Fiche Synoptique

Introduction :

Utilités des corps p-adiques en théorie des nombres. Or en Mathématiques il emporte de bien visualiser les structures sur lesquelles on travaille. (Ex : R représenté par une droite…). Malheureusement la métrique p-adique est une ultra-métrique qui défie l'intuition (Tout triangle est isocèle, tout point d'un disque est centre de ce disque).

Le but du TIPE est donc de trouver un moyen de représenter les corps p-adiques.

1) Définition des corps p-adiques :

a) Formalisation :

Soit $z \in \mathrm{Z}$ et p un nombre premier. Alors on définit val_p(z) comme suit :

$$val\_p(z) = \max\{n \in \mathrm{N}, p^n | z\}$$

Soit $\frac{u}{v} \in Q$ tel que u/v soit une fraction irréductible. Alors :

$$val\_p\left(\frac{u}{v}\right) = val\_p(u) - val\_p(v)$$

Enfin on pose $val\_p(0) = \infty$

On vérifie facilement qu'on a défini une valuation de Q :

$$val\_p(xy) = val\_p(x) + val\_p(y)$$

$$val\_p(x+y) \geq \inf[val\_p(x), val\_p(y)]$$

On définit alors une norme comme suit :

$$|x| = \frac{1}{p^{val\_p(x)}}$$

Cette norme est non archimédienne car $|x+y| \leq \sup(|x|,|y|)$

On complète alors Q par cette norme pour obtenir le cops p-adique Q_p

b) Quelques définitions :

La boule unité de Q, la boule unité Zp de Qp

2) Première méthode de représentation :

Représentation décimale :

Tout nombre de Zp peut s'écrire comme une série $x = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i * p^i$

Cette représentation permet d'effectuer les opérations élémentaires : addition, multiplication…

On donne un exemple d'application de la recherche de la racine d'un polynôme à coefficients dans Zp moyennant une solution modulo p mais sans citer le lemme de Hensel.

3) Deuxième méthode de représentation :

Représentation au moyen d'arbre.

On commence par représenter les entiers (à chaque valuation positive, on associe un nœud de l'arbre), l'arbre entier permettant de représenter Zp.

On étend cette représentation à Qp en rajoutant les valuations négatives (ce qui fait que l'arbre n'a pas de racines).

On ne cite pas Cp dans cette partie.

La distance entre deux éléments de l'arbre est la hauteur du plus petit sous-arbre qui les contient. On utilise alors cette représentation pour comprendre les propriétés ultra-métriques de Qp.

Conclusion :

Utilité et généralité de la représentation avec des arbres, qui peut s'appliquer à tout corps valué. Comparaison entre la méthode habituelle de représentation avec des décimales. Applications informatiques…

Bibliographie :

- Les nombres premiers (Jean Itard)
- Pictures of Ultrametric Spaces, the p-adic Numbers, and Valued Fields, American Monthly Mathematic (Jan E. Hally)
- P-adic Numbers, P-adic Analysis and Zeta-Functions (Neal Koblitz)
- P-adic Numbers (Fernando Q. Gouvêa)
- Modern Computer Algebra (von zur Gathen and Gerhard)

Sur Internet:

_*Chronomath, faq.maths.free.fr...*

➔ Bases des corps p-adiques...

_Topologie p-adique sur les mots, Analyse p-adique et suites classiques de nombres, Mémoire de Magistère de Lionel Fourquaux : une introduction aux fonctions zêtas et aux fonctions L p-adiques.

➔ Applications de ces corps…