1|u) = -\cos(\pi/d(G))$. Si v est une combinaison linéaire de e_1, u

et e_r , alors $K = \langle v, e_1, u, e_r \rangle$ est un groupe de dimension 3, irréductible (car e_1, u, e_r engendre un graphe de racines irréductible) et complexe (car v, u, e_r est un cycle complexe puisque $(v|u) \in \mathbf{R}^*$, $(u|e_r) \in \mathbf{R}^*$ et $(e_r|v) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$). Or $d(K) = d(G)$, donc le cas $n = 3$ précédemment traité nous permet de conclure.

On peut donc supposer que v, e_1, u et e_r sont libres. Posons $v'' = s_{e_r} s_u v = v - 2(e_{r-1}|v)u - 2((v|e_r) + (e_{r-1}|v))e_r$. Alors

$$(v''|e_1) = -2(e_2|e_1)(v|e_{r-1}) \in \mathbf{R}^* \quad \text{et} \quad (v''|u) = (v|e_r) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

Donc puisque v'', u, e_1 sont libres, ils forment le triangle complexe Γ que l'on cherchait. ■

Corollaire 4.21: *Soit G comme dans le Théorème 4.20. Supposons de plus que G est primitif et vérifie $n \geq 8 - d(G) \geq 4$. Alors il existe un graphe de racines Γ primitif, complexe, de dimension $8 - d(G)$ tel que $d(\Gamma) = d(G)$ et $W(\Gamma) \subset G$. (En fait, Γ peut être obtenu comme une extension de n'importe quel graphe de racines Γ_0 qui vérifie les conditions du Théorème 4.20).*

DÉMONSTRATION: Par le Théorème 4.20, il existe un graphe de racines Γ_0 complexe, irréductible de dimension 3 tel que $d(\Gamma_0) = d(G)$ et $W(\Gamma_0) \subset G$. Le Lemme 4.19(i) nous dit que l'on peut étendre Γ_0 en un graphe de racines Γ_1 complexe de dimension $7 - d(G)$.

Si Γ_1 est primitif, il n'est pas conjugué à $A_{7-d(G)}$ car il est complexe. Si on étend Γ_1 en un graphe de racines Γ irréductible de dimension $8 - d(G)$ il sera primitif par le Lemme 2.10.

Si Γ_1 est imprimitif, il n'est pas conjugué à $G(2, 2, 4)$ (qui est réel), ni à $G(3, 3, 3)$ (car $d(G(3, 3, 3)) = 3$, et si $7 - d(G) = 3$, $d(W(\Gamma_1)) = d(G) = 4$). Donc il a un unique système d'imprimitivité par le Lemme 2.11, et donc la Proposition 2.12 permet de conclure. ■

Remarque 4.22: La même preuve montre que si $n \geq 4$ et $d(G) = 5$, il existe un graphe de racines Γ de dimension 4, primitif et complexe tel que $d(\Gamma) = 5$ et $W(\Gamma) \subset G$.

4.3 Systèmes de racines

Définition 4.23 (Présystème de racines): Un présystème de racines est la donnée d'un couple $\Sigma = (R, f)$ tel que :

- (i) R (l'ensemble des pré-racines du système) est un ensemble fini d'éléments non nuls de \mathbf{C}^∞ .
- (ii) f (la valuation) est une application $f : R \rightarrow \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ qui vérifie $\forall a, b \in R$:

$$s_{a, f(a)} R = R, \quad f(s_{a, f(a)} b) = f(b)$$

et $f(a) = f(b)$ si $a, b \in R$ sont proportionnels.

Si R est inclus dans un sous-espace vectoriel V de \mathbf{C}^∞ , on dit que Σ est un présystème de racines de V .

On dit que Σ est isomorphe à $\Sigma' = (R', f')$ s'il existe une transformation unitaire qui envoie R sur R' et f sur f' .

Définition 4.24: À un présystème de racines $\Sigma = (R, f)$, on peut associer un groupe de réflexions $W(\Sigma)$ ¹ avec :

$$W(\Sigma) = \langle s_{a, f(a)}, a \in R \rangle$$

Remarque 4.25:

- Si Σ est isomorphe à Σ' , alors $W(\Sigma)$ est isomorphe à $W(\Sigma')$.
- À cause de la Définition 4.23(ii), on voit que remplacer $v \in R$ par un multiple λv muni de la même valuation donne un système de racines (si on remplace aussi les orbites de v sous l'action de $W(\Sigma)$ par le même multiple) essentiellement pareil (« congru ») à Σ , et qui donne le même groupe de réflexions. Il en va de même quand on rajoute au système de racines λv (et son orbite sous $W(\Sigma)$) avec la même valuation. Par la suite on identifiera deux systèmes de racines semblable par ses opérations, autrement dit même on suppose implicitement lorsqu'on parle d'un vecteur non unitaire v du système de racines que l'on considère en réalité $v/|v|$. On ne travaille pas directement sur des vecteurs unitaires pour simplifier les calculs, voir l'Exemple 4.35.

Définition 4.26 (Système de racines): Un présystème de racines $\Sigma = (R, f)$ est un système de racines ssi $\forall a \in R$

$$\alpha a \in R \iff \alpha a \in W(\Sigma).a \quad (\alpha \in \mathbf{C}) \quad (4.6)$$

Exemple 4.27:

- (i) Si $\Gamma = (B, w)$ est un graphe de racines, alors $R = W(\Gamma).B$ et $f : R \rightarrow \mathbf{N}$ induite par la fonction $o_{W(\Gamma)}$ donnent un système de racines Σ tel que $W(\Sigma) = W(\Gamma)$. (Attention: même si $b \in B$, on n'a pas forcément $f(b) = w(b)$).
- (ii) Soit G est un groupe de réflexions dans $V \subset \mathbf{C}^\infty$. Pour toute réflexion $s \in G$, on choisit une racine unitaire $a_s \in V$. Soit $R_0 = \{a_s, s \in \text{Ref}(G)\}$, et définissons $f_0 : R_0 \rightarrow \mathbf{N}$ par $f_0(a) = o_G(a)$. Alors $R = G.R_0$, muni de $f : R \rightarrow \mathbf{N}$ qui étend f_0 par $f(g.a) = f_0(a)$ si $a \in R_0, g \in G$ forme un présystème de racines de V . (Et si on choisit R_0 de manière à ce que si a_s est multiple de $a_{s'}$, alors $a_s = a_{s'}$, on obtient même un système de racines.)

Lemme 4.28: Soit $\Sigma = (R, f)$ un présystème de racines.

- (i) $\text{Ref}(W(\Sigma)) = \left\{ s_{a, f(a)}^j, a \in R, 0 < j < f(a) \right\}$. En particulier, les racines de $W(\Sigma)$ sont $\mathbf{C}.R$.
- (ii) Il existe un système de racines $\Omega = (S, g)$ tel que $W(\Omega) = W(\Sigma)$, $S \subset R$ et $g = f|_S$

¹ $W(\Sigma)$ est fini car il fixe R^\perp , donc c'est un groupe de permutation de R

² f est bien définie, en fait f est la restriction de o_G à R

(iii) Si $\Delta \subset R$ est tel que $W(\Sigma) = \langle s_{a,f(a)}, a \in \Delta \rangle$, alors pour toute racine x de $W(\Sigma)$ est dans $\mathbf{C}W(\Sigma).\Delta$. En particulier, toute réflexion de $W(\Sigma)$ est conjuguée à $s_{a,f(a)}^j$ pour certains $j \in \mathbf{N}$ et $a \in \Delta$, et si x et y sont des racines unitaires de $W(\Sigma)$, alors $(x|y) \subset \{((u/|u|)|(v/|v|)), u, v \in \Delta\}$

Si de plus Σ est un système de racines, alors R est formé des orbites de Δ par $W(\Sigma)$. En particulier si $x, y \in R$ alors $(x|y) \subset \{(u|v), u, v \in \Delta\}$

DÉMONSTRATION:

(i) Soit $T = \{v \in \mathbf{C}^\infty, \mathbf{C}v \cap R \neq 0\}$, et $u \in \mathbf{C}^\infty \setminus T$ une racine de $W(\Sigma)$ d'ordre $m > 1$. $W(\Sigma)$ laisse R invariant, et donc T aussi. La Proposition 1.28 nous fournit un caractère linéaire $\chi : W(\Sigma) \rightarrow \mathbf{C}^*$ tel que pour toute réflexion $r \in W(\Sigma)$:

$$\chi(r) = \begin{cases} \det(r) & \text{si } r \text{ a une racine dans } T \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais comme $W(\Sigma)$ est engendré par les $s_{a,f(a)}$, $a \in R$, χ coïncide avec \det , donc $1 = \chi(s_{u,m}) = \det(s_{u,m})$, ce qui est absurde. Ainsi T est bien l'ensemble des racines de $W(\Sigma)$.

Soit maintenant s une réflexion de $W(\Sigma)$, de valeur propre $\zeta \neq 1$. On a vu que s a une racine $a \in R$. Il reste à vérifier que l'ordre de s divise $f(a)$. Posons $Q = W(\Sigma).(\mathbf{C}^*a)$. La Proposition 1.28 nous donne à nouveau un caractère linéaire $\varphi : W(\Sigma) \rightarrow \mathbf{C}^*$ tel que pour toute réflexion $r \in W(\Sigma)$:

$$\chi(r) = \begin{cases} \det(r) & \text{si } r \text{ a une racine dans } Q \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il existe $a_1, \dots, a_l \in R$ (avec multiplicités) tels que $s = s_{a_1,f(a_1)} \dots s_{a_l,f(a_l)}$, d'où $\zeta = \prod_{a_i \in Q} \det s_{a_i,f(a_i)}$. Or si $a_i \in Q$, a_i est dans l'orbite de \mathbf{C}^*a par $W(\Sigma)$, donc la Définition 4.23(ii) montre que $f(a_i) = f(a)$. Ainsi l'ordre de ζ est un diviseur de $f(a)$, ce qu'on voulait.

(ii) Soit $U = \{\mathbf{C}^*u, u \text{ racine de } W(\Sigma)\}$, et $u_1, \dots, u_l \in R$ des éléments tels que $\{\mathbf{C}^*u_i\}$ est un système de représentants des orbites de $W(\Sigma)$ dans U . Posons $\Omega = (S, g)$ où $S = \bigcup_{i=1}^l W(\Sigma)u_i$ et $g = f|_S$. On vérifie immédiatement que $S \subset R$, $W(\Sigma)$ stabilise S donc S est un présystème de racines, $W(\Omega) = W(\Sigma)$ et S est un système de racines par le choix des (u_i) .

(iii) On définit un présystème de racines $\Sigma_1 = (R_1, f_1)$ avec $R_1 = W(\Sigma).\Delta$ et $f_1 = f|_{R_1}$ (ce qui garantit que Σ_1 est bien un présystème de racines; f_1 est l'unique extension à R_1 de $f|_\Delta$ stable par l'action de $W(\Sigma)$). Par définition de Δ , $W(\Sigma_1) = W(\Sigma)$, donc on peut appliquer (i) : si x est une racine, il existe $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tel que $\alpha x \in R_1 = W(\Sigma).\Delta$, donc il existe $a \in \Delta$ tel que $\alpha x \in W(\Sigma).a$. Si Σ est un système de racines et $x \in R$ on peut prendre $\alpha = 1$, donc R est bien une réunion d'orbites de Δ par $W(\Sigma)$.

Les cas particuliers s'en déduisent immédiatement, car quitte à changer x par un multiple, on peut supposer que $x \in R$, dans ce cas $\alpha x \in R_1 \subset R$ donc $f(x) = f(\alpha x) = f(a)$ et $s_{x,f(x)}$ est conjugué à $s_{a,f(a)}$ (ce qui donne bien le cas

général puisque toute réflexion est de la forme $s_{x,f(x)}^j, x \in R$ d'après (i). De plus $W(\Sigma)$ est formé d'automorphismes unitaires, donc son action ne change pas le produit scalaire. ■

Comme tout ce qui concerne les éléments réguliers, la deuxième partie du lemme suivant sert à calculer les invariants associés à un groupe de réflexions donné. Nous ne nous en servons pas (nous renvoyons à [Coh76] pour quelques exemples de calculs effectifs à la main, et à [GAP06] pour les calculs automatiques). Nous la montrons juste par souci de complétude et pour donner une idée de l'intérêt des systèmes de racines.

Lemme 4.29: *Soit $\Sigma = (R, f)$ un système de racines.*

(i) *Soit Δ comme dans le Lemme 4.28(iii) et soit A un sous-anneau de \mathbf{C} tel que $\exp(2\pi i/m) \in A$ pour tout $m \in f(\Delta)$, et $(a|a) \in A, (b|a)(a|a)^{-1} \in A$ pour tous $a, b \in \Delta$. Alors $(b|a)(a|a)^{-1} \in A$ pour tous $a, b \in R$ et $W(\Sigma)$ est défini sur le corps des fractions de A .*

(ii) *Si g est un élément régulier de $W(\Sigma)$, l'ordre de g est un diviseur de $|R|$.*

DÉMONSTRATION:

(i) On a

$$(s_{a,f(a)}^k b|c) = (b|c) - (1 - \exp(2\pi i k f(a)^{-1})) (b|a)(a|c)(a|a)^{-1} \in A$$

(pour tout $a, b, c \in \Delta$ et $k \in \mathbf{N}$), une induction immédiate nous permet de conclure vu que $R = W(\Sigma)\Delta$.

(ii) Si $g \in W(\Sigma)$ est régulier, il permute les éléments de R . De plus s'il est non trivial, il ne fixe pas d'éléments de R , en effet v est un vecteur régulier de g , de valeur propre ζ , alors $\zeta \neq 1$ par le Théorème 1.26. D'où s'il $a \in R$ est fixé par g , $(v|a) = (g.v|g.a) = \zeta(v|a)$, absurde. Ainsi les orbites de g dans R ont toutes la même longueur : l'ordre de g (car c'est l'ordre par $\langle g \rangle$ de v , cf. le Théorème 1.26). ■

Corollaire 4.30: *Soit $\Gamma = (B, w)$ un graphe de racines tel que $w(B) = \{2\}$. Alors $d(\Gamma) = d(W(\Gamma))$.*

DÉMONSTRATION: En effet, si l'on note $\Sigma = (R, f)$ le système de racines associé à Γ par l'Exemple 4.27, alors comme $G = W(\Gamma)$ n'a que des réflexions d'ordres 2, $f(R) = \{2\}$. Et B vérifie la condition du Lemme 4.28(iii). Comme les éléments de B sont unitaires, $A = \mathbf{Z}[\exp(2i\pi/d(\Gamma))]$ vérifie la condition du Lemme 4.29(i). Donc les produits scalaires des éléments de R sont dans A , et comme chaque réflexion a une racine dans R , on voit que $d(G) = d(W(\Gamma))$. ■

Exemple 4.31:

(i) Posons

$$R(m, m, n) = \mu_2 \mu_m \{e^{2\pi il/m} \varepsilon_i - \varepsilon_j, i, j, l \in \mathbf{N}, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

et soit $f_{m,m,n} : R(m, m, n) \rightarrow \mathbf{N}$ la fonction constante 2. Alors $\Sigma(m, m, n) = (R(m, m, n), f_{m,m,n})$ est un système de racines qui vérifie $W(\Sigma(m, m, n)) = G(m, m, n)$ et $|R(m, m, n)| = m^2 n(n-1) \text{pgcd}(m, 2)^{-1}$

(ii) Posons $m = de$. Soit $R(de, e, n) = R(m, m, n) \cup \mu_d \{\varepsilon_k, 1 \leq k \leq n\}$ et $f_{de,e,n} : R(de, e, n) \rightarrow \mathbf{N}$ l'extension de $f_{m,m,n}$ qui envoie ε_i sur d . Alors $\Sigma(de, e, n) = (R(de, e, n), f_{de,e,n})$ est un système de racines tel que $W(\Sigma(de, e, n)) = G(de, e, n)$.

(iii) Soit $R = \mu_6 \{\varepsilon_1, 1/3(2\omega + 1)(w^j \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, j = 0, 1, 2\}$ et $f : R \rightarrow \mathbf{N}$ la fonction constante 3. Alors $\Sigma = (R, f)$ est un système de racines et $W(\Sigma) = W(L_2)$ (cf. l'Exemple 4.9).

Définition 4.32: Soit $\Sigma = (R, f)$ un présystème de racines. Une extension propre de Σ est un système de racines $\Omega = (S, g)$ tel que $S \supsetneq R$, $g|_R = f$ et

(i) $g(S) = f(R)$

(ii)

$$\left\{ |(a|b)| |a|^{-1} |b|^{-1}; a, b \in S \cap g^{-1}(2) \right\} \subset \{|\cos(\pi k/m)|; k \in \mathbf{Z}, 0 < m \leq d(W(\Sigma))\}$$

Remarque 4.33: La condition (i) de la Définition 4.32 signifie que $\text{Im } o_{W(\Sigma)} = \text{Im } o_{W(\Omega)}$ et la condition (ii) signifie que $d(W(\Sigma)) = d(W(\Omega))$ (cf. le Lemme 4.28(i)).

Lemme 4.34: Si G est un groupe de réflexions, et Σ un système de racines tel que $W(\Sigma) \subsetneq G$ avec $\text{Im } o_{W(\Sigma)} = \text{Im } o_G$ et $d(W(\Sigma)) = d(G)$, alors il existe un système de racines Σ' tel que $G = W(\Sigma')$ et Σ' est (isomorphe à) une extension propre de Σ .

DÉMONSTRATION: On étend Σ en un système de racines Σ' qui représente G (cf. l'Exemple 4.27 et le Lemme 4.28(i)). La Remarque 4.33 montre que Σ' est une extension propre de Σ . ■

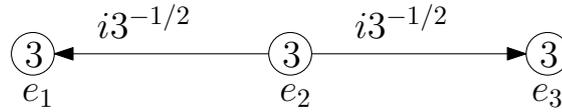
Exemple 4.35: Il n'y a pas d'extension propre dans \mathbf{C}^3 de $\Sigma(3, 3, 3)$. (En effet, si $x \in \mathbf{C}^3 \setminus \Sigma(3, 3, 3)$ appartient à une extension propre, alors quitte à changer la longueur de x on peut supposer que $|x| = \sqrt{2}$ et la condition (ii) de la Définition 4.32 implique que $|(x|\varepsilon_i - e^{2i\pi/3}\varepsilon_j)| = 0, 1$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq 3$, et un calcul rapide montre que c'est impossible.)

4.4 Les graphes de racines primitifs complexes de rang ≥ 3

On a vu dans le Chapitre 3 qu'il y avait 15 groupes de réflexions complexes primitifs rang ≥ 3 , et le Théorème 4.18 montre qu'il y en a 9 qui sont complexes. On va les exhiber en donnant la description des graphes de racines qui les représentent (ils sont tous représentables par un graphe de racines, sauf un). On conclura au Chapitre 5 en montrant que ce sont bien les seuls.

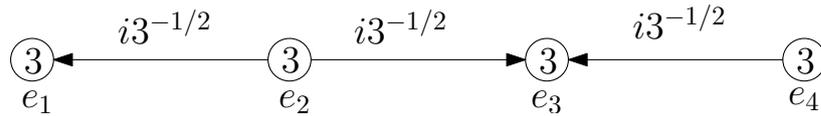
Définition 4.36:

(i) On appelle L_3 le graphe de vecteurs



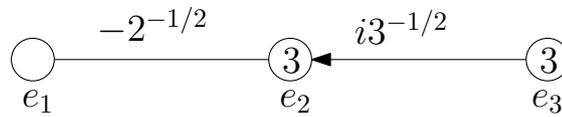
où $e_1 = \varepsilon_3$, $e_2 = i3^{-1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ et $e_3 = \varepsilon_2$.

(ii) On appelle L_4 le graphe de vecteurs



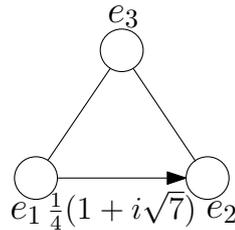
où $e_1 = \varepsilon_3$, $e_2 = i3^{-1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, $e_3 = \varepsilon_2$ et $e_4 = i3^{-1/2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)$.

(iii) On appelle M_3 le graphe de vecteurs



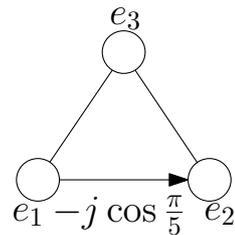
où $e_1 = 2^{-1/2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$, $e_2 = \varepsilon_3$ et $e_3 = i3^{-1/2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$.

(iv) On appelle $J_3(4)$ le graphe de vecteurs



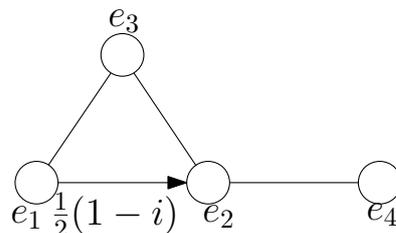
où $1/4(1 + i\sqrt{7}) = 2\alpha$, avec α une racine de $X^2 - X + 2$, $e_1 = \varepsilon_2$, $e_2 = 1/2\bar{\alpha}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ et $e_3 = -1/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha\varepsilon_3)$.

(v) On appelle $J_3(5)$ le graphe de vecteurs



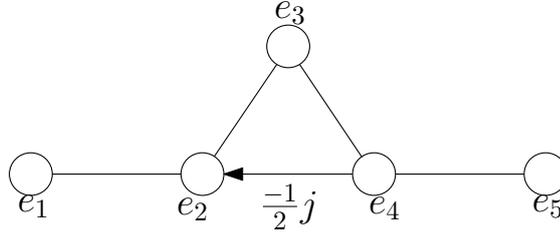
où $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = -(j^2 \cos(\pi/5)\varepsilon_1 - \cos(3\pi/5)\varepsilon_2 + 1/2j\varepsilon_3)$ et $e_3 = -(1/2\varepsilon_1 + \cos(3\pi/5)\varepsilon_2 + \cos(\pi/5)\varepsilon_3)$.

(vi) On appelle N_4 le graphe de vecteurs



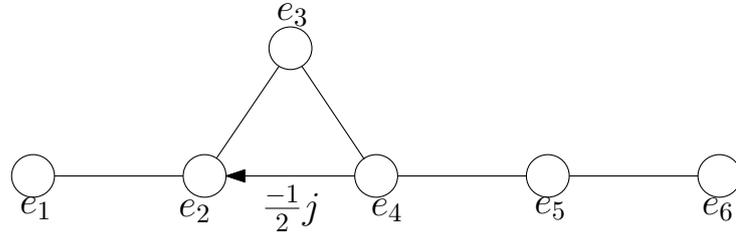
où $e_1 = 1/2(1+i)(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)$, $e_2 = 1/2(1+i)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$, $e_3 = 1/2(-\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + i\varepsilon_4)$ et $e_4 = \varepsilon_1$.

(vii) On appelle K_5 le graphe de vecteurs



où $e_1 = j2^{-1/2}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6)$, $e_2 = -j2^{-3/2}(-\varepsilon_1 + (1 + 2j)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6)$, $e_3 = 2^{-1/2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, $e_4 = 2^{-1/2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$ et $e_5 = 2^{-1/2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)$.

(viii) On appelle K_6 le graphe de vecteurs



où $e_1 = j2^{-1/2}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6)$, $e_2 = -j2^{-3/2}(-\varepsilon_1 + (1 + 2j)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6)$, $e_3 = 2^{-1/2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, $e_4 = 2^{-1/2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$, $e_5 = 2^{-1/2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ et $e_6 = -2^{-3/2}j^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + (1 + 2j)\varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6)$ \diamond

Théorème 4.37: Soit $\Gamma = (B, w)$ l'un des graphes de vecteurs de la Définition 4.36, disons de dimension n . Alors Γ est un graphe de racines. De plus, soit $\Sigma = (R, f)$ le système de racines associé à Γ (cf. l'Exemple 4.27) et posons $G = W(\Gamma) = W(\Sigma)$. Alors :

- (i) G est un groupe de réflexions complexe primitif de \mathbf{C}^n , $d(G) = d(\Gamma)$ et si $v \in R \cap B$, $f(v) = w(v)$ (autrement dit f est déterminé par w , f est l'unique extension de w compatible avec l'action de G).
- (ii) Σ n'admet pas d'extension propre dans \mathbf{C}^n , sauf si $\Gamma = N_4$. Dans ce dernier cas, Σ n'admet qu'une seule extension propre : $\Delta = (S, g)$ où $S = G.B \cup G.(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$ et g est la fonction constante 2. On notera $\text{EW}(N_4)$ le groupe engendré par Δ .
- (iii) G est conjugué à son conjugué complexe \overline{G} .

On trouvera dans le Tableau 4.1 un récapitulatif des groupes primitifs de rang ≥ 3 , avec leurs numéros de Shephard et Todd, leurs degrés caractéristiques, leurs ordres, et l'ordre de leurs centres.

DÉMONSTRATION (IDÉE): On fait une preuve au cas par cas, voir [Coh76], Théorème 4.15 page 409 pour plus de détails. On vérifie que Γ est un graphe de racines en vérifiant que R est fini, donc $G = W(\Sigma)$ l'est aussi (on n'a pas besoin de connaître f ici pour savoir que G est fini). On vérifie ensuite que si on note f' l'unique extension

de w compatible avec l'action de G (c'est à dire avec l'action des réflexions données par Γ), (R, f') vérifie la condition (ii) de la Définition 4.23, donc $\Sigma' = (R, f')$ est un système de racines. Comme $G = W(\Gamma)$, $G = W(\Sigma')$ et le Lemme 4.28 montre que si $v \in R$, $f'(v) = o_G(v)$ d'où $f = f'$. G est complexe car pour chacun des cas, soit Γ contient une réflexion d'ordre ≥ 2 , soit Γ contient un cycle complexe. Pour montrer que G est primitif, il suffit d'exhiber un sous-groupe de réflexions de G primitif de même dimension. Par exemple pour $\Gamma = K_5$, on vérifie que Σ est une extension propre d'un système de racines associé à $W(A_5)$, qui est primitif en dimension 5. De plus, $d(G) = d(\Gamma)$, en effet on peut calculer $d(G)$ grâce à Σ d'après la Remarque 4.33.

Pour montrer que Σ n'admet pas d'extension propre (ou une seule dans le cas $\Gamma = N_4$), on procède comme dans l'Exemple 4.35. Par exemple, pour $\Gamma = N_4$, supposons que $x \in \mathbf{C}^4 \setminus \mathbf{U}.R$ est un élément d'une extension propre de Σ . Quitte à changer la longueur de x , on peut supposer que $|x| = 2$. Comme $d(W(N_4)) = 4$, le produit scalaire de x avec un élément v de R est dans $\{0, 2|v| \times 1/2, 2|v| \times \sqrt{(2)}/2\}$. Comme $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \in R$ (si $1 \leq i, j \leq 4$), et on vérifie facilement en faisant les calculs que $x \in \mathbf{C}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$ (quitte à remplacer x par un conjugué de x sous l'action de $W(N_4)$). Donc Δ est bien l'unique extension propre de Σ .

Enfin, on vérifie aussi au cas par cas que G est conjugué à \overline{G} , ceci ne nous servira pas pour la suite, cela montre juste que la conjugaison complexe ne donne pas de nouveaux groupes primitifs (en rang ≥ 3). ■

Numéro	Groupe	Degrés	Ordre	Ordre du centre	Nombre de réflexions d'ordres	
					2	3
24	$W(J_3(4))$	4, 6, 14	336	2	21	-
25	$W(L_3)$	6, 9, 12	648	3	-	24
26	$W(M_3)$	6, 12, 18	1296	6	9	24
27	$W(J_3(5))$	6, 12, 30	2160	6	45	-
29	$W(N_4)$	4, 8, 12, 20	7680	4	40	-
31	$EW(N_4)$	8, 12, 20, 24	46080	4	60	-
32	$W(L_4)$	12, 18, 24, 30	155520	6	-	80
33	$W(K_5)$	4, 6, 10, 12, 18	51840	2	45	-
34	$W(K_6)$	4, 12, 18, 24, 30, 42	26127360	2	126	-

TAB. 4.1 – Les groupes primitifs de rang ≥ 3

Chapitre 5

Classification des groupes de réflexions primitifs

5.1 Introduction

Notre but dans ce Chapitre est de terminer la liste des groupes de réflexions irréductibles. On a déjà classifié les groupes de réflexions imprimitifs dans le Chapitre 2, et on a rappelé quels sont les groupes de réflexions réels primitifs dans le Théorème 4.18. Il ne reste plus qu'à montrer que les 9 groupes de réflexions complexes que l'on a exhibés dans la section 4.4 sont bien les seuls.

L'idée est de partir d'un groupe de réflexions complexe primitif G de dimension n , et de montrer que son système de racines associé est une extension propre d'un des systèmes de racines du Théorème 4.37. Le Théorème 4.37(ii) montrera alors que G est bien l'un des groupes de la liste. Une méthode possible, si G est engendré par des réflexions d'ordre 2, c'est d'utiliser le Théorème 4.20 pour obtenir un graphe de racines Γ qui engendre un groupe $W(\Gamma) \subset G$ et tel que $d(\Gamma) = d(G)$ (une condition dont on a besoin pour montrer que le système de racines associé à G est une extension propre du système de racines associé à une extension de Γ). On pourra étendre Γ en un graphe de racines de dimension n grâce au Lemme 4.19(i), mais en fait on préférera utiliser le Corollaire 4.21 pour avoir un sous-groupe primitif, on verra pourquoi plus tard. Le problème du Corollaire 4.21 est qu'il donne un graphe de racines Γ de dimension $8 - d(G)$, donc plus $d(G)$ est grand, plus Γ sera petit, et plus il y aura de possibilités pour le compléter en un groupe de dimension n . Enfin, si G contient une réflexion d'ordre ≥ 3 , la méthode précédente ne marche pas (on peut cependant utiliser la Proposition 2.12 pour obtenir un sous-groupe primitif).

Ainsi il nous faut une méthode pour montrer que G n'a pas de réflexions d'ordres trop importants, et que $d(G)$ est assez petit. On obtiendra ce résultat grâce à un théorème de Blichfeldt, qui s'applique à n'importe quel groupe primitif. On voit que l'on est obligé d'utiliser un résultat qui sort du cadre des groupes de réflexions, c'est pourquoi l'on peut dire que la preuve de la classification des groupes de réflexions réalisée dans ce mémoire n'est pas totalement satisfaisante : les constructions combinatoires (graphes de racines et systèmes de racines) introduites dans le Chapitre 4 ne sont pas assez puissantes pour parvenir à elles seules à la classification (à la différence des graphes de Coxeter pour la classification des groupes de réflexions

réels).

Une fois énoncé ce théorème, il ne nous restera plus qu'à étudier au cas par cas chacune des possibilités laissée. Comme ce n'est pas vraiment la partie la plus intéressante de la preuve, on donnera juste quelques exemples pour montrer comment se servir des outils que l'on a construits jusqu'ici, et l'on renvoie à [Coh76] pour la preuve en détail des cas restant.

5.2 Le théorème de Blichfeldt

Théorème 5.1 (Blichfeldt): *Soit V un espace vectoriel complexe et G un groupe fini et primitif de morphismes unitaires de V . Soit $g \in G$, et notons $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de g . On suppose que $|\arg \zeta_j \zeta_1^{-1}| \leq \pi/3$ pour tout $1 \leq j \leq m$. Alors $g \in \mathcal{Z}(G)$.*

DÉMONSTRATION: Voir l'Appendice A. ■

Ce théorème a les conséquences suivantes pour un groupe de réflexions primitif, ce qui va nous permettre d'élaguer considérablement les groupes que l'on a à considérer pour terminer la classification :

Corollaire 5.2: *Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 3$, et $G \subset \mathbf{U}(V)$ un groupe de réflexions primitif fini. Alors :*

- (i) *G ne contient pas de réflexions d'ordres ≥ 4 . Si G contient une réflexion d'ordre 3, alors G contient un sous-groupe conjugué à $\mathbf{W}(L_2)$.*
- (ii) *Si H est un sous-groupe de réflexions de G irréductible de dimension r , et que $1 < r < n$; alors $\mathcal{Z}(H) < 6$. Si de plus $r = n - 1$, alors $\mathcal{Z}(H) < 4$. Dans ce dernier cas, si $\mathcal{Z}(H) = 3$, alors $\langle G, j \text{Id}_n \rangle$ contient un sous-groupe de réflexions conjugué à $\mathbf{W}(L_2)$.*
- (iii) *Si H est un sous-groupe de réflexions de G primitif de dimension r , avec $r < n$, alors $|\mathcal{Z}(H)| < 4$.*
- (iv) *Si H est un sous-groupe de réflexions de G primitif de dimension 2, alors H est conjugué à $\mathbf{W}(L_2)$ (i.e. à $(\mu_6 | \mu_2; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$)*
- (v) *Si $G(de, e, r)$ est un sous-groupe de réflexions de G avec $r \geq 2$, alors $de \leq 5$ et $d \leq 3$. En particulier, $d(G) \leq 5$.*
- (vi) *Tout graphe de racines Γ irréductible de dimension 2 et tel que $\mathbf{W}(\Gamma) \subset G$ est équivalent à $I_2(m)$ ($3 \leq m \leq 5$), $B_2(3)$ ou L_2 :*

$$\begin{array}{ccc} \bigcirc & \xrightarrow{-\cos(\pi/m)} & \bigcirc \\ & & I_2(m), \quad (3 \leq m \leq 5) \\ & & \mathbf{W}(I_2(m)) = \mathbf{G}(m, m, 2) = \mathbf{D}_m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{3} & \xrightarrow{-\cos(\pi/4)} & \bigcirc \\ & & B_2(3) \\ & & \mathbf{W}(B_2(3)) = \mathbf{G}(3, 1, 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{3} & \xleftarrow{i3^{-1/2}} & \textcircled{3} \\ & & L_2 \\ & & \mathbf{W}(L_2) = (\mu_6 | \mu_2; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2) \end{array}$$

DÉMONSTRATION: Rappelons que si H est un sous-groupe irréductible de $\mathrm{GL}(V)$ et que $h \in \mathcal{Z}(H)$, alors $v \mapsto h.v$ est un H -morphisme, donc h est scalaire (car \mathbf{C} est algébriquement clos).

Si $g \in G$ a pour valeurs propres distinctes $\{1, \zeta\}$, ζ ne peut pas être une racine de l'unité d'ordre ≥ 6 d'après le Théorème 5.1, sinon g serait dans le centre de G , donc scalaire (on note que la preuve marche ici aussi pour $n = 2$, ce qui explique l'absence de réflexions d'ordres ≥ 6 dans le Tableau 3.1). Ainsi les réflexions dans G sont d'ordres < 6 , et si H est comme dans (ii), et $h \in \mathcal{Z}(H)$, alors $h|_{(V^H)^\perp}$ est scalaire (car H est irréductible), et h a pour uniques valeur propres $\{1, \zeta\}$ (car $r < n$ donc $V^H \neq \{0\}$), avec ζ d'ordre < 6 . D'où comme $\mathcal{Z}(H)$ est cyclique (c'est $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}((V^H)^\perp) \cap H)$), $|\mathcal{Z}(H)| < 6^1$, ce qui prouve la première partie de (ii). Le Tableau 3.1 montre alors que si H est un sous-groupe de réflexions de G primitif de dimension 2, alors H est conjugué à $(\mu_6 | \mu_2 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$, $(\mu_{12} | \mu_4 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$, $(\mu_8 | \mu_4 ; \mathbf{O} | \mathbf{T}_2)$, $(\mu_4 | \mu_2 ; \mathbf{O} | \mathbf{T}_2)$, $\mu_4 \mathbf{O}$ ou $\mu_4 \mathbf{I}$.

Mais puisque $(\mu_8 | \mu_4 ; \mathbf{O} | \mathbf{T}_2)$, $(\mu_4 | \mu_2 ; \mathbf{O} | \mathbf{T}_2)$ et $\mu_4 \mathbf{O}$ contiennent l'élément

$$2^{-1/2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathbf{T}$$

(voir la Remarque 3.1) et $\mu_4 \mathbf{I}$ contient l'élément

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \eta^2 - \eta^4 & \eta^4 - 1 \\ 1 - \eta & \eta^3 - \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{I}$$

chacun de ces quatre groupes contient un élément qui a $\{-j, -j^2\}$ comme valeurs propres. Le Théorème 5.1 montre à nouveau qu'aucun de ces quatre groupes n'est inclus dans G (car $n \geq 3$, donc un élément d'un de ces groupes ne peut être scalaire).

Supposons maintenant que G contient une réflexion s d'ordre ≥ 3 . Soit B l'orbite par G d'une racine de s . Si $(x|y) = 0$ pour tout couple $(x, y) \in B^2$ de vecteurs linéairement indépendants, alors B donne lieu à un système d'imprimitivité de G (en effet, $\{\mathbf{C}b, b \in B\}$ engendre V car G est irréductible (puisque primitif) et est formé de sous-espace vectoriel libres car les vecteurs sont deux à deux orthogonaux). C'est absurde, et donc il existe $x, y \in B$ avec $(x|y) \neq 0$ et $\mathbf{C}x \neq \mathbf{C}y$. Soit H le sous-groupe de G engendré par les réflexions ayant x ou y pour racines. H est irréductible de dimension 2 (si $W = \langle x, y \rangle$, H stabilise W^\perp et x, y sont des racines non orthogonales de H dans W , donc H est irréductible dans W par la Proposition 1.22). De plus il est primitif, car s'il avait pour système d'imprimitivité W_1, W_2 , on aurait par exemple $x \in W_1$ et $y \in W_2$ puisque x et y sont racines d'une réflexion de H d'ordre > 2 (cf. la Proposition 2.4(ii)) mais comme $(x|y) \neq 0$, on contredirait la Proposition 2.4(iv). H est primitif de dimension 2, il est donc conjugué à $(\mu_6 | \mu_2 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$ ou à $(\mu_{12} | \mu_4 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$ par ce qui précède. Mais comme ces deux groupes ne contiennent pas des réflexions d'ordres ≥ 4 , G n'en contient pas non plus.

Si H est un sous-groupe de réflexions de G irréductible de dimension $n - 1$, et

¹ici on ne s'est pas servi que H est un sous-groupe de réflexions de G , la même preuve marche pour n'importe quel sous-groupe irréductible de G

$\mathcal{Z}(H) = m$, il existe $h \in \mathcal{Z}(H)$ tel que (quitte à changer de base),

$$h = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi/m} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{-2i\pi/m} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

et $\langle G, e^{2i\pi/m} \text{Id}_n \rangle$ est un groupe primitif qui contient des réflexions d'ordre m . D'où $m < 4$. Si H est comme dans (iii), on peut supposer que $r > 1$ (on a déjà vu qu'une réflexion est d'ordre < 4). Si H est conjugué à $W(A_r)$, $\mathcal{Z}(H) = 1 < 4$. Si ce n'est pas le cas, on choisit un sous-groupe de réflexions H' de G qui contient H et est irréductible de dimension $r + 1$: un tel groupe existe car G étant irréductible il existe une réflexion s de G qui ne stabilise pas V^H , alors $\langle H, s \rangle$ convient par le Corollaire 1.24. La Lemme 2.10 montre alors que H' est primitif de dimension $r + 1$, on peut appliquer ce que l'on vient de démontrer en remplaçant G par H' pour obtenir $\mathcal{Z}(H) < 4$. On a donc montré (iii).

Comme $\mathcal{Z}((\mu_{12} | \mu_4 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)) = 4$, (iii) montre que ni G , ni $\langle G, j \text{Id}_n \rangle$ ne contiennent ce groupe, ce qui fini la preuve de (i) et de (iv). Si H est comme dans (ii) et $r = n - 1$, $\mathcal{Z}(H) = 3$ alors $\langle G, j \text{Id}_n \rangle$ contient une réflexion d'ordre 3, donc contient $W(L_2)$ par (i), ce qui fini la preuve de (ii).

$G(de, e, n) = G(d, 1, n)$. $G(de, de, n)$ contient des réflexions d'ordres d . Donc s'il est inclus dans G , $d \leq 3$, et dans ce cas G contient (quitte à changer de base) l'élément :

$$\begin{pmatrix} e^{2i\pi/m} & & & \\ & e^{-2i\pi/m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{Id}_{n-2} \end{pmatrix} \in G(m, m, n) \quad \text{où l'on a posé } m = de$$

Si $m \geq 6$, le Théorème 5.1 (avec $\zeta_1 = 1$) montre que cet élément est dans le centre de G , donc est scalaire, c'est absurde, d'où $m < 6$. En particulier, si $d(G) = m$, G contient $W(I_2(m))$ par définition, or $W(I_2(m)) = G(m, m, 2)$, donc $m \leq 5$, ce qui fini de prouver (v).

Si Γ est un graphe de racines irréductible de dimension 2, alors si $W(\Gamma)$ est primitif, Γ est équivalent à $W(L_2)$ par (iii). Sinon $W(\Gamma) = G(de, e, 2)$, avec $de \leq 5$, $d \leq 3$. Or $G(2, 2, 2)$ n'est pas irréductible, $G(4, 2, 2)$ n'est pas généré par 2 réflexions, et $G(2, 1, 2)$ non plus (car il est conjugué à $G(4, 2, 2)$). Il reste donc $G(3, 3, 2)$, $G(4, 4, 2)$, $G(5, 5, 2)$ qui sont représentables par $I_2(m)$ et $G(3, 1, 2)$ qui est représentable par $B_2(3)$, ce qui conclut la preuve de (vi) et donc le corollaire. ■

Remarque 5.3: Le Corollaire 5.2 marche également pour n'importe quel groupe $G \subset U(V)$ d'automorphismes unitaires fini. En effet, on ne se sert nulle part du fait que G est un groupe de réflexions dans la preuve du corollaire, sauf pour prouver (iii). Mais si on considère K le sous-groupe de G engendré par les réflexions de G , il est normal (car le conjugué d'une réflexion est une réflexion), et irréductible de dimension n (on peut aussi le supposer non trivial car sinon $H \subset K$ serait également trivial, et on aurait immédiatement (iii)). Il suffit alors de remplacer K par G dans la preuve de (iii) pour obtenir un groupe de réflexions $H' \supset H$ de dimension $r + 1$ et conclure

de la même manière. Le seul point délicat est de voir que K est bien irréductible dans V , mais G étant primitif, le Théorème de Clifford (Théorème A.1) montre qu'en tant que $\mathbf{C}[K]$ -module, V n'a qu'une seule composante isotypique. Il existe donc un sous-module irréductible W de V tel que $V \simeq W \oplus W \cdots \oplus W$. Mais si $s \in K$ est une réflexion, et que la multiplicité de W dans V est ≥ 2 , il existe un W tel que s agisse trivialement dessus. Comme s agit de la même manière sur tous les W , s agit trivialement sur V , ce qui est absurde. Donc $V = W$ est bien un $\mathbf{C}[K]$ -module irréductible.

On ne se servira pas de cet énoncé plus général, ce qui explique pourquoi on a énoncé le Corollaire 5.2 directement pour un groupe de réflexions.

À partir de maintenant, si on a un graphe de racines $\Gamma = (B, w)$, on notera r_i la réflexion $s_{e_i, w(e_i)}$.

5.3 Cas des groupes contenant une réflexion d'ordre 3

5.3.1 Cas des groupes ne contenant que des réflexions d'ordres 3

Soit G un groupe de réflexions primitif complexe de dimension 3 engendré par des réflexions d'ordres 3, toutes les réflexions de G sont d'ordres 3 par le Lemme 4.28. Si v et w sont des racines de deux réflexions distinctes de G , alors $|(v|w)| \in \{0, 3^{-1/2}\}$. En effet par le Corollaire 5.2(vi), v et w engendrent un graphe équivalent à L_2 et l'Exemple 4.31(ii) et le Lemme 4.28(iii) permettent de conclure. Et G contient $W(L_2)$ (par le Corollaire 5.2(i)) :

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{3} & \xrightarrow{i3^{-1/2}} & \textcircled{3} \\ e_1 & & e_2 \end{array} \quad L_2$$

Comme G est irréductible de dimension 3, il existe une racine unitaire e_3 de G non contenue dans $(\mathbf{C}e_1 + \mathbf{C}e_2) \cup (\mathbf{C}e_1 + \mathbf{C}e_2)^\perp$. Si $(e_3|e_2) = 0$, alors $(e_3|e_1) \neq 0$ et quitte à remplacer e_3 par r_1e_3 , on peut supposer que $(e_3|e_2) \neq 0$. Soit Γ le graphe de racines engendré par e_1, e_2 et e_3 , i.e. $\Gamma = (B, w)$ avec $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $w(B) = \{3\}$.

Proposition 5.4:

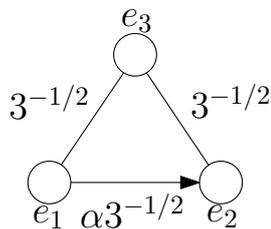
(i) Γ est équivalent à L_3 :

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{3} & & \textcircled{3} & & \textcircled{3} \\ e_1 & \xleftarrow{i3^{-1/2}} & e_2 & \xrightarrow{i3^{-1/2}} & e_3 \end{array} \quad L_3$$

(ii) G est conjugué à $W(L_3)$:

DÉMONSTRATION:

- (i) Si Γ est sans cycles, Γ est clairement congruent à L_3 par la discussion qui précède la proposition. Si Γ est un triangle, alors Γ est de la forme (à congruence près) :



où $\alpha \in \mathbf{U}$.

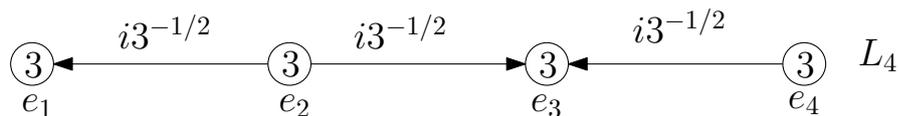
Si $(r_3^l e_1 | e_2) = 0$ pour un $l = 1, 2$, alors Γ est équivalent au graphe de racines engendré par $r_3^l e_1, e_2, e_3$, mais ce dernier n'a pas de cycles (cf. le Lemme 4.13 qui marche évidemment si au lieu de remplacer b par $r_a b$, on remplace b par $r_a^k b$ du moment que k est premier avec $w(a)$ et l'Exemple 4.14), mais ce dernier graphe est sans cycles donc on revient au cas précédent. Sinon $(r_3^l e_1 | e_2) = 3^{-1/2}$ pour $l = 1, 2$ d'après la discussion qui précède la proposition, soit encore $|\alpha - 3^{-1/2}(1 - j^l)| = 1$ pour $l = 1, 2$ ce qui est absurde.

- (ii) Comme G contient le $W(L_3)$, le système de racines associé à G contient le système de racines associé à L_3 . Or ce dernier n'ayant pas d'extension propre (Théorème 4.37(ii)), et puisque $d(G) = d(L_3) = -\infty$, ces deux systèmes de racines sont égaux et $G = W(L_3)$. ■

Soit G un groupe de réflexions primitif complexe de dimension 4 engendré par des réflexions d'ordres 3.

Proposition 5.5:

- (i) Il existe un graphe de racines Γ équivalent à L_4 tel que $W(\Gamma) \subset G$:

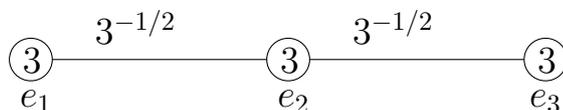


- (ii) G est conjugué à $W(L_4)$:

- (iii) Il n'existe pas de groupe de réflexions primitif complexe de dimension ≥ 5 engendré par des réflexions d'ordres 3.

DÉMONSTRATION:

- (i) Si v et w sont des racines de deux réflexions distinctes de G , alors $|(v | w)| \in \{0, 3^{-1/2}\}$ par le même raisonnement que précédemment. De plus G contient $W(L_2)$ que l'on peut étendre en un graphe de racines irréductible de dimension 3 qui engendre un sous-groupe G' de G . Comme $W(L_2)$ est primitif, le Lemme 2.10 nous dit que G' est primitif, donc on peut appliquer la Proposition 5.4. Ainsi G contient $W(L_3)$, or L_3 est congru au graphe Γ_0 suivant :

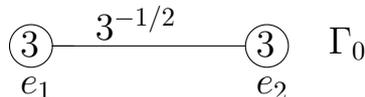


Comme G est primitif, il existe une racine e_4 de G tel que le graphe engendré par e_1, e_2, e_3, e_4 soit irréductible. Si seul $(e_1 | e_4) \neq 0$, ou seul $(e_3 | e_4) \neq 0$, alors on tombe bien sur un graphe équivalent (et même congru) à L_4 . Si $(e_2 | e_4) = 0$ mais $(e_1 | e_4) \neq 0$ et $(e_3 | e_4) \neq 0$, on se trouve dans la même situation que dans la preuve de la Proposition 5.4(i), et l'on sait qu'il existe $l \in \{1, 2\}$ tel que $(e_1 | r_3^l e_4) = 0$ ce qui nous ramène au cas précédent. Si $(e_2 | e_4) \neq 0$, alors encore une fois on peut supposer que $(e_1 | e_4) = 0$ quitte à remplacer e_4 par $r_2^l e_4$. De plus dans ce cas $(e_3 | e_4) \neq 0$ sinon on aurait $\det((e_i | e_j)) = 0$, ce qui contredirait le Lemme 4.6. Encore une fois on obtient un graphe congru à L_4 en remplaçant e_4 par $r_3^l e_4$.

- (ii) On applique (i) et le Théorème 4.37(ii).
- (iii) Si G est un groupe primitif complexe de dimension ≥ 5 engendré par des réflexions d'ordres 3, le même raisonnement qu'en (i) montre qu'il existe un sous-groupe de réflexions G' de G primitif et de dimension 4. (ii) nous donne alors que G est conjugué à $W(L_4)$, mais $|\mathcal{Z}(W(L_4))| = 6$, ce qui contredit le Corollaire 5.2(ii). ■

5.3.2 Cas des groupes contenant des réflexions d'ordres 3 et 2

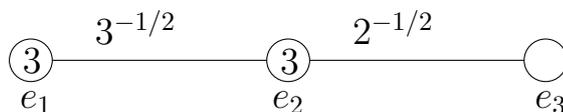
Soit G un groupe de réflexions complexe primitif de dimension 3 contenant des réflexions d'ordres 2 ainsi que d'ordres 3. Comme on l'a vu dans la section 5.3.1, par le Corollaire 5.2(i) G contient le sous-groupe $W(\Gamma_0)$ où Γ_0 est le graphe (congru à L_2) suivant :



Le Corollaire 5.2(vi) montre que si v est une racine unitaire d'ordre 2 et w une racine unitaire d'ordre 3, ils engendrent un graphe de racines équivalent à $B_2(3)$ et la Proposition 2.4(v) donne alors $|(v | w)| \in \{0, 2^{-1/2}\}$. Il existe une racine unitaire e_3 d'ordre 2 non orthogonale à e_1 et e_2 (en effet, si $g \in G$, g envoie une racine d'ordre k de G sur une racine de même ordre, donc si toutes les racines d'ordres 2 de G étaient orthogonales à e_1 et e_2 , elles engendreraient un sous-espace stable par G). Quitte à permuter e_1 et e_2 , on peut supposer que $(e_2 | e_3) \neq 0$. Soit Γ le graphe engendré par e_1, e_2, e_3 .

Proposition 5.6:

- (i) Γ est équivalent à M_3 , où M_3 est congru au graphe suivant :

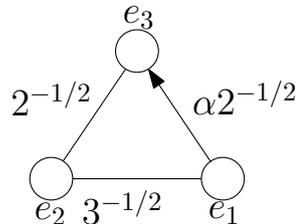


- (ii) G est conjugué à $W(M_3)$:

(iii) Si H est un groupe de réflexions primitif de dimension $n > 3$, H ne contient pas un sous-groupe de réflexions conjugué à $W(M_3)$. En particulier, H ne contient pas à la fois de réflexions d'ordres 2 et 3.

DÉMONSTRATION:

(i) Si $(e_1 | e_3) = 0$, Γ est bien congru à M_3 . Sinon Γ est congru au graphe suivant :



Et comme dans la preuve de la Proposition 5.4(i) on se ramène au cas précédent si $(r_2^l e_1 | e_3) \neq 0$ pour un $l \in \{1, 2\}$, ce qui est le cas car sinon on a $|(r_2^j e_1 | e_3)| = 2^{-1/2}$ pour $l = 1, 2$ ce qui est absurde.

- (ii) On applique le Théorème 4.37(ii), puisque $d(G) = d(M_3) = -\infty$ (en effet G est de dimension 3 et contient déjà deux racines libres d'ordres 3, e_1 et e_2 , donc ne peut contenir deux racines libres d'ordres 2).
- (iii) Si G est un groupe primitif complexe de dimension ≥ 3 , il ne peut contenir $W(M_3)$ car $|\mathcal{Z}(W(M_3))| = 6$ (Corollaire 5.2(ii)).

Or si G contient à la fois des réflexions d'ordres 2 et 3, le même raisonnement qu'avant la proposition nous montre qu'il contient $W(L_2)$ et qu'on peut étendre L_2 en un graphe Γ irréductible en ajoutant une réflexion d'ordre 2, tel que $G' = W(\Gamma)$ soit un sous-groupe de G . Mais G' est primitif par le Lemme 2.10, de dimension 3, donc par (ii) G' est $W(M_3)$, mais on vient de voir que ce n'est pas possible. ■

On note que le Corollaire 5.2(i), la Proposition 5.5(iii) et la Proposition 5.6(iii) montrent que l'on a classifié tous les groupes de réflexions primitifs de rang > 3 contenant une réflexion d'ordre > 2 .

5.4 Cas des groupes ne contenant que des réflexions d'ordres 2

(On s'intéresse ici aux groupes de réflexions complexes primitifs, vu que l'on connaît déjà tous les groupes de réflexions réels primitifs.)

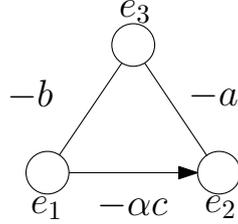
La méthode employée dans cette section est exactement la même que dans la section précédente. Soit G un groupe de réflexions complexe engendré par des réflexions d'ordres 2. On part d'un triangle complexe donné par le Théorème 4.20, et on l'étend en un graphe de racines primitif complexe en se servant du Corollaire 4.21, de la Proposition 2.12 ou du Lemme 4.19(i) conjugué au Lemme 2.10. On obtient ainsi un sous-groupe primitif complexe G' de G de dimension inférieure à celle de G , avec $d(G') = d(G)$. En supposant que l'on a déjà effectué la classification pour les groupes de dimension inférieure à celle de G , on obtient ainsi que G contient l'un

des graphes de racines Γ_0 donné dans la Section 4.4. On étend Γ_0 en un graphe de racines irréductible Γ de même dimension que celle de G (en se servant à nouveau Lemme 4.19(i)), et il ne nous reste plus qu'à montrer que Γ est équivalent à l'un des graphes de racines donné dans la Section 4.4 pour conclure que $G = W(\Gamma)$ (ou $G = EW(\Gamma)$ si $\Gamma = N_4$) grâce au Théorème 4.37(ii).

Le plus difficile est donc de montrer que Γ est bien l'un des graphes de racines de la Section 4.4. Pour cela on se sert évidemment du Lemme 4.13 pour aplatir le plus possible Γ (i.e. enlever le plus de cycles possibles). On fait ensuite du cas par cas en fonction des triangles complexes ou réels qui restent grâce au Lemme 5.7.

Comme annoncé dans l'introduction, ceci n'est pas la partie la plus intéressante de la preuve, et donc une fois énoncé le Lemme 5.7 on donnera juste un exemple pour montrer comment l'utiliser, et pour les cas restants, on renverra à [Coh76].

Lemme 5.7: *Soit Γ un triangle complexe formé d'éléments de valuations 2 et $G = W(\Gamma)$. Notons $m = d(G) = d(\Gamma)$ (par le Corollaire 4.30). Quitte à prendre un graphe congruent, on peut supposer que Γ est de la forme :*



avec $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{R}$, $c = \cos(\pi/m)$. On note $p = |(r_1 e_2 | e_3)|$, $q = |(r_2 e_1 | e_3)|$ et $r = |(r_3 e_1 | e_2)|$. Alors on a

$$p, q, r, a, b, c \in \{|\cos(\pi k/l)|, k \in \mathbf{Z}, 1 \leq l \leq m\} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 + 4b^2c^2 + 4 \operatorname{Re}(\alpha)abc \\ q^2 &= b^2 + 4a^2c^2 + 4 \operatorname{Re}(\alpha)abc \\ r^2 &= c^2 + 4a^2b^2 + 4 \operatorname{Re}(\alpha)abc \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (a^2 - b^2)(1 - 4c^2) \\ p^2 - r^2 &= (a^2 - c^2)(1 - 4b^2) \\ q^2 - r^2 &= (b^2 - c^2)(1 - 4a^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha)abc > 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} p^2 + a^2 &< 1 + (1 - 2b^2)(1 - 2c^2) \\ q^2 + b^2 &< 1 + (1 - 2a^2)(1 - 2c^2) \\ r^2 + c^2 &< 1 + (1 - 2a^2)(1 - 2b^2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$pqr \neq 0 \quad (5.6)$$

Si Γ est un triangle réel, Γ est de la même forme que précédemment, mais cette fois $\alpha \in \{-1, 1\}$. Alors on a toujours (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5). \diamond

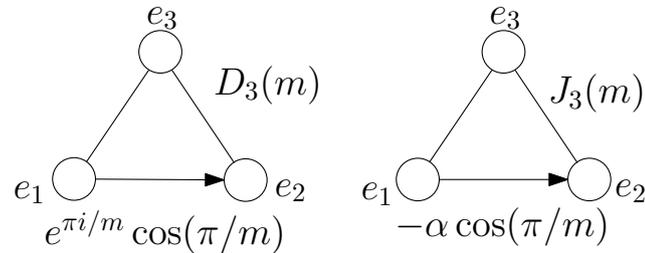
DÉMONSTRATION:

- (5.1) vient de ce que p, q, r, a, b, c sont des produits scalaires de deux racines non linéairement indépendantes et d'ordres 2.
- $p^2 = |(e_2 | r_1 e_3)|^2 = |(e_2 | e_3 + 2be_1)|^2 = a^2 + 4b^2c^2 + 4\operatorname{Re}(\alpha)abc$ d'où (5.2).
- Si on soustrait les équations dans (5.2), on obtient (5.3).
- $\det((e_i | e_j)) > 0$ (Lemme 4.6) donne (5.4).
- (5.4) et (5.2) donnent (5.5).
- Comme α est unitaire non réel pur, $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$, donc $p^2 > (a - 2bc)^2 > 0$ d'où (5.6). ■

Le Lemme 5.7 va nous permettre de déterminer à quoi ressemble le triangle (complexe ou réel) Γ lorsque $m \leq 5$.

Proposition 5.8:

- (i) Si Γ est un triangle complexe comme dans le Lemme 5.7, et que $m = d(\Gamma) \leq 5$, alors Γ est conjugué à $D_3(m)$ ($m \geq 3$) ou à $J_3(m)$ ($m \geq 4$) :

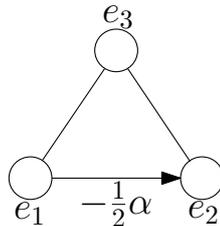


($\alpha = -2^{-3/2}(1 + i\sqrt{7})$ si $m = 4$ et $\alpha = j$ si $m = 5$).

- (ii) Si Γ est un triangle réel comme dans le Lemme 5.7, alors
- si $m \leq 4$: $p, q = 0$ ou $p, r = 0$ ou $q, r = 0$.
 - si $m = 5$: $p = 0$ ou $q = 0$ et il existe $v \in \langle r_1, r_2 \rangle \cdot e_3$ tel que $(v | e_1) = 0$.

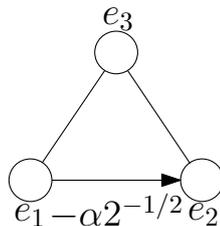
DÉMONSTRATION:

- (i) Si $m = 3$, le Lemme 5.7 nous donne immédiatement que $a = b = c = p = q = r = 1/2$ et $\operatorname{Re}(\alpha) = -1/2$, ainsi Γ est le graphe de racines



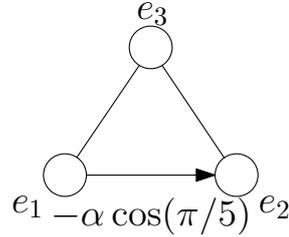
avec $\alpha \in \{j, j^2\}$ donc Γ est équivalent à $D_3(3)$.

Si $m = 4$, une étude au cas par cas en se servant du Lemme 5.7 montre que quitte à remplacer e_3 par un élément de $\langle r_1, r_2 \rangle \cdot e_3$ Γ est équivalent à



Si $p = 1/2$ alors $\operatorname{Re}(\alpha) = -2^{-1/2}$ et Γ est équivalent à $D_3(4)$, sinon $p = 2^{-1/2}$, $\operatorname{Re}(\alpha) = -2^{-3/2}$ et Γ est équivalent à $J_3(4)$.

Si $m = 5$, une étude au cas par cas montre à nouveau que Γ est équivalent à



Si $p = 1/2$ alors $\operatorname{Re}(\alpha) = -\cos(\pi/5)$ et Γ est équivalent à $D_3(5)$. Si $p = 2^{-1/2}$ alors $\operatorname{Re}(\alpha) = -1/2$ et Γ est équivalent à $J_3(5)$. Si $p \in \{\cos(\pi/5), \cos(2\pi/5)\}$, on obtient une contradiction.

(ii) La preuve se fait à nouveau au cas par cas en utilisant le Lemme 5.7. ■

5.4.1 Cas des groupes de dimensions 3

Proposition 5.9:

- (i) Soit G un groupe de réflexions complexe primitif de dimension 3 engendré par des réflexions d'ordres 2, et notons $m = d(G)$. Alors G est conjugué à $W(J_3(m))$.
- (ii) Il n'existe pas de groupes de réflexions irréductibles de dimensions > 3 contenant un sous-groupe de réflexions conjugué à $W(J_3(5))$.

DÉMONSTRATION:

- (i) Le Théorème 4.20 nous donne un triangle complexe Γ comme dans la Proposition 5.8, avec $W(\Gamma) \subset G$. Ce triangle est conjugué à $D_3(m)$ ou $J_3(m)$. Mais si G contient $D_3(m)$, $\langle G, i \operatorname{Id}_3 \rangle$ qui est primitif contient un conjugué de la réflexion

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & i \end{pmatrix}$$

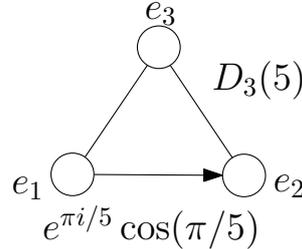
qui est d'ordre 4, ce qui contredit le Corollaire 5.2(i). Donc $G \supset W(J_3(m))$ donc lui est égal par le Théorème 4.37(ii).

- (ii) Si G est un tel groupe, il est primitif par le Lemme 2.10, or $\mathcal{Z}(J_3(5)) = 6$ et le Corollaire 5.2(ii) permet de conclure. ■

Si G est un groupe de réflexions primitif, alors $d(G) \leq 5$ par le Corollaire 5.2(v).

Proposition 5.10: Soit G un groupe de réflexions complexe primitif de dimension $n \geq 3$ engendré par des réflexions d'ordres 2 et tel que $d(G) = 5$. Alors $n = 3$ et G est conjugué à $W(J_3(5))$.

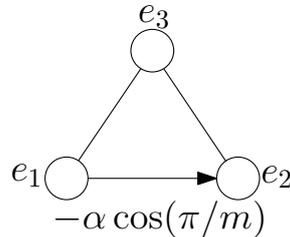
DÉMONSTRATION: Par la Proposition 5.9, il suffit de montrer que G contient un sous-groupe de réflexions complexe G_0 primitif de dimension 3 avec $d(G_0) = 5$. Le Théorème 4.20 nous donne un triangle complexe Γ qui génère un sous-groupe de G et tel que $d(\Gamma) = 5$. Si Γ est primitif, on a gagné, sinon Γ est équivalent à $D_3(5)$:



La Proposition 2.12 nous donne une racine unitaire $e_4 \in G$ telle que e_1, e_2, e_4 engendrent un graphe de racines Γ' primitif. Si Γ' est complexe, on a encore gagné, sinon Γ est réel on utilise la Proposition 5.9(ii) et une étude au cas par cas nous fournit le graphe de racines cherché. ■

5.4.2 Cas des groupes de dimensions 4

Soit G un groupe de réflexions complexe primitif de dimension 4 engendré par des réflexions d'ordres 2. Posons $m = d(G)$, $m \leq 4$ par la Proposition 5.10. Par le Théorème 4.20 et la Proposition 5.8(i) il existe un graphe de racines Γ_0 :

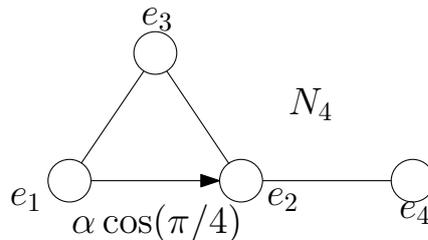


avec $\alpha \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{R}$ et $W(\Gamma_0) \subset G$.

Le Lemme 4.19(i) et le Corollaire 4.21 nous donnent une racine unitaire $e_4 \in G$ telle que le graphe Γ engendré par e_1, e_2, e_3, e_4 est irréductible, et même primitif si $m = 4$.

Proposition 5.11:

(i) $m = 4$ et Γ est équivalent à N_4 :



$$(\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i))$$

(ii) G est conjugué à $W(N_4)$ ou à $EW(N_4)$.

(iii) Il n'existe pas de groupe de réflexions irréductible de dimension ≥ 5 contenant un sous-groupe conjugué à $W(N_4)$ ou $EW(N_4)$.

(iv) Si H est un groupe de réflexions primitif de dimension ≥ 5 , alors $d(H) = 3$.

DÉMONSTRATION:

(i) La Proposition 5.8(i) et la Proposition 5.9 montrent qu'il suffit d'étudier les cas

– $m = 3$, $\Gamma_0 = D_3(3)$.

– $m = 4$, $\Gamma_0 = D_3(4)$ et G ne contient pas de sous-groupe de réflexions complexe primitif de dimension 3.

– $m = 4$, $\Gamma_0 = J_3(4)$.

Une étude détaillée montre alors que dans le premier cas ($m = 3$), G contient un sous-groupe de réflexions conjugué à $W(D_4(3)) = G(3, 3, 4)$. Mais alors $\langle G, j \text{Id}_4 \rangle$ est un groupe primitif qui contient à la fois des réflexions d'ordres 2 et 3, ce qui contredit la Proposition 5.6(iii).

Donc $m = 4$, et une nouvelle étude montre que Γ est équivalent soit à $D_4(4)$, soit à N_4 . La première possibilité étant impossible puisque $D_4(4)$ est imprimitif, Γ est bien équivalent à N_4 .

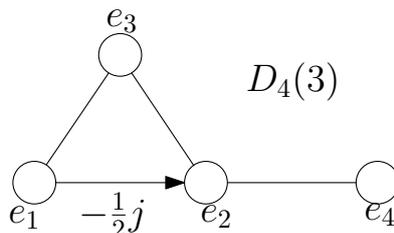
(ii) C'est immédiat par (i) et le Théorème 4.37(ii).

(iii) Si H est un groupe de réflexions irréductible qui contient $EW(N_4)$, il contient $W(N_4)$. Si $H \supset W(N_4)$, comme $W(N_4)$ est primitif, H l'est aussi par le Lemme 2.10, or $\mathcal{Z}(W(N_4)) = 4$ donc cela contredit le Corollaire 5.2(iii).

(iv) Si H est un groupe de réflexions primitif de dimension ≥ 5 , on a vu qu'il ne contient que des réflexions d'ordres 2. Si H est réel, $d(H) = 3$. Si H est complexe, la Proposition 5.10 montre déjà que $d(H) \leq 4$. Si $d(H) = 4$, alors le Corollaire 4.21 nous fournit un sous-groupe de réflexions de H primitif de dimension 4, donc conjugué à $W(N_4)$ ou $EW(N_4)$ par (ii), ce qui contredit (iii). ■

5.4.3 Cas des groupes de dimensions ≥ 5

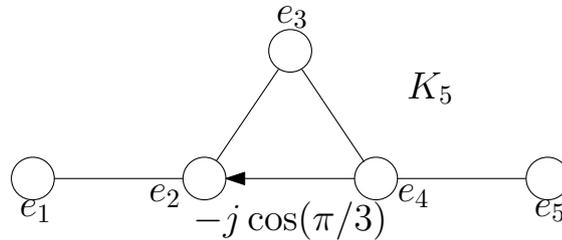
Soit G un groupe de réflexions complexe primitif de dimension 5. On sait que G ne contient que des réflexions d'ordres 2 (cf. la Section 5.3), et que $d(G) = 3$ (Proposition 5.11(iv)). G contient un sous-groupe de réflexions G_0 complexe irréductible de dimension 4 (par le Théorème 4.20 et le Lemme 4.19(i)). G_0 n'est pas primitif par la Proposition 5.11 (ii) et (iii). D'où $G_0 = G(3, 3, 4)$ ($G_0 \neq G(3, 1, 4)$ car G ne contient que des réflexions d'ordres 2), qui est représenté par le graphe de racines $D_4(3)$:



Il existe une racine unitaire e_5 de G telle que e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 engendrent un graphe de racines Γ primitif par la Proposition 2.12.

Proposition 5.12:

(i) Γ est équivalent à K_5 :



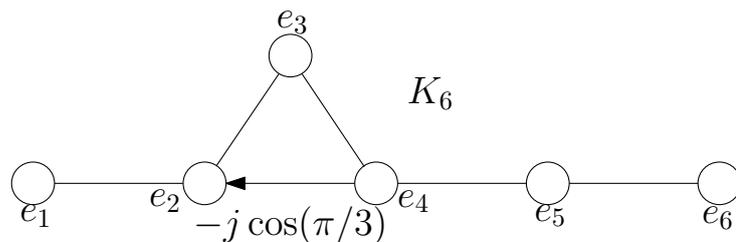
(ii) G est conjugué à $W(K_5)$.

DÉMONSTRATION: Comme d'habitude (i) est une étude au cas par cas et (ii) vient du Théorème 4.37(ii). ■

Soit G un groupe de réflexions complexe primitif de dimension 6. Alors G contient à nouveau que des réflexions d'ordres 2 et $d(G) = 3$. Le Corollaire 4.21 nous fournit un graphe de racines Γ_0 primitif de dimension 5 tel que $W(\Gamma_0) \subset G$. Γ_0 est équivalent à K_5 d'après la Proposition 5.12(ii). Encore une fois, il existe une racine unitaire $e_6 \in G$ telle que Γ et e_6 engendrent un graphe de racines Γ primitif (Lemme 2.10).

Proposition 5.13:

(i) Γ est équivalent à K_6 .



(ii) G est conjugué à $W(K_6)$.

(iii) Il n'existe pas de groupe de réflexions primitif de dimension ≥ 7 .

DÉMONSTRATION: On procède encore une fois comme dans la Proposition 5.12 pour (i) et (ii). Maintenant, si H est primitif de dimension > 6 , G est engendré par des réflexions d'ordres 2 et $d(G) = 3$. Le Corollaire 4.21 montre que H contient $W(K_5)$. On étend K_5 en un graphe de racines de dimension 6, il sera primitif par le Lemme 2.10, donc équivalent à K_6 par (ii). Donc H contient $W(K_6)$, mais $|\mathcal{Z}(W(K_6))| = 6$ et cela contredit le Corollaire 5.2(ii). ■

On a ainsi terminé la classification.

5.5 Récapitulatif des groupes de réflexions irréductibles

On récapitule l'ensemble des groupes de réflexions irréductibles dans le Tableau 5.1. On note qu'il existe deux familles infinies, $W(A_n)$ qui est primitive, et $G(de, e, n)$ qui est imprimitive (en effet, on peut voir C_m comme $G(m, 1, 1)$). On rappelle que l'on pose $m = de$. Les 34 groupes sporadiques restants sont primitifs.

Les groupes réels sont ceux qui ont un degré caractéristique égal à 2, il y a $W(A_n)$, $W(B_n) = G(2, 1, n)$, $W(D_n) = G(2, 2, n)$, $W(H_3)$, $W(F_4)$, $W(H_4)$, $W(E_6)$, $W(E_7)$ et $W(E_8)$.

Ces groupes sont tous engendrés par n réflexions où n est leur dimension (et donc représentables par des graphes de racines) sauf $G(de, e, n)$ lorsque $e \neq 1$ et $d \neq 1$, $EW(N_4)$ et les groupes de dimensions 2 de numéro 7, 11, 12, 13, 15, 19, 22. On rappelle que $G(m, 1, n)$ est représenté par $B_n(m)$, $G(m, m, n)$ est représenté par $D_n(m)$ et que $(\mu_6 | \mu_2 ; \mathbf{T} | \mathbf{D}_2)$ est représenté par L_2 .

N°	Dim.	Groupe	Degrés	Ordre	Ordre du centre
1	n	$W(A_n)$	$2, 3, \dots, n+1$	$(n+1)!$	1
2	n	$G(de, e, n)$	$m, 2m, \dots, (n-1)m, dn$	$dm^{n-1}n!$	$d(e \wedge n)$
3	1	C_m	m	m	m
4	2	$(\mu_6 \mu_2 ; \mathbf{T} \mathbf{D}_2)$	4,6	24	2
5	2	$\mu_6 \mathbf{T}$	6,12	72	6
6	2	$(\mu_{12} \mu_4 ; \mathbf{T} \mathbf{D}_2)$	4,12	48	4
7	2	$\mu_{12} \mathbf{T}$	12,12	144	12
8	2	$(\mu_8 \mu_4 ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	8,12	96	4
9	2	$\mu_8 \mathbf{O}$	8,24	192	8
10	2	$(\mu_{24} \mu_{12} ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	24,12	288	12
11	2	$\mu_{24} \mathbf{O}$	24,24	576	24
12	2	$(\mu_4 \mu_2 ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	6,8	48	2
13	2	$\mu_4 \mathbf{O}$	8,12	96	4
14	2	$(\mu_{12} \mu_6 ; \mathbf{O} \mathbf{T}_2)$	6,24	144	6
15	2	$\mu_{12} \mathbf{O}$	12,24	288	12
16	2	$\mu_{10} \mathbf{I}$	20,30	600	10
17	2	$\mu_{20} \mathbf{I}$	20,60	1200	20
18	2	$\mu_{30} \mathbf{I}$	30,60	1800	30
19	2	$\mu_{60} \mathbf{I}$	60,60	3600	60
20	2	$\mu_6 \mathbf{I}$	12,30	360	6
21	2	$\mu_{12} \mathbf{I}$	12,60	720	12
22	2	$\mu_4 \mathbf{I}$	12,20	240	4
23	3	$W(H_3)$	2, 6, 10	120	2
24	3	$W(J_3(4))$	4, 6, 14	336	2
25	3	$W(L_3)$	6, 9, 12	648	3
26	3	$W(M_3)$	6, 12, 18	1296	6
27	3	$W(J_3(5))$	6, 12, 30	2160	6
28	4	$W(F_4)$	2, 6, 8, 12	1152	2
29	4	$W(N_4)$	4, 8, 12, 20	7680	4
30	4	$W(H_4)$	2, 12, 20, 30	14400	2
31	4	$EW(N_4)$	8, 12, 20, 24	$64.6!$	4
32	4	$W(L_4)$	12, 18, 24, 30	$216.6!$	6
33	5	$W(K_5)$	4, 6, 10, 12, 18	$72.6!$	2
34	6	$W(K_6)$	4, 12, 18, 24, 30, 42	$108.9!$	2
35	6	$W(E_6)$	2, 5, 6, 8, 9, 12	$72.6!$	1
36	7	$W(E_7)$	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	$8.9!$	2
37	8	$W(E_8)$	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30	$192.10!$	2

TAB. 5.1 – Groupes de réflexions irréductibles

Annexe A

Le théorème de Blichfeldt

Nous prouvons ici le Théorème 5.1. Pour cela, nous avons d'abord besoin d'énoncer le théorème de Clifford, qui nous fournira au passage la reformulation de la notion d'imprimitivité énoncée dans la Remarque 2.2. Si G est un groupe, et $x, g \in G$, on utilise la notation habituelle $x^g := gxg^{-1}$.

A.1 Le théorème de Clifford

Théorème A.1 (Théorème de Clifford): *Soit k un corps, G un groupe, V un $k[G]$ -module irréductible et N un sous-groupe normal de G . Soit W un $k[N]$ -sous-module de V . Alors :*

- (i) *Si $W \neq 0$, alors $V = \sum_{g \in G} gW$. Si W est irréductible, chaque gW l'est aussi, ce qui montre que V est complètement réductible (semi-simple) en tant que $k[N]$ -module.*
- (ii) *Soit W_1, \dots, W_m des représentants des classes d'isomorphismes des $k[N]$ -sous-modules irréductibles de V . Soit V_i la somme de tous les $k[N]$ -sous-modules de V isomorphes à W_i . Alors $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$.*
- (iii) *Si $g \in G$, pour tout i il existe j tel que $gV_i = V_j$. G agit comme un groupe de permutation transitif sur $\{V_1, \dots, V_m\}$.*
- (iv) *Si $H_1 = \{g \in G, gV_1 = V_1\}$, alors V_1 est un $k[H_1]$ -module irréductible et $V \simeq \text{Ind}_{H_1}^G V_1 = k[G] \otimes_{k[H_1]} V_1$.*
- (v) *Il existe $e \in \mathbf{N}$ tel que $V \simeq e(W_1 \oplus \dots \oplus W_n)$ (en tant que $k[N]$ -module).*
- (vi) *Si on note χ_i le caractère χ_{W_i} , alors*

$$\chi_V = e(\chi_1 + \dots + \chi_m)$$

et si $W_i = g_i W_1$ ($g_i \in G$), $\chi_i(x) = \chi_1(x^{g_i})$ pour tout $x \in N$.

DÉMONSTRATION:

- (i) $V_0 = \sum_{g \in G} gW$ est stable par G donc est égal à V puisque V est irréductible. Comme N est normal dans G , les gW sont aussi des $k[N]$ -modules (car ce sont des $k[N^g]$ -modules). Si W est irréductible, gW l'est aussi car s'il contenait un sous-module stable W_0 , $g^{-1}W_0$ serait un sous-module stable de W , contradiction. Ainsi V est somme directe de sous-modules irréductibles¹, donc est complètement réductible.
- (ii) $V = V_1 + \dots + V_m$ par (i), il reste à voir que la somme est directe. Mais si L est un sous-module irréductible de V_i , $L \simeq W_i$. En effet, par définition $V_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i$, si l'on note π_j la projection sur le j^{eme} facteur, il existe j_0 tel que $\pi_{j_0}(L) \neq 0$, donc $\pi_{j_0}|_L$ est un isomorphisme de L sur W_i . Comme $V_1 + \dots + V_{i-1}$ est une somme directe (avec multiplicités) de W_j , $j < i$, le même raisonnement nous montre que si $L \cap (V_1 + \dots + V_{i-1}) \neq 0$, L est isomorphe à l'un des W_j , ce qui est absurde car on a vu que $L \simeq W_i$. Donc $V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1}) = 0$, ce qui montre que la somme est bien directe.
- (iii) – $V_i = \sum \{xW_1, x \in G \text{ et } xW_1 \simeq W_i\}$. En effet, si on note $U_i = \sum \{xW_1, x \in G \text{ et } xW_1 \simeq W_i\}$, on a $U_i \subset V_i$ par définition, mais comme $V = U_1 + \dots + U_m$ par (i), $U_i = V_i$.
 – Si U et U' sont deux $k[N]$ -sous-modules de V , et $U \simeq U'$, alors $gU \simeq gU'$ pour tout $g \in G$. En effet, soit $\varphi : U \rightarrow U'$ un isomorphisme, $\varphi^g : gU \rightarrow gU'$ est une bijection linéaire, il reste à vérifier qu'il commute avec l'action de N . Mais si $x \in U : (g\varphi g^{-1})(n.gx) = g\varphi((g^{-1}ng).x) = g(g^{-1}ng)\varphi(x) = n.(g\varphi g^{-1})(gx)$.

On en déduit que $gV_i \subset V_j$ si $gW_i \simeq W_j$. Si l'inclusion est stricte, $V_i \subsetneq g^{-1}V_j$ mais comme $g^{-1}V_j \simeq W_i$, $g^{-1}V_j \subset V_i$ et l'on obtient une contradiction. G agit bien sur $\{V_1, \dots, V_m\}$, et l'action est transitive car V est irréductible en tant que $k[G]$ -module.

- (iv) (On note que (iii) montre que $H_1 = g \in G, gW_1 \simeq W_1$). Soit $x_j \in G$ tel que $x_j V_1 = V_j$, de tels x_j existent par (iii). On vérifie immédiatement que les classes à gauche de H_1 dans G sont $x_1 H_1, \dots, x_m H_1$, en particulier $m = [G : H_1]$.

Ainsi, $k[G] \otimes_{k[H_1]} V_1 = (x_1 \otimes V_1) \oplus \dots \oplus (x_m \otimes V_1)$. Si $v = x_i \otimes v_1 \in k[G] \otimes_{k[H_1]} V_1$ est un tenseur pur, et $g \in G$, on rappelle que l'action de g sur v est définie comme suit :

$$g.x_i \otimes v_1 = x_j \otimes hv_1 \quad \text{si } gx_i = x_j h$$

On définit $\varphi : x_1.V_1 \oplus \dots \oplus x_m.V_1 \rightarrow x_1 \otimes V_1 \oplus \dots \oplus x_m \otimes V_1$ par

$$\varphi : \sum x_i.u_i \mapsto \sum x_i \otimes u_i$$

si $g \in G$ est tel que $gx_i = x_j h$, alors $g(x_i.u_i) = x_j.hu_i$ et $g(x_i \otimes u_i) = x_j \otimes hu_i$, donc φ est bien un isomorphisme. Ceci montre que V_1 est irréductible comme $k[H_1]$ -module, car s'il avait un sous-module non trivial V'_1 , $\text{Ind}_{H_1}^G V'_1$ serait un $k[G]$ -sous-module non-trivial de V .

¹On rappelle que si W est un sous-module irréductible et U un sous-module de V , alors si $W \cap U \neq 0$, $W \subset U$ (considérer le sous-module engendré par un élément de $W \cap U$), donc en procédant par induction on peut bien obtenir une somme directe, non canonique, de modules irréductibles

- (v) $W_i = x_i W_1$ et $V_i = x_i V_1$, donc $\dim W_i = \dim W_1$, $\dim V_i = \dim V_1$ pour tout i .
Il suffit alors de poser $e = \dim V_1 / \dim W_1$.
- (vi) Immédiat par (v). ■

Remarque A.2: Le Théorème A.1(iii) montre que V est imprimitif si $V_1 \neq V$. De plus $N \subset \{g \in G, gV_i = V_i \ (\forall 1 \leq i \leq m)\}$.

Réciproquement, si V est un $k[G]$ -module irréductible tel que V admet un système d'imprimitivité $\{V_1, \dots, V_m\}$, posons $H = \{g \in G, gV_1 = V_1\}$ et $N = \{g \in G, gV_i = V_i \ (\forall 1 \leq i \leq m)\}$. Alors $N = \bigcap_{g \in G} H^g$ est distingué dans H et dans G . De plus la même preuve que celle du Théorème A.1(iii) montre que $V \simeq \text{Ind}_H^G V_1$ et que V_1 est un $k[H]$ -module irréductible.

A.2 Les groupes linéaires primitifs finis

Soit V un \mathbf{C} -ev de dimension n et $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe linéaire primitif fini. On suppose que l'on a choisi une forme hermitienne définie positive telle que $G \subset \text{U}(V)$.

Définition A.3 (phases d'une matrice unitaire): Si S est une matrice unitaire de $M_n(\mathbf{C})$, et que les valeurs propres distinctes de S sont $\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m}\}$, alors les angles $\theta_1, \dots, \theta_m$ sont appelés les phases de S .

Lemme A.4: Soit $S, T \in \text{U}_n(\mathbf{C})$ des matrices unitaires. On suppose de plus que S est diagonale, et que les phases de S sont sur un arc de cercle du cercle unité de longueur $< \pi$. Soit $U = T^{-1}ST$, et notons $S = (\alpha_i \delta_i^j)$, $T = (a_{ij})$ et $U = (b_{ij})$. Alors

- (i) $b_{ii} \neq 0$ (pour tout $1 \leq i \leq n$)
- (ii) Si b_{jj} est une racine de l'unité, et que i, l sont tels que $a_{ij} \neq 0, a_{lj} \neq 0$, alors $\alpha_i = \alpha_l$.

DÉMONSTRATION:

- (i) $T^{-1} = (\overline{a_{ji}})$, d'où

$$b_{ij} = \sum_{k,l} \overline{a_{ki}} \alpha_k \delta_k^l a_{lj} = \sum_k \overline{a_{ki}} a_{kj} \alpha_k$$

En particulier

$$b_{ii} = \sum_k |a_{ki}|^2 \alpha_k$$

Or comme T est unitaire, $\sum_k |a_{ki}|^2 = 1$. Comme les α_k sont du même côté du cercle unité, on a bien $b_{ii} \neq 0$.

- (ii) Les deux équations

$$b_{jj} = \sum_k |a_{kj}|^2 \alpha_k, \quad 1 = \sum_k |a_{kj}|^2$$

et le cas d'égalité dans Cauchy-Schwartz montrent que $|b_{jj}| = 1$ si et seulement si les α_k sont égaux pour tout k tel que $a_{kj} \neq 0$. ■

Théorème A.5 (Blichfeldt): *On choisit une base de V , ce qui permet d'identifier G à un sous groupe de $U_n(\mathbf{C})$. Soit $s \in G$ une matrice diagonale de phases $\theta_1, \dots, \theta_m$ telles que $|\theta_i - \theta_1| \leq \pi/3$ ($\forall 1 \leq i \leq m$). Alors $s \in \mathcal{Z}(G)$.*

DÉMONSTRATION: On note $\alpha_j = e^{i\theta_j}$. Quitte à conjuguer G par une matrice de permutation, on peut supposer que $s = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_m)$, et on note k la multiplicité de la valeur propre α_1 dans s .

On dit qu'une matrice $n \times n$ est k -réduite si elle est de la forme :

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où C est une matrice $k \times k$ et D une matrice $(n - k) \times (n - k)$. Si (a_{ij}) est une matrice unitaire, on définit $f((a_{ij})) := |a_{11} + \dots + a_{kk}|$. Soit

$$S = \{g^{-1}sg, g \in G \text{ et } g^{-1}sg \text{ n'est pas } k\text{-réduite}\}$$

Si $S \neq \emptyset$, prenons $t_0 \in S$ tel que $f(t_0)$ soit maximal. Alors

$$t_0^{-1}st_0 \notin S \tag{A.1}$$

En effet, si on pose $s = (\gamma_i \delta_i^j)$ (ainsi $\gamma_1 = \dots = \gamma_k = \alpha_1, \gamma_{k+1} = \alpha_2, \dots$), $t_0 = (a_{ij})$ et $t_0^{-1}st_0 = (b_{ij})$ on a

$$b_{jj} = \sum_l |a_{lj}|^2 \gamma_l$$

De plus $1 = \sum_l |a_{lj}|^2 = \sum_l |a_{jl}|^2$ car t_0 est unitaire. En particulier, si $|a_{kk}| = 1$, les (a_{kl}) et les (a_{lk}) sont nuls pour tout $1 \leq k \leq n$. Comme t_0 n'est pas k -réduite, il existe $r_0 \in \{1, \dots, k\}$ tel que $|a_{r_0 r_0}| < 1$. De plus si on pose $\beta_l = e^{-i\theta_1} \gamma_l$ et que $\beta_l = \cos \varphi_l + i \sin \varphi_l$, par hypothèse $\varphi_l \leq \pi/3$ d'où $\cos \varphi_l \geq 1/2$ (et $\cos \varphi_l = 1$ si $1 \leq l \leq k$). On a :

$$\begin{aligned} f(t_0^{-1}st_0) &= |b_{11} + \dots + b_{kk}| = \left| \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^n |a_{jr}|^2 \gamma_j \right| = \left| \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^n |a_{jr}|^2 \beta_j \right| \\ &\geq \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^n |a_{jr}|^2 \cos \varphi_j \geq \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^k |a_{jr}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n |a_{jr}|^2 \right) \\ &= \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^k |a_{jr}|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^k |a_{jr}|^2 \right) \right) = \sum_{r=1}^k \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^k |a_{jr}|^2 \right) \right) \\ &\geq \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} (1 + |a_{rr}|^2) > \sum_{r=1}^k |a_{rr}| \geq |a_{11} + \dots + a_{kk}| = f(t_0) \end{aligned}$$

où l'inégalité stricte vient du fait que $\frac{1}{2}(1 + x^2) \geq x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. Ce qui prouve bien (A.1).

$$S = \emptyset, \text{ autrement dit tous les conjugués de } s \text{ dans } G \text{ sont } k\text{-réduits} \tag{A.2}$$

Sinon, on prend t_0 comme dans (A.1), on sait alors que $t_0^{-1}st_0$ est k -réduite. Il existe une matrice $k \times k$ unitaire U telle que

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}^{-1} t_0^{-1}st_0 \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

où D est une matrice $k \times k$ diagonale. On remarque que conjuguer G par $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$ ne change pas s (puisque s agit comme un scalaire sur les k premiers éléments de la base), de plus pour tout $g \in G$, si la décomposition en blocs de g est $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & F \end{pmatrix}$ avec A une matrice $k \times k$, alors

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1}AU & U^{-1}B \\ CU & F \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice est k -réduite si et seulement si g l'est. Donc on peut conjuguer G par $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$, puisque cela ne change pas S .

Ainsi on s'est ramené au cas $t_0^{-1}st_0 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, où $D = (\tau_i \delta_i^j)_{1 \leq i, j \leq k}$ et les τ_i sont des racines de l'unité puisque $t_0^{-1}st_0$ est unitaire. De plus t_0 étant un conjugué de s , le Lemme A.4(i) montre que $a_{ii} \neq 0$. Soit $i \leq k$ et $l > k$, alors $\gamma_i \neq \gamma_j$ et le Lemme A.4(ii) (avec $j = i$) montre que $a_{li} = 0$. Ainsi t_0 est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où 0 est une matrice $(n - k) \times k$. Mais t_0 étant unitaire, on a :

$$\text{Id} = \begin{pmatrix} t_{\bar{A}} & 0 \\ t_{\bar{B}} & t_{\bar{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{\bar{A}}A & t_{\bar{A}}B \\ t_{\bar{B}}A & t_{\bar{B}}B + t_{\bar{D}}D \end{pmatrix}$$

ce qui force $B = 0$. Ainsi t_0 est k -réduit, ce qui contredit le choix de t_0 et montre (A.2).

Si l'on note G_0 le sous-groupe normal de G engendré par les conjugués de s , (A.2) montre que G_0 est réductible, et même complètement réductible par le Théorème A.1(i). De plus G étant primitif, le Théorème A.1(iii) montre que V n'a qu'une composante isotypique. Mais on a construit un $\mathbf{C}[G_0]$ -module de dimension k sur lequel s agit comme un scalaire. Il existe donc un sous-module irréductible W sur lequel s agit comme un scalaire, par ce qui précède $V \simeq W \oplus \cdots \oplus W$ donc s agit comme un scalaire sur tout V . On a bien $s \in \mathcal{Z}(G)$. ■

Remarque A.6: Soit k un corps algébriquement clos, V un k -ev de dimension n et $G \subset \text{GL}(V)$ un groupe linéaire primitif fini. La même méthode qu'à la fin de la preuve du Théorème A.5 montre plus généralement que si A un sous-groupe abélien et normal de G , alors A est cyclique et $A \subset \mathcal{Z}(G)$.

En effet, par le Théorème A.1, et comme G est primitif, $V = V_1$ (avec les notations du théorème). Ainsi $V \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_1$ où W_1 est un $k[A]$ -module irréductible. Comme l'action de A dans V est fidèle, c'est également le cas pour son action sur W_1 . Comme W_1 est irréductible, et que k est algébriquement clos, $\text{End}_{k[A]}(W_1) = k \text{Id}_{W_1}$.

Comme A est abélien, $A \subset \text{End}_{k[A]}(W_1)$, donc A agit par des matrices scalaires sur W_1 , d'où $\dim W_1 = 1$ vu que W_1 est irréductible. A agit aussi par matrices scalaires sur V , donc $A \subset \mathcal{Z}(G)$ et est cyclique car $\mathcal{Z}(G)$ l'est (on rappelle que si $G \subset \text{GL}(V)$ est irréductible, $\mathcal{Z}(G) = k \text{Id} \cap G$ est un sous-groupe de k , donc cyclique si G est fini).

Bibliographie

- [Bec06] V. Beck. *TD du cours de Master 2 : Autour des groupes de réflexions.*, 2006. (<http://www.math.jussieu.fr/~beck/>).
- [BMR98] M. Broué, G. Malle, and R. Rouquier. Complex reflection groups. *J. reine angew. Math*, 500 :127–190, 1998.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4-5-6*. Hermann, 1968.
- [Bro00] M. Broué. Reflection groups, braid groups, hecke algebra, finite reductive groups. *Current Developments in Mathematics*, Current Developments in Mathematics :1–107, 2000.
- [Coh76] A. M. Cohen. Finite complex reflection groups. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 9 :379–436, 1976.
- [GAP06] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, 2006. (<http://www.gap-system.org>).
- [Mic04] J. Michel. *Groupes finis de réflexion, cours de troisième cycle*, 2004. (<http://www.math.jussieu.fr/~jmichel/cours2004.pdf>).
- [Spr74] T. A. Springer. Regular elements of finite reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 25 :159–198, 1974.
- [ST54] G. C. Shephard and J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 6 :274–304, 1954.
- [Ste74] R. Steinberg. Regular elements of finite reflection groups. *Invent. Math.*, 112 :392–400, 1974.