Définitions :

Une valuation de Q :

$val\_p(z) = \max\{n \in \mathbf{N}, p^n | z\}$

$val\_p\left(\frac{u}{v}\right) = val\_p(u) - val\_p(v)$

$val\_p(0) = \infty$

On a les propriétés suivantes :

On peut associer une norme à cette valuation :

$$|x|_p = \frac{1}{p^{val\_p(x)}}$$

Une propriété intéressante :

$|x+y|_p \leq \sup(|x|_p, |y|_p)$

On dit que cette norme est non Archimédienne et que la métrique qui en découle est ultra-métrique.

C'est cette propriété qui rend Qp intéressant :facilité de l'analyse mais difficulté de la visualisation.

On complète alors Q par cette norme pour obtenir le cops p-adique Q_p. On étend la norme à Q_p de la manière habituelle.

Soit an une suite tendant vers a, alors la norme de a est la limite des normes de an

Exemples :

$val\_3(45) = val\_3(3^2 * 5) = 2$

$|45|_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

La distance de deux nombres x et y est $|x-y|_p$

Plus leur différence est divisible par p, plus ils sont proches l'un de l'autres.

Ainsi en 3-adique :

$|47-2|_3 = \frac{1}{9}$ tandis que $\left|2-\frac{4}{3}\right|_3 = \frac{1}{3^{-1}} = 3$

Dans la métrique 3-addique 47 est beaucoup plus proche de 2 que 4/3 !

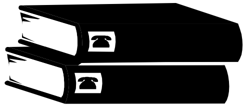
Mieux encore, « $p^\infty = 0$ » tandis que « $\frac{1}{p^\infty} = \infty$ »

Dans Q, la boule unité est l'ensemble des x tels que $|x|_p \leq 1$

C'est donc l'ensemble des x tels que $val\_p(x) \geq 0$

En particulier, Z en fait partie.

C'est l'anneau des p-entiers.



Représentation « décimale » :

On appelle entier p-adique les nombres appartenant à la boule unité dans Q_p . On note Z_p l'ensemble des entiers p-adiques.
C'est l'anneau de valuation.

Soit x un entier p-adique. Il s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i * p^i$ avec $\forall i \ 0 \le a_i \le p-1$

Si $x \in Q_p$ avec $val\_p(x) = n < 0$ alors $p^n * x \in Z_p$

Alors $x = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i * p^i$

On note alors $x = a_{-n} \dots a_{-1}.a_0 a_1 \dots$

Exemples :

Si $x \in N$ alors sa représentation « décimale » est le miroir de sa représentation en base p.
Par exemple en 2-adique, $6 = \overline{1}\,\overline{1}\,\overline{0}^2 = 0.011$

On constate que ça respecte notre intuition : plus un nombre est petit, plus il y a de 0 dans sa représentation décimale.

On a $(p-1)+(p-1)*p+(p-1)*p^2+\ldots=(p-1)*\frac{1-p^{\infty}}{1-p}=-1$

Donc en 2-adique $-1 = 1+2+2^2+2^3+\ldots = 0.1111\ldots$

Pour représenter un nombre négatif, il suffit de trouver celui de –x et faire une multiplication par -1

Cette représentation permet d'effectuer simplement les opérations élémentaires.
Sauf que la représentation étant inversée, il faut commencer par la gauche, c'est pourquoi il vaut mieux revenir à la définition

Par exemple en 3-adique,
$\frac{24}{17} = \frac{2*3+2*9}{2+2*3+1*9} = 1*3+1*3^3+2*3^5+1*3^7+1*3^8+2*3^9\ldots$
Soit $\frac{24}{17} = \frac{0.022}{0.221} = 0.0101020112\ldots$

Mais toute la puissance de cette notation vient qu'on peut facilement calculer une valeur approchée de la racine d'un polynôme.

Par exemple en 7-adique, pour résoudre l'équation $X^2 = 2$,
on pose $X = a_0 + a_1 * 7 + a_2 * 7^2 \ldots$

On a $X^2 \equiv 2[7] \Rightarrow a_0^2 \equiv 2[7] \Rightarrow a_0 = 3$ ou $a_0 = 4$
Si on prend $a_0 = 3$:
$X^2 \equiv 2[7^2] \Rightarrow (a_0 + a_1 * 7)^2 \equiv 2[7^2] \Rightarrow 9 + 42 * a_1 \equiv 2[7^2]$

$$\Rightarrow 1+6*a_1 \equiv 0[7] \Rightarrow a_1 = 1$$

On itère et on trouve $x_1 = 3+1*7+2*49+6*343... = 0.3126...$

Si on avait pris $a_0 = 4$ on aurait trouvé $x_2 = 0.4540... = -x_1$

Cela est tout à fait général et résulte du lemme de Hensel

Utilité des corps p-adiques :

- Légitime certaines opérations :

Pour résoudre l'équation X=1+3X on pose $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1+3x_n \end{cases}$

On obtient $x_n = 1+3+3^2+...+3^n$

Soit $x = \dfrac{1}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$

- Seuls complétés de Q avec R (théorème d'Ostrowski)

Théorème de Minkowski-Hasse sur les formes quadratiques à coefficients rationnels.

Une forme quadratique représente 0 dans Q ssi elle représente 0 dans R et dans tout corps p-adique

- Facilité de l'analyse :

_Les séries de nombre p-adiques tendent convergent ssi leur terme général tend vers 0

Norme(An-Am)<=Sup(Norme(An-An-1),Norme(An-1-An-2)…

_ Z_p est compact

On prend la sous-séquence infinie qui a le même premier chiffre, la sous-séquence de celle-ci qui a le même second chiffre… Puis on prend la diagonale

Lemme de Hensel :

Soit P(x) un polynôme dont les coefficients sont des entiers p-adiques et $a_0 \in Z_p$ tel que $P(a_0) \equiv 0[p]$ alors $\exists a \in Z_p, P(a) = 0 \ et \ a \equiv a_0[p]$

On construit une suite (a_n) tendant vers a de la manière suivante : $\forall n \ a_n - a_{n-1} = b_n p^n \equiv -\dfrac{P(a_{n-1})}{P'(a_{n-1})}[p^{n+1}]$

C'est la méthode de Newton appliquée aux corps p-adiques, sauf qu'elle fonctionne toujours.

- Z_p a un unique idéal maximal (ie :un unique nombre premier)

  Simplifie la théorie des nombres.

- Utilité tant en analyse qu'en théorie des nombres dès qu'on veut raisonner modulo un nombre premier.
  Interpolation p-adique de zêta, démonstration de l'irrationalité de zêta(3)

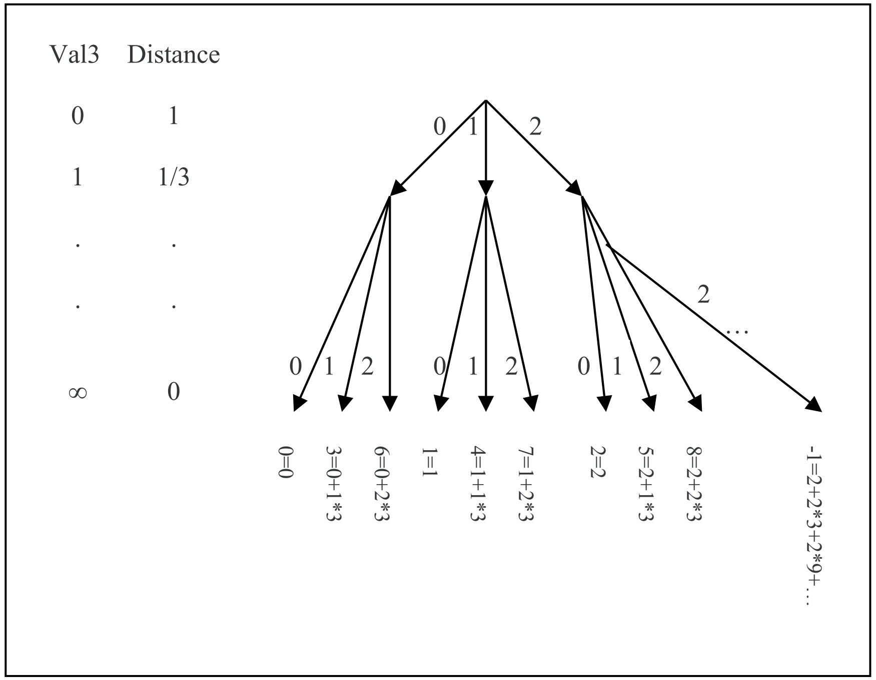
Par exemple :

Supposons $n^{\frac{1}{a}} = \frac{u}{v}$. Alors pour tout nombre premier p, $val\_p(n) = a * val\_p\left(\frac{u}{v}\right)$. Donc $n = \prod p^{a*val\_p\left(\frac{u}{v}\right)}$. $n^{\frac{1}{a}} \in N$.

Représentation au moyen d'arbres :

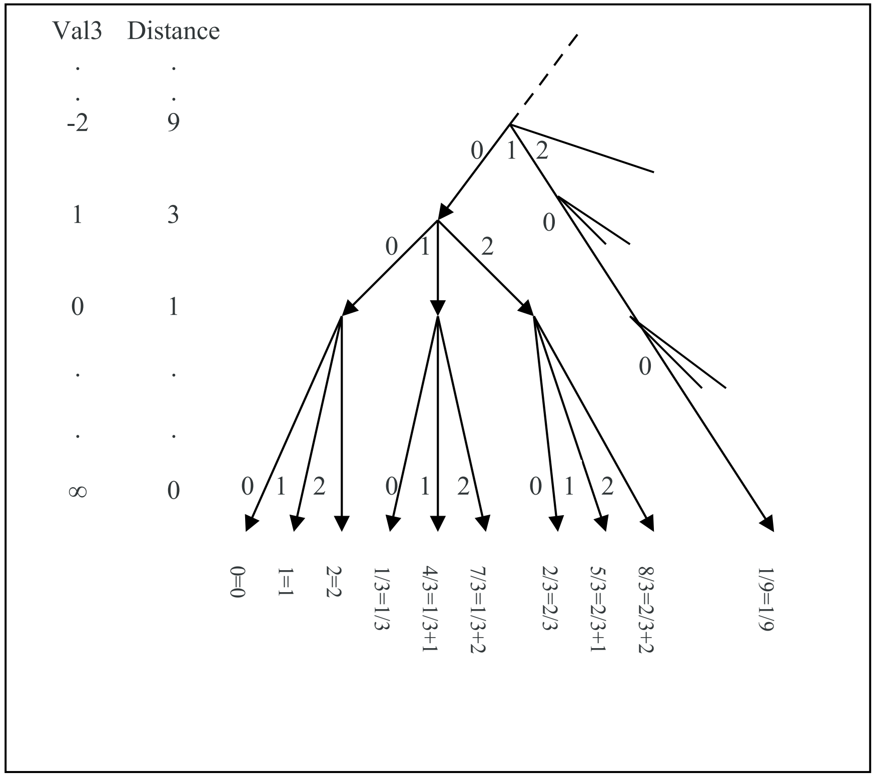
Exemple d'espace ultra-métrique : l'ordre des animaux où les espèces sont plus ou moins proches si elles appartiennent au même genre, à la même classe…

Nous prendrons l'exemple du corps 3-adique, et nous commencerons par représenter les entiers : à chaque valuation possible 0, 1, 2… correspond la distance 1, 1/3, 1/9…



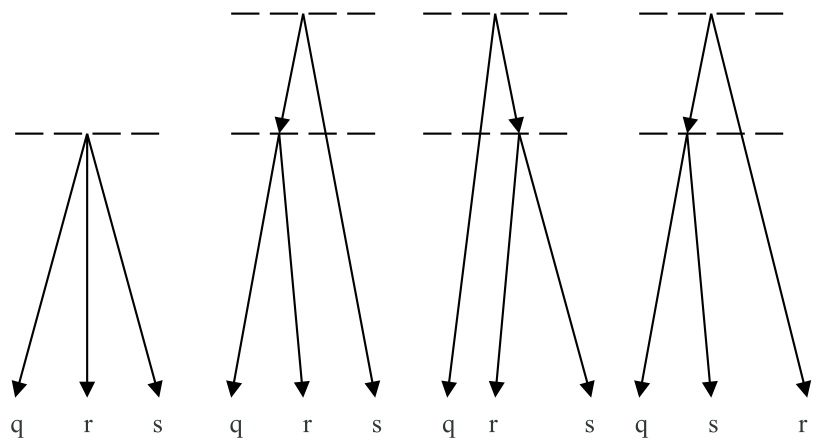
A l'infini, toute branche de l'arbre représente un entier 3-adique.

On fait de même pour représenter le corps 3-adique, mais cette fois-ci la valuation n'est pas toujours positive, et donc l'arbre n'a pas de racine.

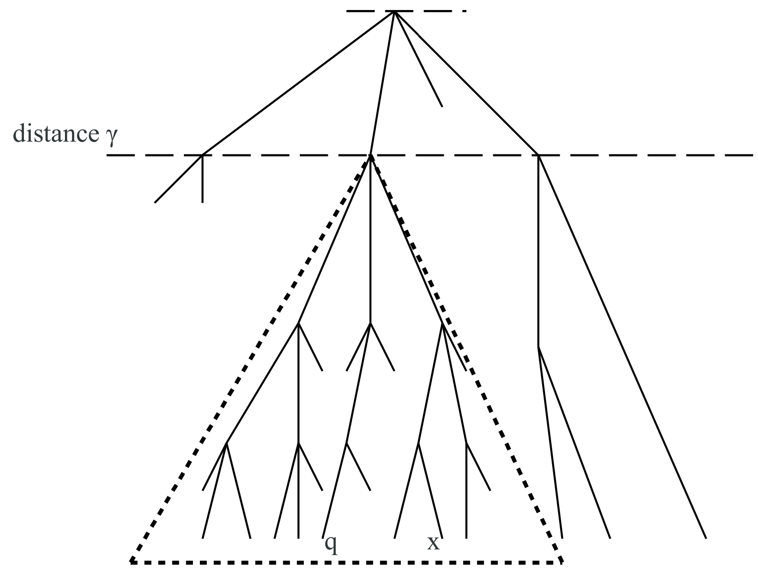


Propriétés ultra-métriques :

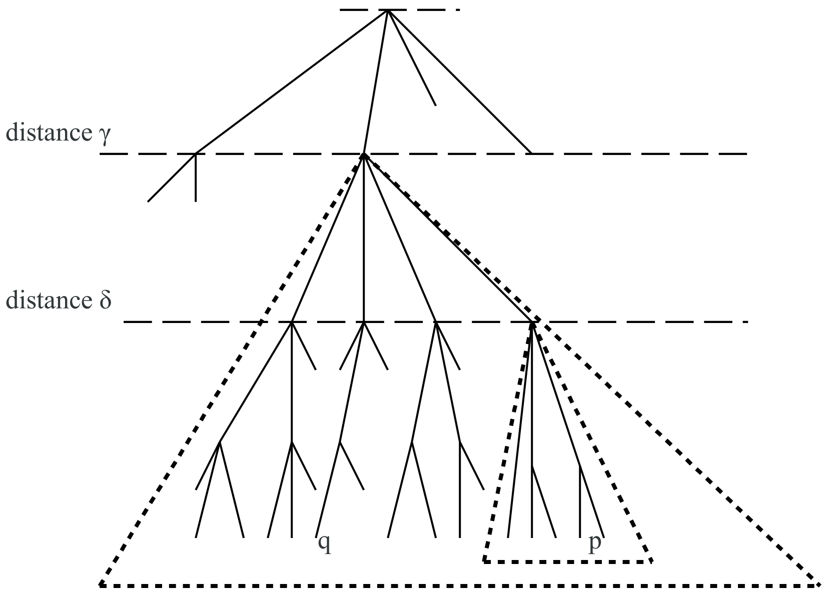
Tout triangle est isocèle :



Tout point d'un disque est centre de ce disque :



Deux disques s'intersectent ssi l'un des disques est contenu dans l'autre :

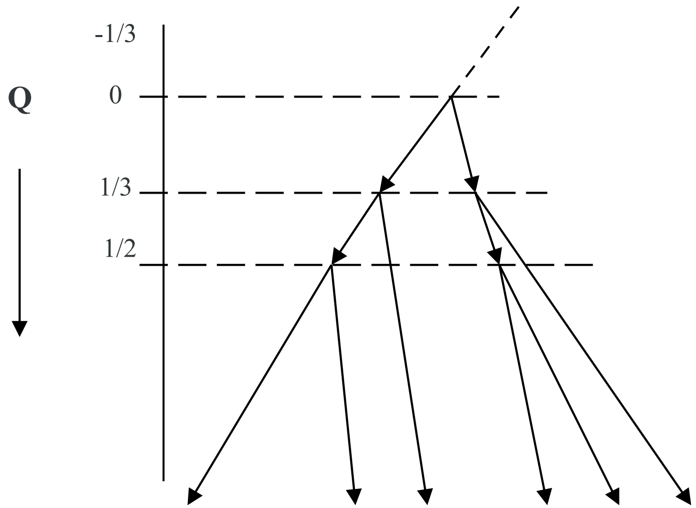


Représentation de C_p :

On note C_p le complété de la clôture algébrique $\overline{Q}_p$ de Q_p .

$\forall x \in Q \ p^x \in C_p$ et on étend la norme $|\ |_p$ de Q_p à $\overline{Q}_p$ de la manière suivante :
Soit α dont le polynôme canonique irréductible est $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ alors on a $val\_p(\alpha) = \dfrac{val\_p(a_n)}{n}$ et $|\alpha|_p = |a_n|_p^{1/n} = \dfrac{1}{p^{val\_p(\alpha)}}$.

Le groupe des valeurs de la valuation est alors Q et chaque nœud de l'arbre est à hauteur d'un élément de Q.


-1/3
Q
0
1/3
1/2

Introduction :

Le but de ce TIPE est de montré comment une structure qui nous paraît abstraite de prime abord, ardue ; peut devenir familière si on trouve le moyen de représentation adéquat.

Nous nous baserons sur les corps p-adique, pour différente raison : d'abord parce que la méthode que nous développons peut s'étendre facilement à tout autre corps valué, ensuite parce que la définition de ces corps est relativement basique et fait appel à des notions intéressantes (définition d'une autre valeur absolue sur Q) et enfin parce que les nombres p-adiques sont très utiles tant en analyse qu'en théorie des nombres (à ce titre, ils se situent à la frontière des 2).

Les corps p-adiques :

Crées par Hensel, par analogie avec les fractions de C, l'idée est d'étudier le comportement local d'un nombre au voisinage d'un nombre premier…

…

Le fait que Qp soit le complété de Q ne nous permet pas encore de travailler concrètement dessus.

Représentation décimale :

Nous recherchons une méthode qui nous permettrait d'effectuer les représentations de base dans Qp

…

Si cette représentation est cohérente du point de vue de la distance, elle ne nous permet pas de visualiser les propriétés ultramétrique de Qp

Représentation par arbre :

Une structure ultramétrique basique.

…

Nous allons maintenant présenter quelques particularités de cet espace ultramétrique.

Conclusion :

Nous avons vu comment une structure qui nous paraissait abstraite de prime abord peut se révèler appréhendable si on trouve la représentation adéquate.

Cela tient en la nature du mathématicien, il ne fonctionne pas comme l'ordinateur qui teste toutes les possibilités mais par intuition et pour cela à besoin de visualiser les structures sur lesquelles il travaille.

Enfin, la représentation sous forme d'arbre est très utile et peut se généraliser à tout corps valué. Cela nous donne deux grandes structures : les espaces euclidiens (R,R2,…) et les espaces ultramétrique.