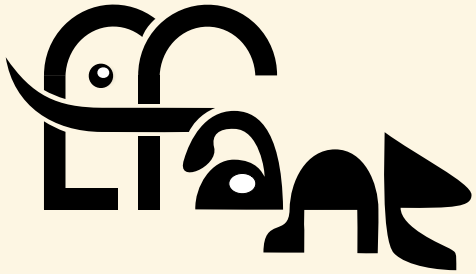
À quoi sert la cryptologie ? — Petit panorama des mathématiques de la cryptologie

2017/06/06 — Inria Alkindi, Bordeaux

Damien Robert

Équipe LFANT, Inria Bordeaux Sud-Ouest



Cryptologie à clé publique

Cryptologie :

- Chiffrement ;
- Authenticité ;
- Intégrité.

La cryptologie à clé publique est basée sur une fonction à sens unique (avec trappe)
$\Rightarrow$ chiffrement asymétrique, signatures, preuves sans connaissances...

Applications :

- Militaires ;
- Vie privée ;
- Communications (internet, téléphones...)
- Commerce électronique...

Contexte Historique

- Riche histoire ; chiffrement de messages depuis l'antiquité au moins ;
- Principale application auparavant militaire ;
- Dorénavant la cryptologie joue un rôle essentiel pour garantir la sécurité des communications ;
- Cryptanalyse : déchiffrement d'Énigma par le groupe Ultra (Secret) à Blentchey Park lors de la seconde guerre mondiale ;
- À la fin de la guerre, vente des machines Énigma capturées par les alliés à d'autres pays.

Contexte actuel

- http://en.wikipedia.org/wiki/PRISM_(surveillance_program) :
  « The Prism program collects stored Internet communications based on demands made to Internet companies » (Microsoft, Yahoo !, Google, Facebook, Paltalk, YouTube, AOL, Skype, Apple…)
- En sus de ce programme d'espionnage, utilisation de virus extrêmement sophistiqués, capables de s'infiltrer dans le firmware des disques durs : Stuxnet, Flame, Equation Group.
- Officiellement pour lutter contre le terrorisme ;
- Mais aussi utilisé pour l'espionnage économique :
  http://www.theguardian.com/world/2013/jun/09/edward-snowden-nsa-whistleblower-surveillance
- Les États-Unis ne sont pas les seuls à avoir des systèmes de surveillance...
  http://www.theguardian.com/world/2013/jul/04/france-electronic-spying-operation-nsa

⇒ L'utilisation de la cryptographie est un enjeu de souveraineté nationale !

Quelle cryptographie ?

- Tout système ad-hoc, non basé sur des standards a été cassé (DECSS, GSM, WEP...)
- Utiliser un standard suffit-il ?

Standards :

- ANSSI (Agence nationale de la sécurité des systèmes d'information)
- NIST (National Institute of Standards and Technology)
- IETF CFRG workgroup (Crypto Forum Research Group).

Quelle cryptographie ?

http://blog.cryptographyengineering.com/2013/09/on-nsa.html

Matthew Green — « The NSA has been :

- Tampering with national standards (NIST is specifically mentioned) to promote weak, or otherwise vulnerable cryptography.
- Influencing standards committees to weaken protocols.
- Working with hardware and software vendors to weaken encryption and random number generators.
- Attacking the encryption used by “the next generation of 4G phones”.
- Obtaining cleartext access to “a major internet peer-to-peer voice and text communications system”
- Identifying and cracking vulnerable keys.
- Establishing a Human Intelligence division to infiltrate the global telecommunications industry.
- decrypting SSL connections.

»

Quelle cryptographie ?

- Tout système ad-hoc, non basé sur des standards a été cassé (DECSS, GSM, WEP...)
- Utiliser un standard suffit-il ?

Standards :

- ANSSI (Agence nationale de la sécurité des systèmes d'information)
- NIST (National Institute of Standards and Technology)
- IETF CFRG workgroup (Crypto Forum Research Group).

⇒ On a besoin d'une cryptographie issue de la recherche publique, conduite par des experts universitaires, en lien avec le milieu économique local.

But de la présentation : expliquer les concepts clés de la cryptologie, plutôt que de donner des « boîtes à outils » toutes prêtes.

Protocoles cryptographiques

- Briques de base (primitives), s'appuyant sur des objets mathématiques
- Ces primitives sont combinées pour former des algorithmes/modes opératoires (algorithme de chiffrement, algorithme de signature)
- Ces modes opératoires sont combinés pour former des protocoles (protocole de session TLS, protocole de vote)
- Ces protocoles sont implémentés en logiciel ou matériel
- Puis ils sont utilisés.

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \mapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \; G(r) \| r \; H(m_i \; G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : De RSA à un algorithme de chiffrement

- RSA permet de chiffrer un message m d'une certaine taille k : $m \mapsto E(m)$;
- Comment chiffrer un message de longueur arbitraire ?
- Idée naturelle : découper m en messages $m_1 \| m_2 \ldots \| m_d$ de taille k, et poser $E(m) = E(m_1) \| E(m_2) \ldots \| E(m_d)$;
- Problème : RSA est malléable. $E(m \times m') = E(m) \times E(m')$.

$\Rightarrow$ A partir de plusieurs chiffrés on peut en produire plein d'autres ;

- La solution est de chiffrer les blocs m_i avec du padding : $E(m_i \; G(r) \| r \; H(m_i \; G(r))$ où r est aléatoire et H et G sont deux fonctions de hachage (on a une preuve de sécurité).

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Example : intégrité et chiffrement

- Comment combiner les deux briques de base que sont le chiffrement (Encrypt) et l'intégrité (MAC Message Authentification Code) ;
- Encrypt then MAC ?
- MAC then Encrypt ?
- Encrypt + Mac ?

Attaques

- Attaques sur les briques de base (très rare) ;
- Attaques sur l'empilement des briques en algorithmes ou protocoles ;
- Attaques sur l'implémentation ;
- Attaques sur l'exécution.

Sécurité

- Briques de base : repose sur des problèmes mathématiques bien identifiés et très étudiés (difficulté de la factorisation, logarithme discret dans les courbes elliptiques)
- Preuves de sécurité sur les algorithmes et protocoles : si un attaquant peut attaquer le protocole (avec une certaine probabilité p en temps T), alors il peut attaquer une brique de base (avec une certaine probabilité p' en temps T')

Sécurité ?

- Erreur dans les preuves
- Preuves justes mais modèle incorrect
- Modèle correct mais utilisé dans un autre contexte
- Réductions de sécurités inefficaces
- Bugs dans les programmes
- Attaques physiques (par canaux cachés) : mesure des impulsions électromagnétiques, du bruit, du temps de calcul, des cache miss

Attaques sur TLS

SSL (Secure Sockets Layer) / TLS (Transport Layer Security)

- Protocole : Renegociation attack / Version rollback attack
- BEAST (attaque sur le mode Cipher Block Chaining)
- CRIME and BREACH (attaque sur la compression)
- Downgrade attack : FREAK (export grade cryptography), Logjam (gros précalculs)
- Bugs : Heartbleed (buffer overflow), BERserk, goto fail
- Certificats mal formés

Mitiger la perte des clés privées : perfect foward secrecy via un échange de clés éphémères par Diffie-Hellman .

Sécurité !

Preuves formelles

- Des protocoles
- Des implémentations
- Des compilateurs (voir « Reflections on Trusting Trust » de Ken Thomson)
- Du matériel

Implémentation

- En temps constant ;
- Sans branches ;
- Faites par des experts (librairies opensource comme NaCl)

Ne jamais concevoir son propre système cryptographique ad hoc ou sa propre implémentation à moins d'être un expert.

Aléa

- Générer une clé nécessite de l'aléa de qualité
- Aléa matériel ou pseudo-aléa logiciel
- Modèle d'entropie et extracteur d'aléa
- Un aléa de faible qualité peut complètement compromettre un système. (Par exemple si l'aléa dans le système de chiffrement El-Gamal a ses premiers bits prédictables alors la système est cassé)
- Playstation (aléa constant), Clés ssh Debian (aléa = date)
- Instruction RDRAND : instruction Intel retournant un nombre aléatoire grâce à un générateur d'aléa matériel
- Theodore Ts'o : « I am so glad I resisted pressure from Intel engineers to let /dev/random rely only on the RDRAND instruction. To quote from the article below: 'By this year, the Sigint Enabling Project had found ways inside some of the encryption chips that scramble information for businesses and governments, either by working with chipmakers to insert back doors....' Relying solely on the hardware random number generator which is using an implementation sealed inside a chip which is impossible to audit is a BAD idea. »

Aléa

- Générer une clé nécessite de l'aléa de qualité
- Aléa matériel ou pseudo-aléa logiciel
- Modèle d'entropie et extracteur d'aléa
- Un aléa de faible qualité peut complètement compromettre un système. (Par exemple si l'aléa dans le système de chiffrement El-Gamal a ses premiers bits prédictables alors la système est cassé)
- Playstation (aléa constant), Clés ssh Debian (aléa = date)
- Instruction RDRAND : instruction Intel retournant un nombre aléatoire grâce à un générateur d'aléa matériel
- Theodore Ts'o : « I am so glad I resisted pressure from Intel engineers to let /dev/random rely only on the RDRAND instruction. To quote from the article below: 'By this year, the Sigint Enabling Project had found ways inside some of the encryption chips that scramble information for businesses and governments, either by working with chipmakers to insert back doors....' Relying solely on the hardware random number generator which is using an implementation sealed inside a chip which is impossible to audit is a BAD idea. »

Aléa

- Générer une clé nécessite de l'aléa de qualité
- Aléa matériel ou pseudo-aléa logiciel
- Modèle d'entropie et extracteur d'aléa
- Un aléa de faible qualité peut complètement compromettre un système. (Par exemple si l'aléa dans le système de chiffrement El-Gamal a ses premiers bits prédictables alors la système est cassé)
- Playstation (aléa constant), Clés ssh Debian (aléa = date)
- Instruction RDRAND : instruction Intel retournant un nombre aléatoire grâce à un générateur d'aléa matériel
- Theodore Ts'o : « I am so glad I resisted pressure from Intel engineers to let /dev/random rely only on the RDRAND instruction. To quote from the article below: 'By this year, the Sigint Enabling Project had found ways inside some of the encryption chips that scramble information for businesses and governments, either by working with chipmakers to insert back doors....' Relying solely on the hardware random number generator which is using an implementation sealed inside a chip which is impossible to audit is a BAD idea. »

Authentification

La cryptographie (à clé publique) permet de transformer un canal publique un canal authentifié et confidentiel, à partir d'un premier échange authentifié. Comment authentifier ce premier échange ?

- Certificats (TLS)
- Web of trust (GPG)
- Trust on first use (SSH)

Applications cryptographiques : Bitcoin

- Monnaie électronique décentralisée
- Fichier de transaction public (blockchain)
- Signature des transactions par une courbe elliptique
- La vérification de la blockchain (et validation des nouvelles transactions) fabrique de nouveaux bitcoins.

Applications cryptographiques : Vote électronique Belenios

- Confidentialité du vote (partage de secret)
- Résultats corrects (preuves Zero-Knowledge)
- Validation (et confidentialité) de la liste des électeurs

Résumé : importance de la cryptographie

- Chiffrement (pli confidentiel)
- Identification (badge cantine, carte à puce, empreinte digitale)
- Intégrité (clé RIB, scellés)
- Signature (ordre de virement) : identification, intégrité, non-répudiation
- Vie privée, anonymat, argent électronique, vote électronique, certificats, calcul distribué, stockage distribué...

Applications : Développement des cartes à puces, commerce électronique, téléphonie mobile, armement, intérieur, sécurité des logiciels, sécurité des réseaux, objets interconnectés, ransomware...

Chiffrement

Alice (Sophie Germain) 

veut écrire

à Bob (Carl Friedrich Gauss)

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice 

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

Alice

m=QUARTIQUE

clé secrète de chiffrement $K = +3$

$c = f_K(m)$

c =TXDUWLTXH est envoyé

à Bob

c =TXDUWLTXH

clé secrète de déchiffrement $K' = -K = -3$

$m = f_K{}^{(-1)}(c) = f_{K'}(c)$

Chiffrement à clé secrète

- Trois étapes : création et distribution de clés, chiffrement, déchiffrement
- Boîte mail, consultation de compte en banque, ...
- Avantages : simple, rapide, bien connu
- Fragilités : attaques statistiques, gestion de clés
- Le chiffrement de Vernam (One Time Pad) est inconditionnellement sûr, quelle que soit la puissance de calcul de l'adversaire ;
- Notion de théorie de l'information (Shannon) ;
- Très compliqué et coûteux à mettre en place correctement.

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$

Chiffrement à clé publique

Alice 
veut envoyer m à Bob.

Elle trouve la clé publique de chiffrement K_{Bob}^{pub} dans l'annuaire.

Elle calcule $c = f_{K_{Bob}^{pub}}(m)$

c est envoyé

à Bob 

c

qui utilise sa clé secrète de déchiffrement K_{Bob}^{sec}

$$m = f_{K_{Bob}^{pub}}{}^{(-1)}(c) = g_{K_{Bob}^{sec}}(c)$$

Chiffrement à clé publique

- Trois étapes : création et publication de clés, chiffrement, déchiffrement
- Avantages : gestion de clé simplifiée, solidité mathématique
- Fragilités : plus lent, plus compliqué à implémenter

En pratique on combine les deux chiffrements : clé publique pour échanger une clé de session (secrète) qui servira à chiffrer à la volée.

Comment faire ?

- Situations asymétriques : l'un saît l'autre pas.
- Celui qui connaît le secret a un avantage (il peut déchiffrer, il peut se prouver).
- Mesurer cet avantage : théorie de la complexité algorithmique.
- S'appuyer sur des problèmes difficiles.

La thèse de Turing-Church

Alan Turing

Alonzo Church

Tests de primalité

Savoir si un entier P est premier.

Pierre de Fermat

Agrawal, Kayal et Saxena

$$T = n^{6+\epsilon(n)}$$

où n est le nombre de chiffres décimaux de P.

Factorisation

Théorème fondamental de l'arithmétique.

Euclide

Carl Friedrich Gauss

$N = \prod_{1 \leq i \leq I} p_i^{e_i}$.

Factorisation

Hendrik Lenstra

Brigitte Vallée

Factoriser un entier N prend un temps $T = \exp(\sqrt{n})$ où n est le nombre de chiffres décimaux de n.

Asymétrie

$$(p,q) \rightarrow N = pq$$

$$(p,q) \leftarrow N = pq$$

Asymétrie

- En décembre 2009, Thorsten Kleinjung et une dizaine de collègues ont factorisé un nombre de 232 décimales.
- *The sieving, which was done on many hundreds of machines, took almost two years.*
- Calculer le produit de deux nombres de 116 décimales prend 8 millionièmes de secondes sur mon ordinateur portable.

Protocole RSA

Rivest, Shamir et Adleman

Protocole RSA

- Soit $N = pq$ un produit de deux grands nombres premiers ;
- Soit e premier à $\phi(N) = (p-1)(q-1)$ et d l'inverse de e modulo $\phi(N)$;
- Chiffrement : $x \mapsto x^e \mod N$;
- Déchiffrement : $x \mapsto x^d \mod N$;

Théorème (Petit théorème de Fermat)

$x^{\#(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} = 1 \mod N.$

Identification par mot de passe

Alice 
mot de passe d'Alice BELOTE

BELOTE est envoyé


à Bob
mot de passe de Bob REBELOTE

REBELOTE est envoyé à Alice

Identification par mot de passe

- Alice et Bob doivent convenir d'un mot de passe secret partagé (question secrète)
- Avantage : simple
- Fragilités : risque de réutilisation e.g. par un tiers, gestion de mots de passe

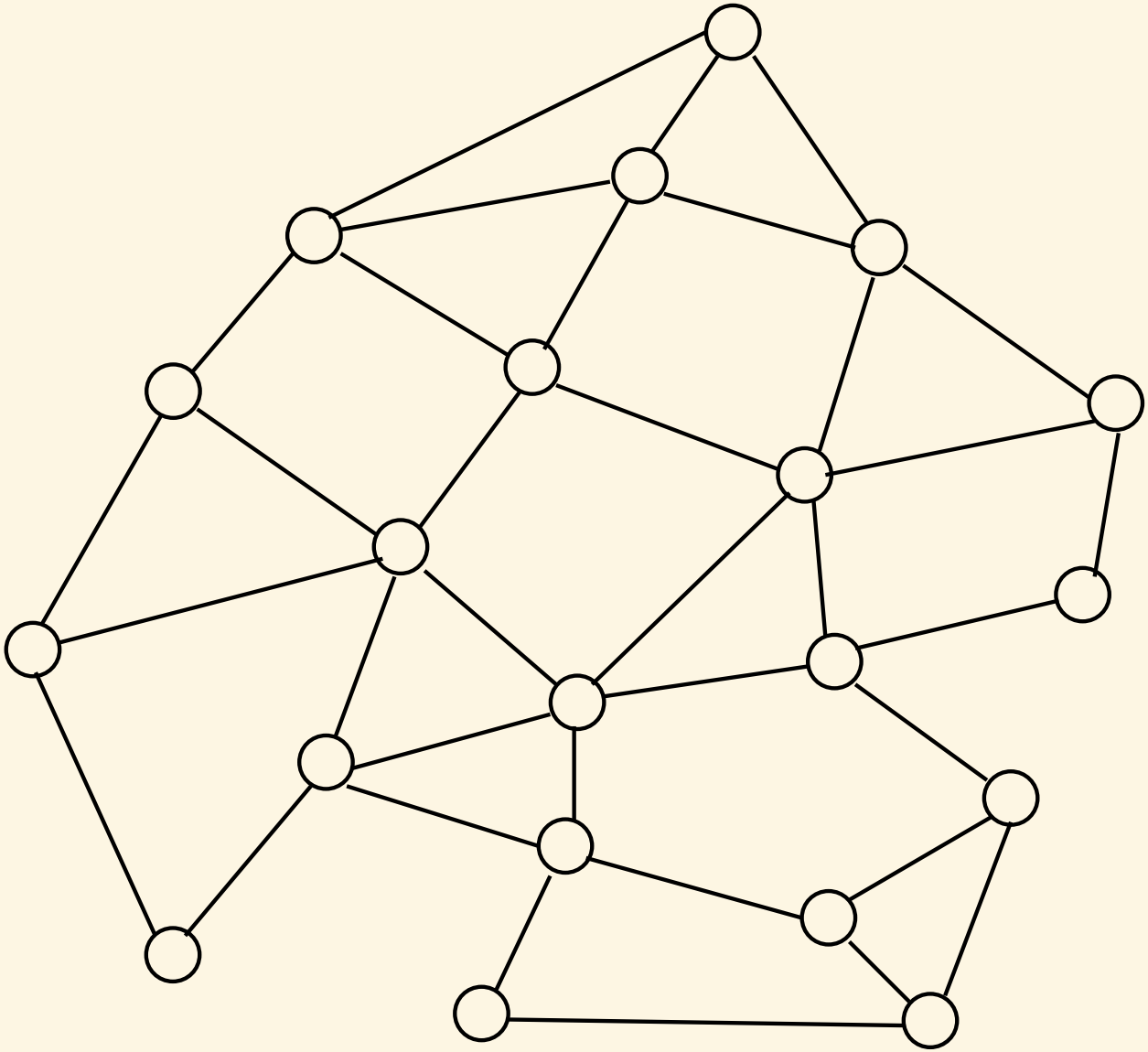
Identification sans divulgation de connaissance

Alice connaît un secret S_{Alice}

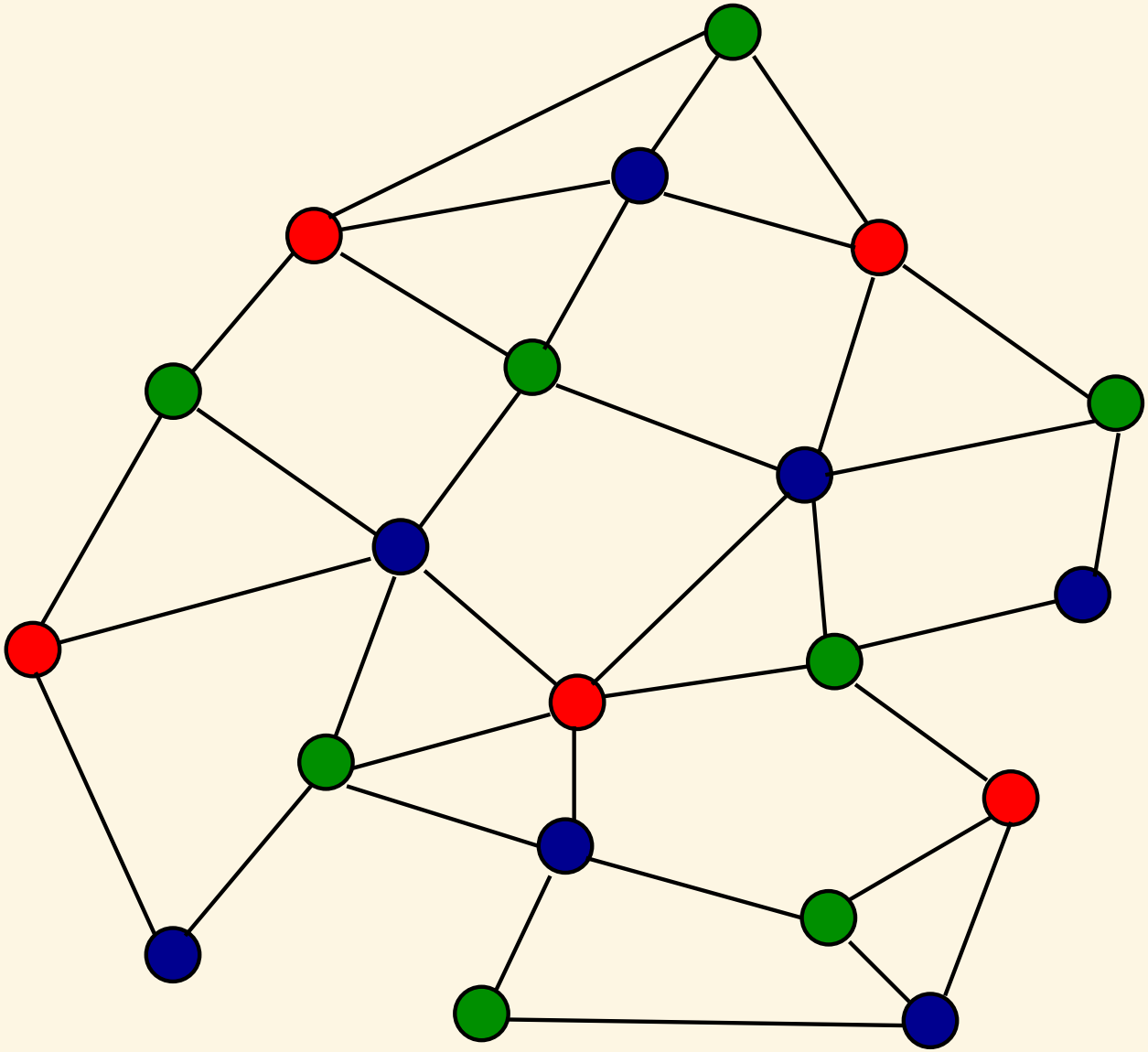
Bob interroge Alice et se convainc qu'elle connaît bien le secret.

À la fin de l'échange, Bob n'a rien appris sur ce secret !

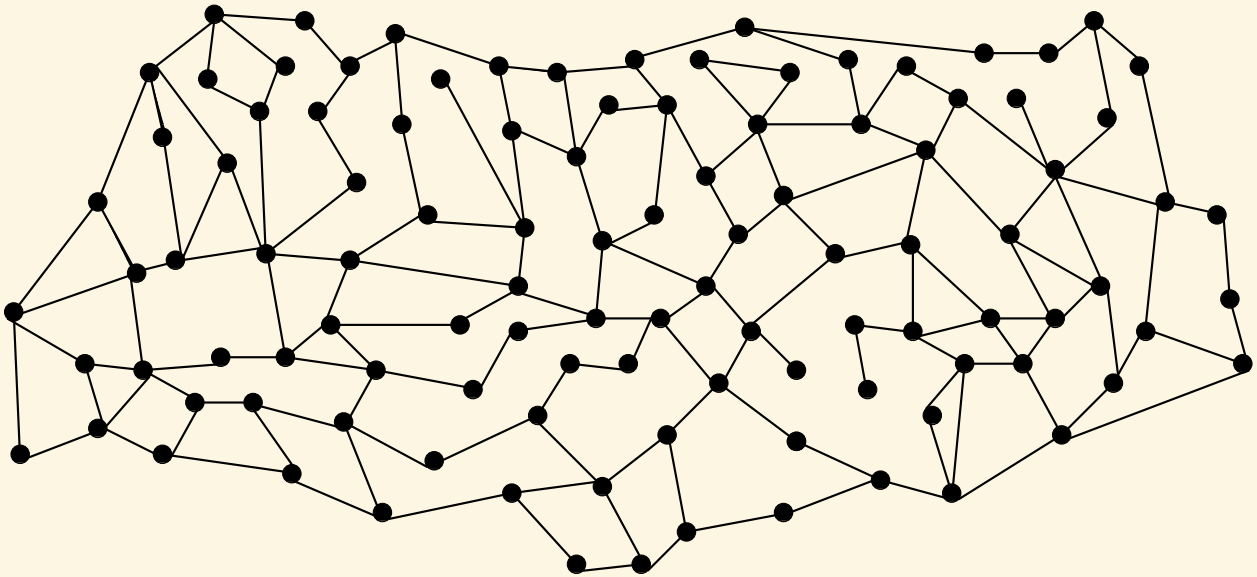
Coloriage de graphe



Coloriage de graphe



Coloriage de graphe

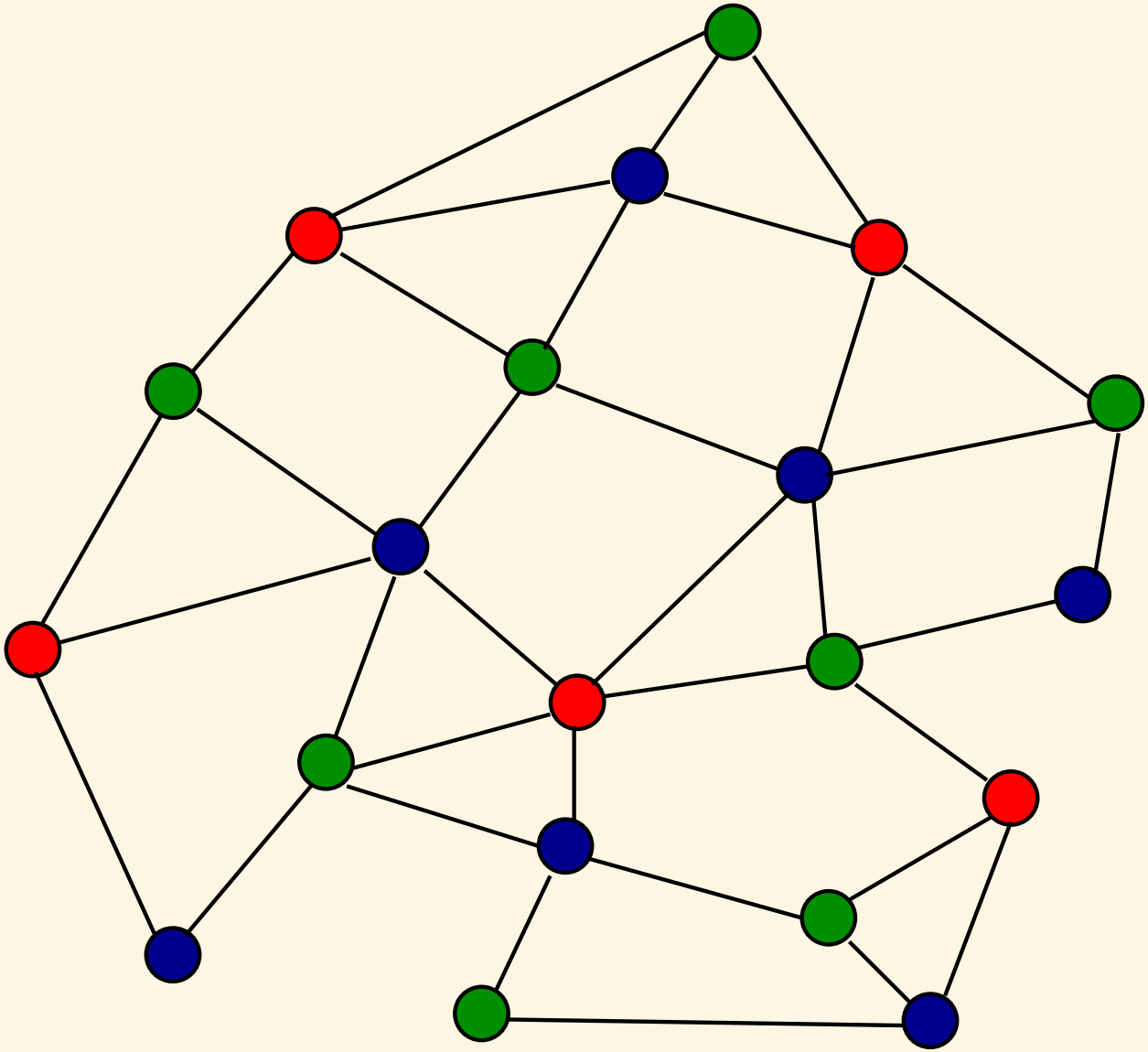


Zero Knowledge Proofs

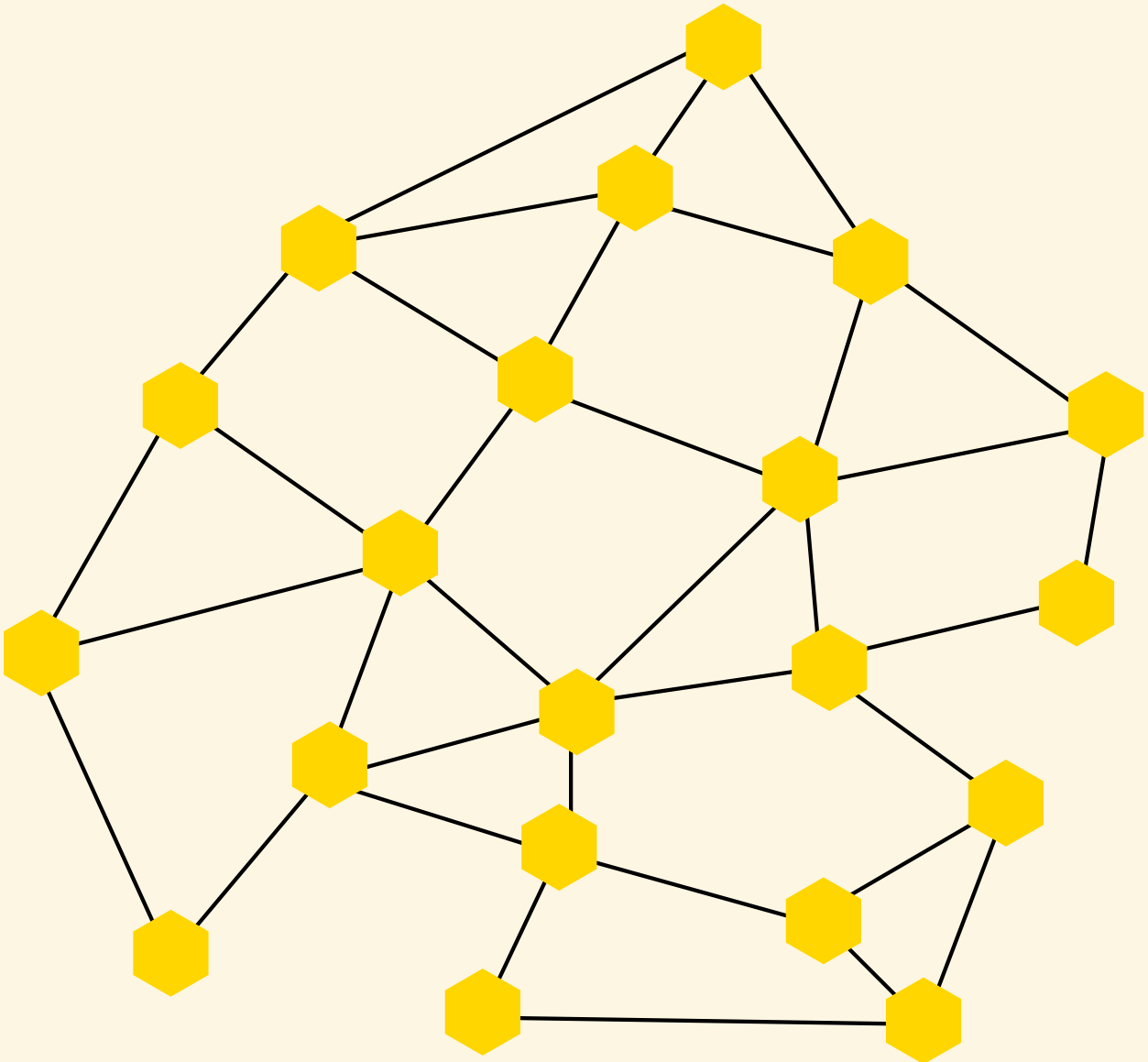
Shafi Goldwasser (1981)

Oded Goldreich (1991)

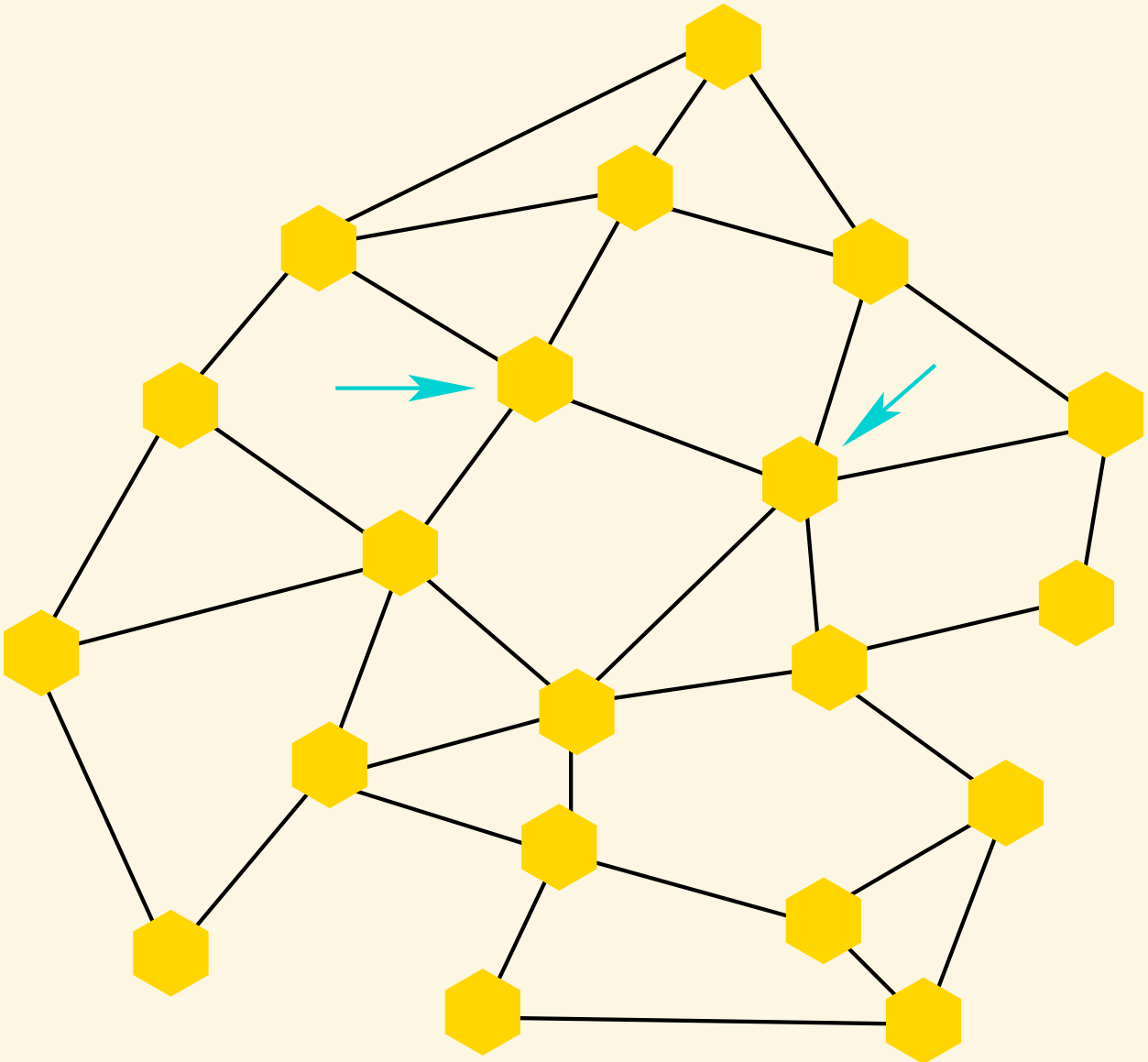
Le coloriage d'Alice (secret)



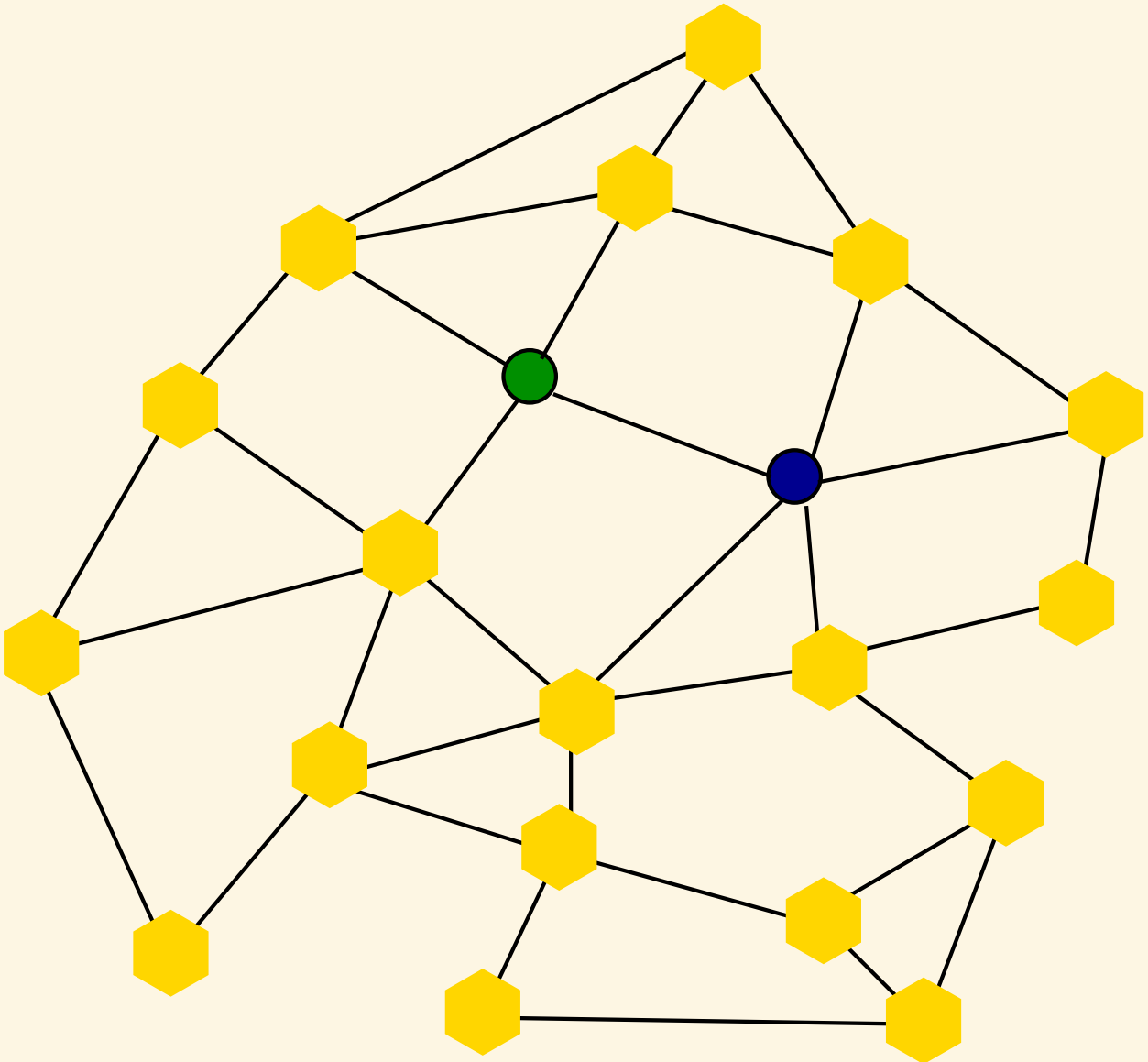
Le coloriage d'Alice caché



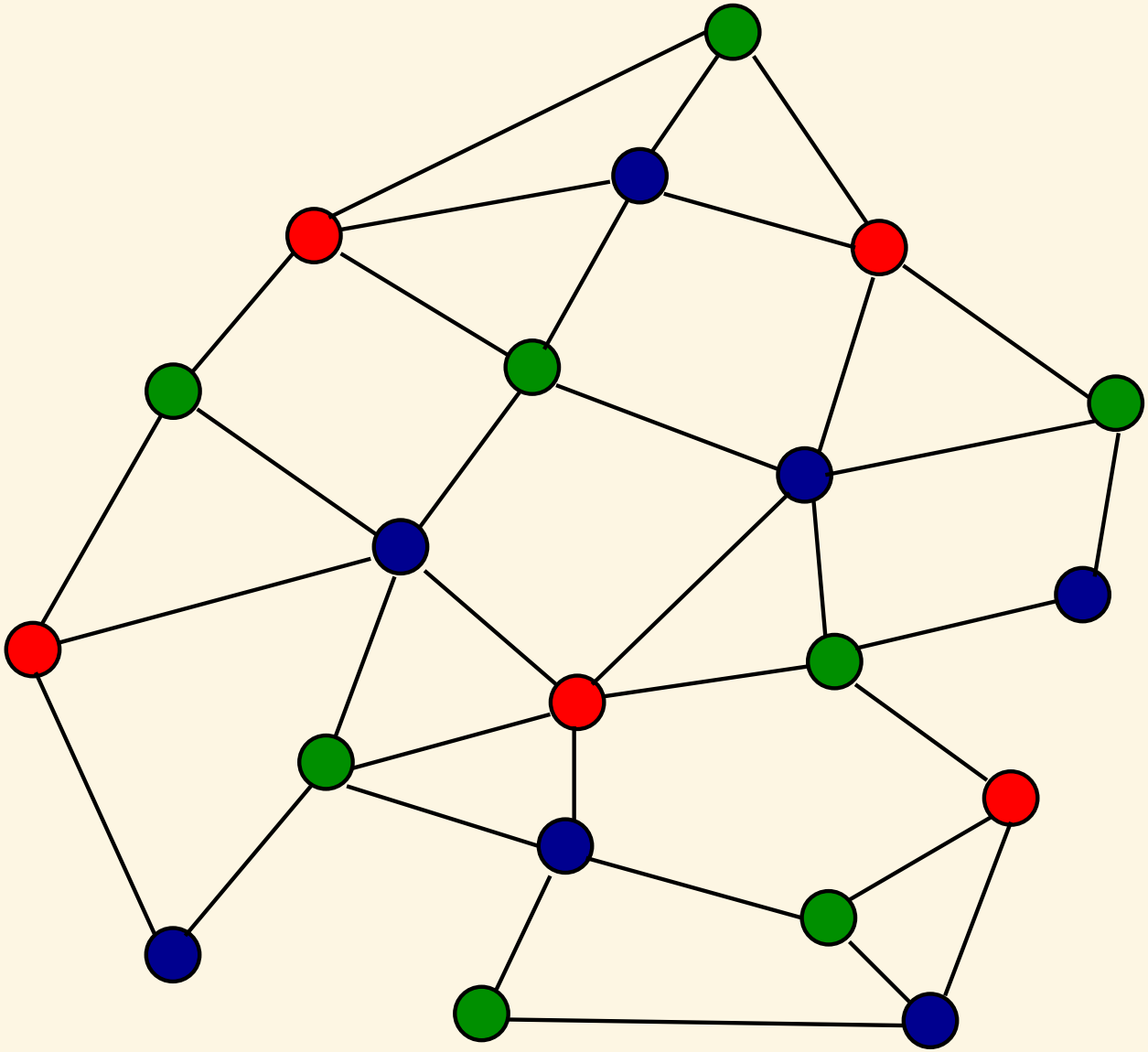
La question de Bob



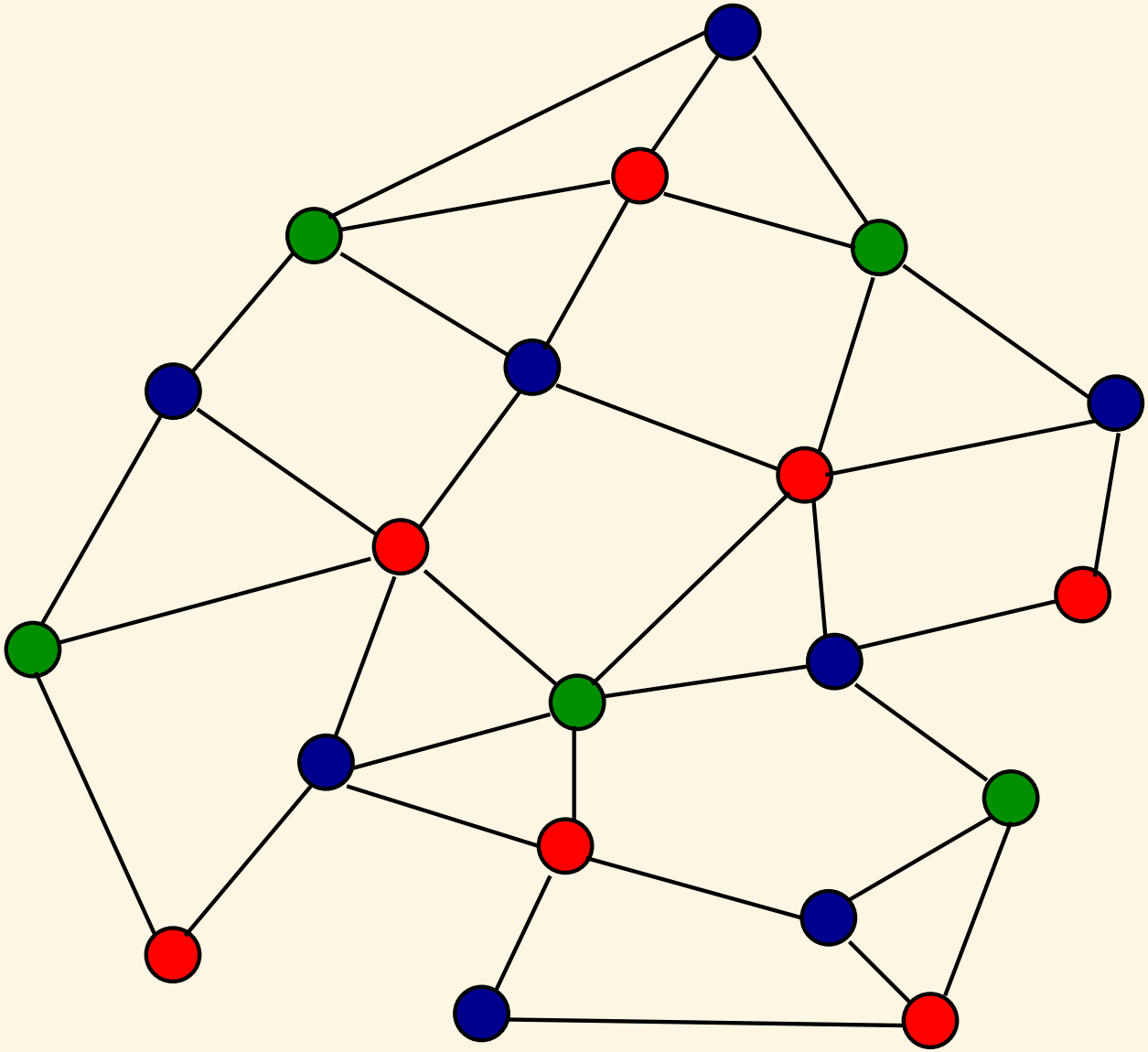
Dévoilement



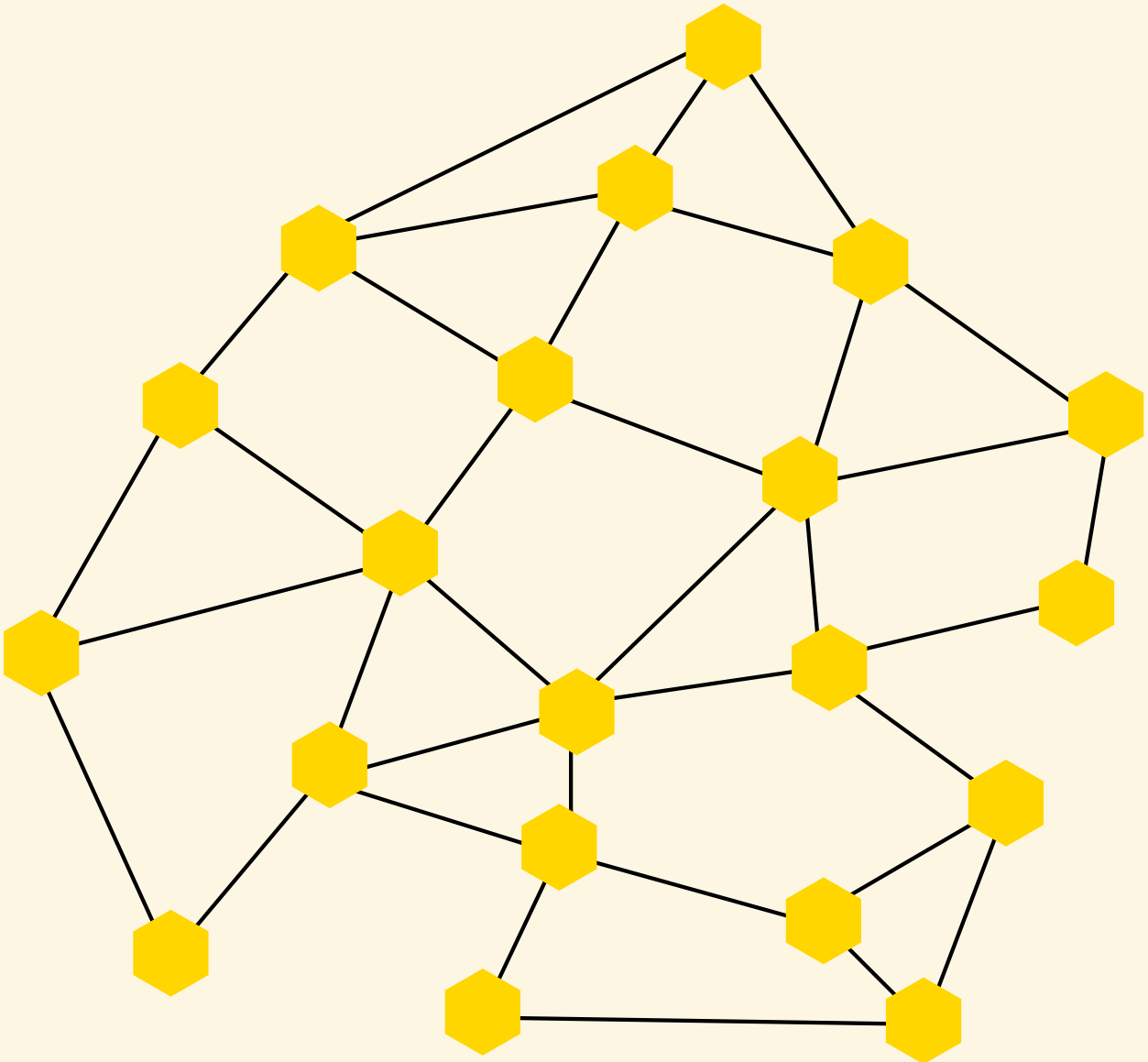
Le coloriage d'Alice (secret)



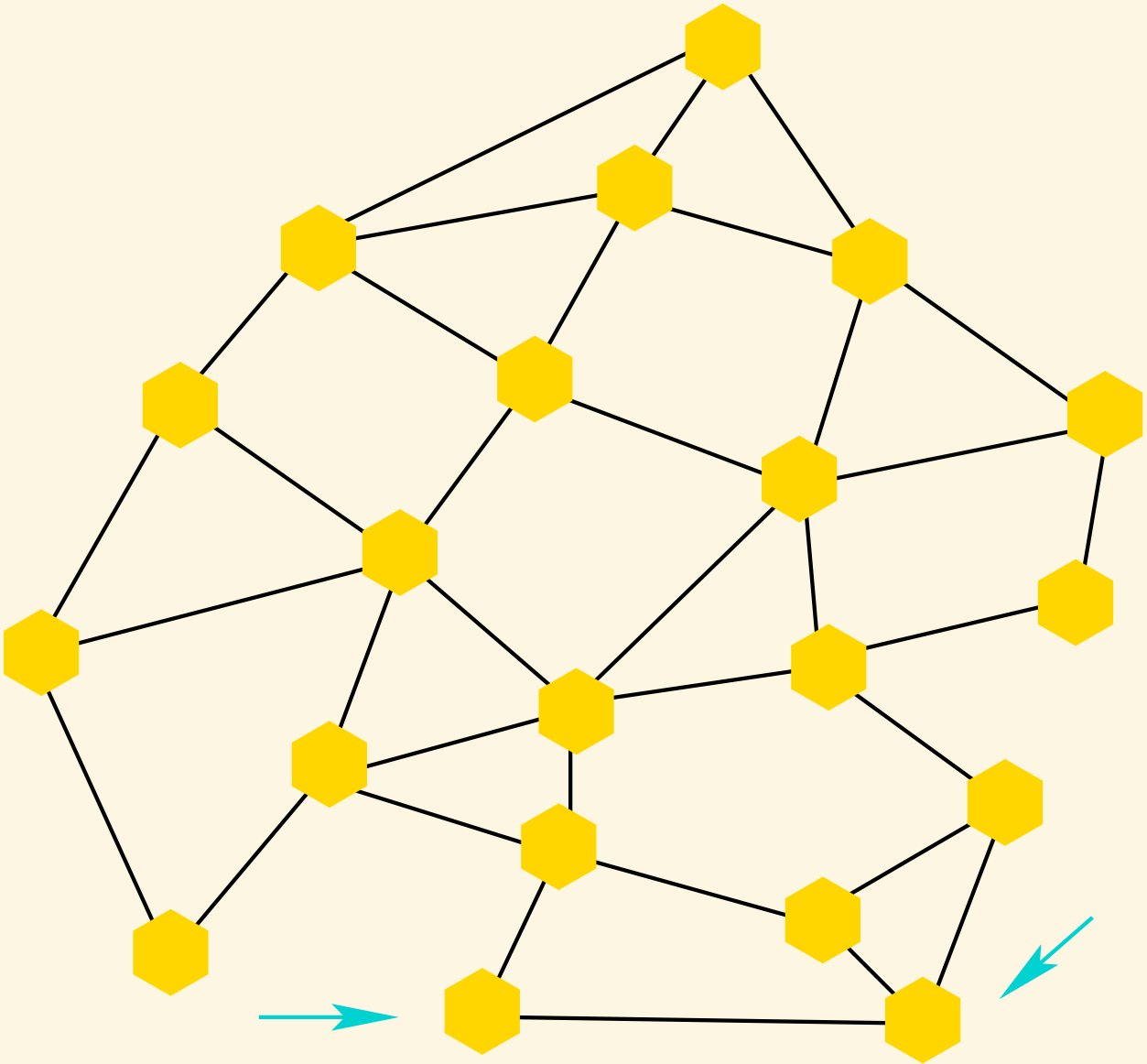
Le coloriage d'Alice permuté



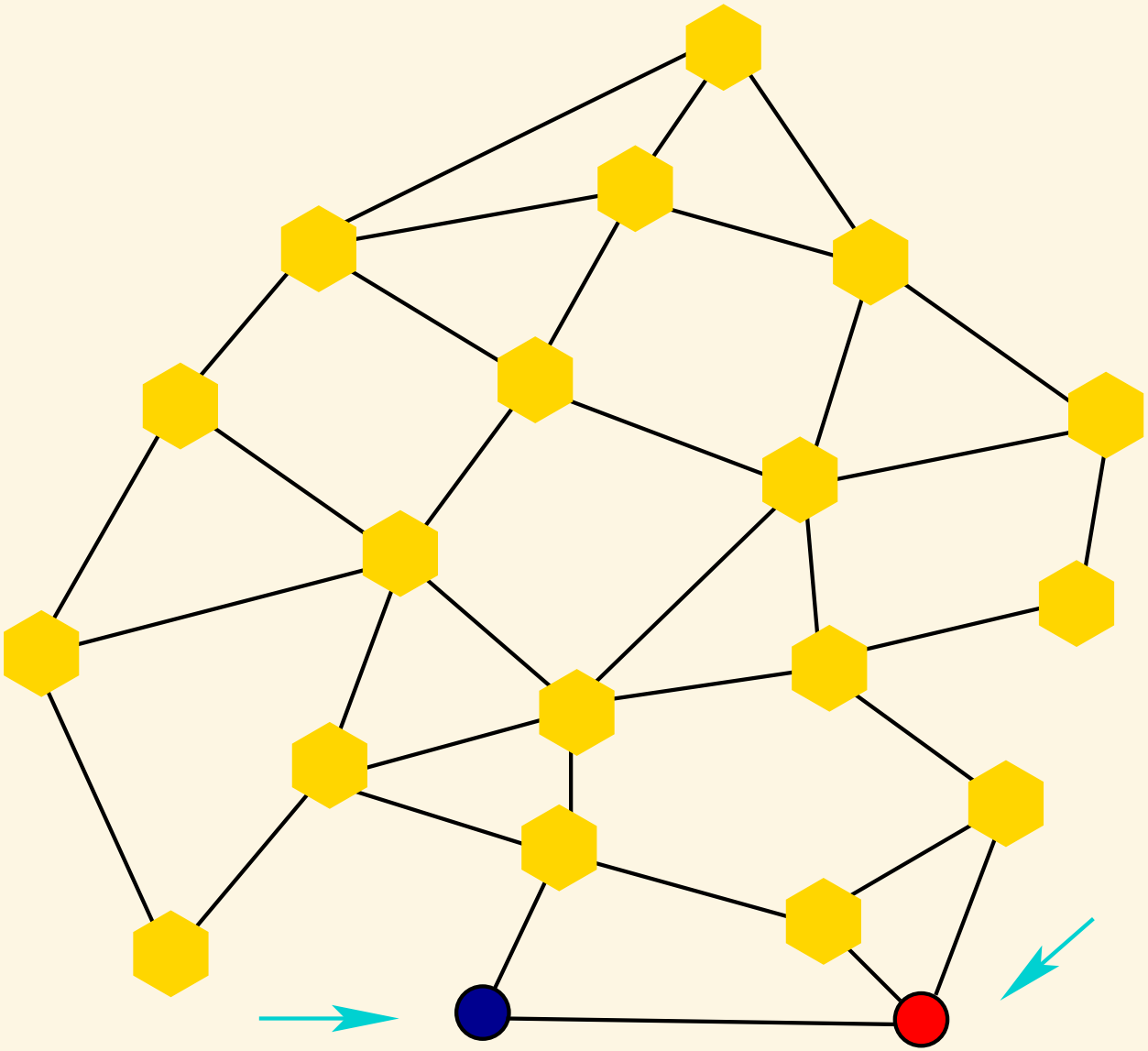
Le coloriage d'Alice caché



La deuxième question de Bob



Dévoilement



Fonctions de Hachage cryptographique

Définition

Compresse des données arbitraires en un “hash” de longueur fixée (typiquement 128 bits).

Une fonction de hachage est dite cryptographiquement sûre si

- Très difficile de trouver des collisions.
- Très difficile de retrouver m à partir de $H(m)$ (si l'on ne connaît pas m).

Mettre en gage des données

Jouer à pile ou face par téléphone.

- Alice lance une pièce
- Bob dit « tu as lancé pile »
- Alice répond « perdu c'était face ! »

Mettre en gage des données

Jouer à pile ou face par téléphone.

- Alice lance une pièce
- Alice envoie le haché de “Pile” ou “Face” à Bob.
- ...

Mettre en gage des données

Jouer à pile ou face par téléphone.

- Alice lance une pièce
- Alice envoie le haché $H(m||\text{Pile})$ ou $H(m||\text{Face})$ à Bob, où m est un message aléatoire.
- Bob dit « tu as lancé pile »
- Alice dévoile m à Bob pour qu'il puisse vérifier le résultat.

Remarque

Attention : en cas de plusieurs tirages, Alice doit changer le message aléatoire m à chaque fois !

Échange de clé de Diffie Hellmann

Alice et Bob veulent échanger une clé commune via un canal non sécurisé.

- On part de $7 \mod 61$;
- Alice choisit $17 \mod 61$ et envoie $17 \times 7 = 58 \mod 61$;
- Bob choisit $31 \mod 61$ et envoie $31 \times 7 = 34 \mod 61$;
- Le clé commune est $29 = 34 \times 17 = 58 \times 31 \mod 61$.

Remarque

Pour retrouver la clé, Eve calcule $1/7 = 35 \mod 61$ *et retrouve* $17 = 58 \times 35 \mod 61$ ☹.

Exponentielle et logarithme discrets

$p = 7$ un nombre premier et $b = 5 \bmod 7$

x	b^x
1	5 mod 7
2	4 mod 7
3	6 mod 7
4	2 mod 7
5	3 mod 7
6	1 mod 7
7	5 mod 7

$y = b^x$	$x = \log_b(y)$
1	0 mod 6
2	4 mod 6
3	5 mod 6
4	2 mod 6
5	1 mod 6
6	3 mod 6

$\exp_b : \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ $\qquad$ $log_b : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

Exponentiation rapide : $b^x \bmod p$

$p = 139$, $b = 112$, $x = 73$

$x = 2^6 + 2^3 + 1 = (1001001)_2$

$b^x = b b^{2^3} b^{2^6}$

$b_0 = b = 112 \bmod 139$,
$b_1 = b_0^2 = 34 \bmod 139$,
$b_2 = b_1^2 = b^{2^2} = 44 \bmod 139$,
$b_3 = (b_2)^2 = b^{2^3} = 129 \bmod 139$,
$b_4 = (b_3)^2 = b^{2^4} = 100 \bmod 139$,
$b_5 = (b_4)^2 = b^{2^5} = 131 \bmod 139$,
$b_6 = (b_5)^2 = b^{2^6} = 64 \bmod 139$.

$b^x = b_0 b_3 b_6 = 112 \times 129 \times 64 = 44 \bmod 139$.

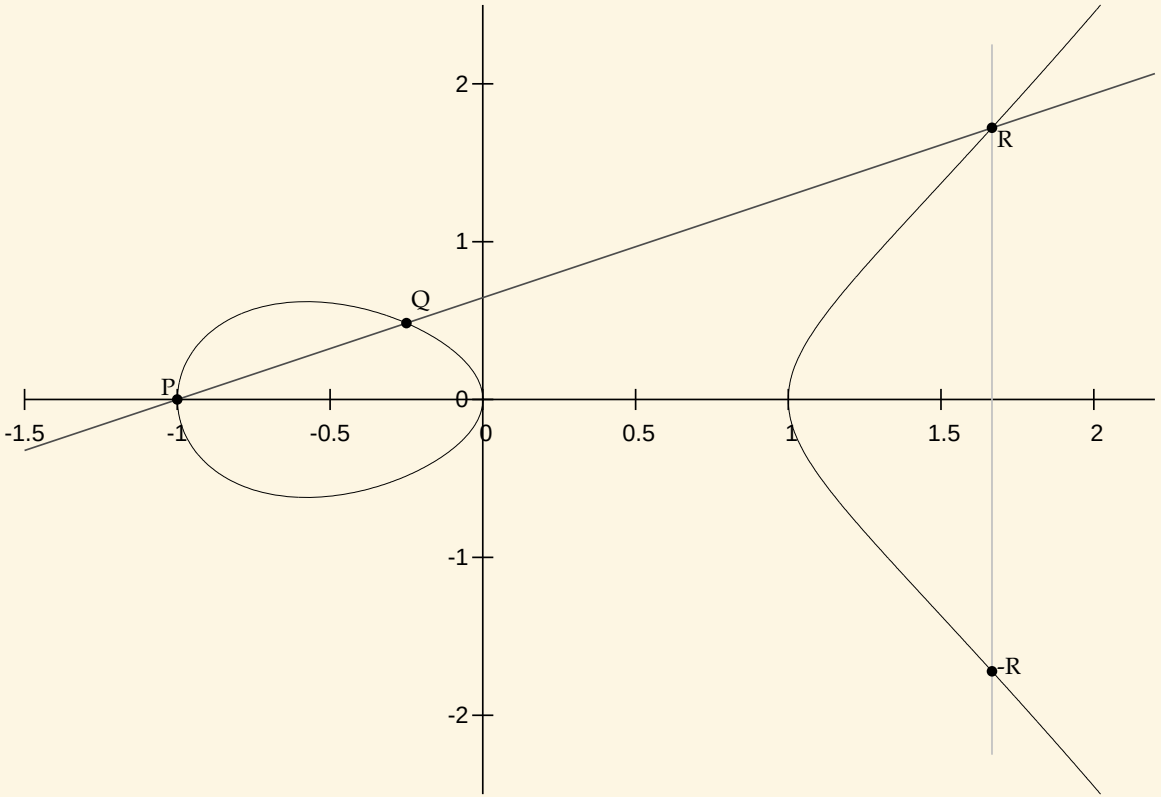
Pin gala, *Chandah-sûtra* (avant -200).

Les courbes elliptiques

Définition (char $k \neq 2, 3$)

Une courbe elliptique est une courbe plane d'équation

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$



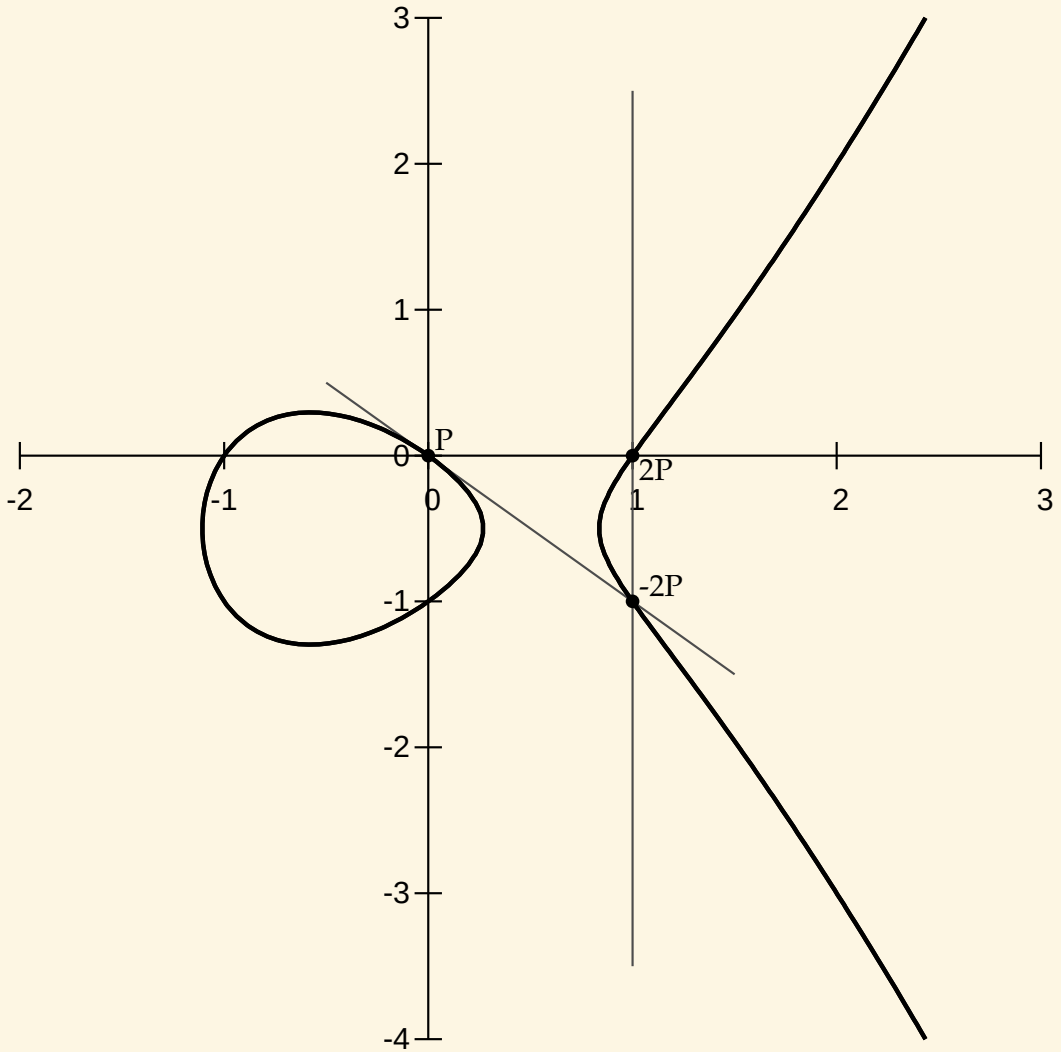
Exponentiation :

$$(\ell, P) \mapsto \ell P$$

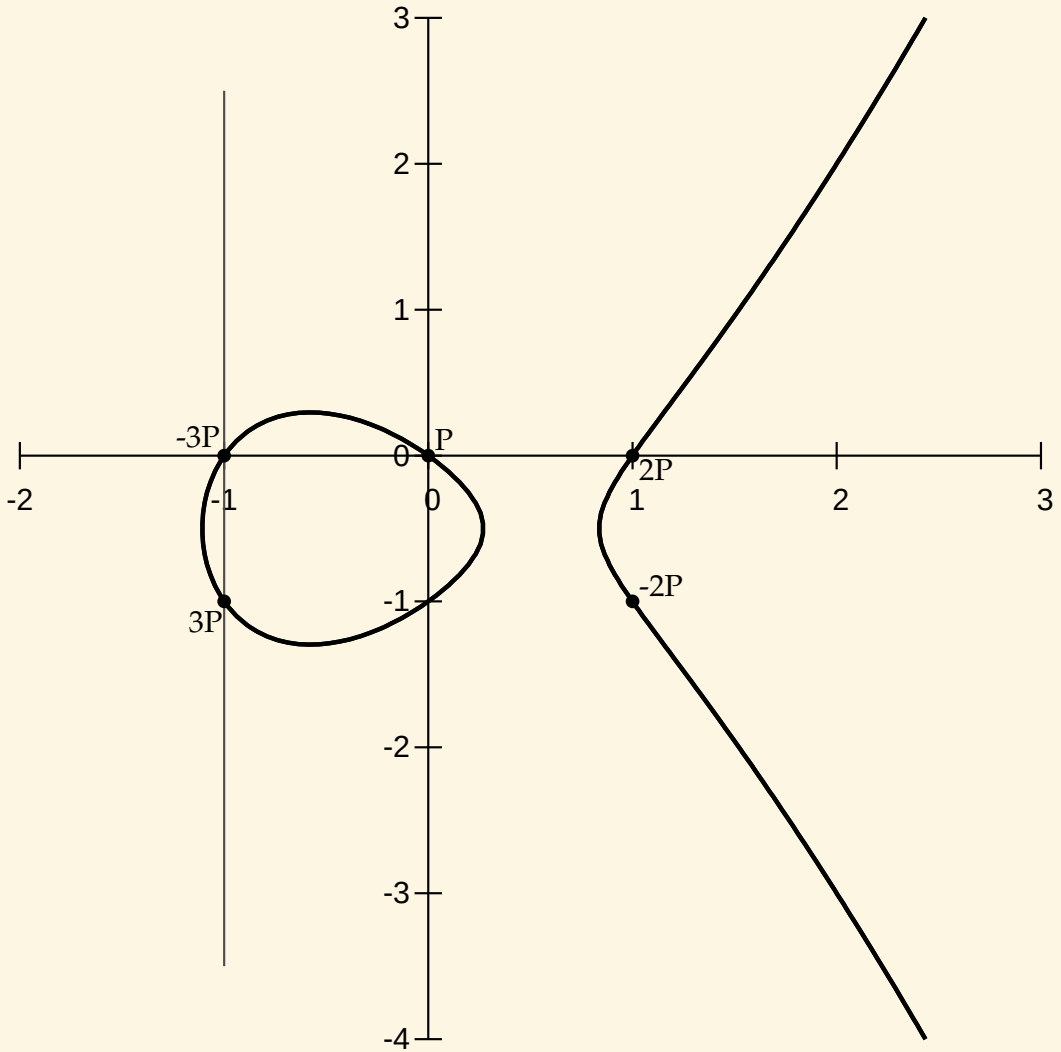
Logarithme discret :

$$(P, \ell P) \mapsto \ell$$

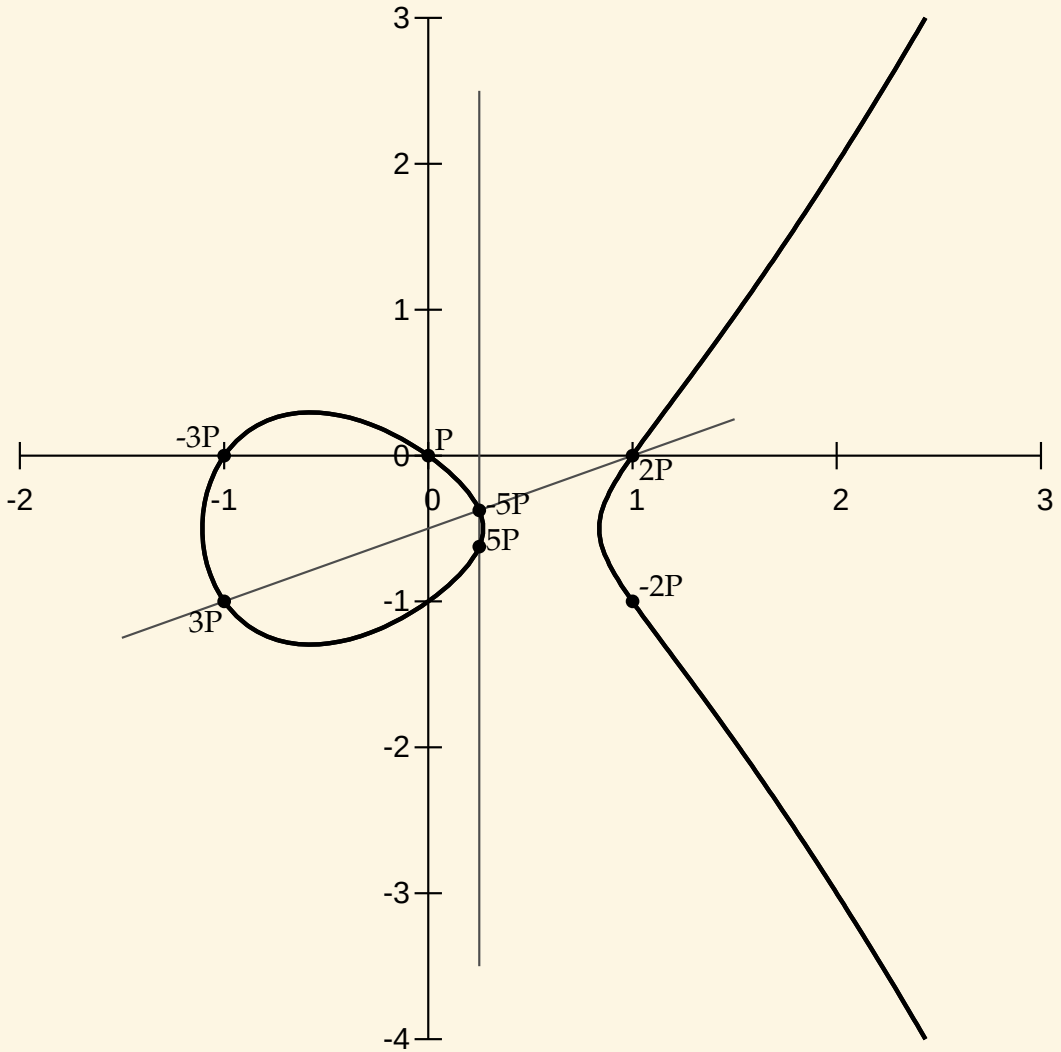
Exponentiation sur une courbe elliptique



Exponentiation sur une courbe elliptique



Exponentiation sur une courbe elliptique



Utilisation des courbes elliptiques

Exemple (ECC 160 bits)

- E courbe elliptique $y^2 = x^3 + x + 333$ sur $\mathbb{F}_{1461501637330902918203684832716283019655932542983}$
- Clé publique :

$$P = (136996248758078877499219958849896155834136208629 6,$$
$$407160203592982096299905031630798490942043935021);$$
$$Q = (695697562436343265984113032286189105569389589 80,$$
$$112620361166019022170844963967766792502441296839 5);$$

- Clé secrète : ℓ tel que $Q = \ell P$.

- Utilisées par la NSA ;
- Utilisées dans les passeports biométriques Européens.

Avantage des courbes elliptiques

À niveau de sécurité égale, les cryptosystèmes basés sur les courbes elliptiques, par rapport à RSA sont

- plus rapides ;
- plus compacts ;
- plus puissants.

Exemple (Couplages)

Sur une courbe elliptique, à partir d'une clé publique on peut générer d'autres clé publiques. De même pour la clé secrète.
⇒ Certificats anonymes.

Exemple (Fonctions de hachage)

Les graphes d'isogénies de courbes elliptiques supersingulières fournissent des fonctions de hachage cryptographiquement sûres.

ECC contre RSA pour 128 bits de sécurité

- ECC (Curve25519) 256 bits :

```
AAAAC3NzaC1lZDI1NTE5AAAAIMoNrNYhU7CY1Xs6v4Nm1V6oRHs/FEE8P+XaZ0PcxPzz
```

- RSA 3248 bits :

```
MIIHRgIBAAKCAZcAvlGW+b5L2tmqb5bUJMrfLHgr2jga/Q/8IJ5QJqeSsB7xLVT/
ODN3KNSPxyjaHmDNdDTwgsikZvPYeyZWWFLP0B0vgwDqQugUGHVfg4c73ZolqZk6
1nA45XZGHUPt98p4+ghPag5JyvAVsf1cF/VlttBHbu/noyIAC4F3tHP81nn+lOnB
eilEALbdmvGTTZ5jcRrt4IDT5a4IeI9yTe0aVdTsUJ6990hpKrVzyTOu1eoxp5eV
KQ7aIX6es9Xjnr8widZunM8rqhBW9EMmLqabnXZItPQoV3rUAnwKzDLV7E56viJk
S2xU5+95IctYu/RTTbf3wTxnkDOqxId0MONHyBJsukXgYKxVB1fWhBKZ4tWui1gw
UCIiKTqLml2zJhLn4WovaxrvvTx0082S0xncEfYDXYu4xbRnJn+ZsTTguqufwC1M
U4MYRdWy7uj+H1EmIGul69Fw9NkuCitWI9dFpcDtSP+/1eEN7wc2FlxhDIRwer0F
6I1P4StWn1uQyHzsTLVdcP+rqA1AsvbWBCKL4ravEO2CEQIDAQABAoIBllWt5YoJ
YZzk4RXbkSX/LvmWICfdmkjTKW6F1w+P4TnotCr0WPG0ObDoANJoUcnbSqNGMgCu
01SF8q9+UuDwZx4KBZm0j8IPOPzJ2nYcK5dYDhyMHzDq1LJ4zJfgPQGQ5WWq2BWm
2RHDhADdTth6YZArs/z9hAqtA9gqMPnMPcdQpIvlsHSOn06zBJD8sJQA+kOxG+Y2
GS8NakLcUVlDpNd/Q+QHkv4AW1ge2EF8QvmKtU/9rekOBqWNm2Tapd6RtAhZwPJX
UhD9yiesTF6rjZ1ZcMGXUaN5Rt0zD3D4zowRz2JLtCe4GkiJmtc3waN6hu1IaIqz
boI11evqnbatqnC4rCq8sf21yZqaLUIbwH4lW2G3K8xMJNh3iy8cgHTYneNYa+/d
7xyNWlMO9SKlHsyaPcWv98BdD+At0x/6R6YPYkeR+qXJ9ETGFKW4U6iNbBQXOMbh
kZb1Ry8vfMH8vsYIzh8Edg6aq00ScU57KiDS/Gc8KuqI6vmf2leCdCa487kVCgw6
cGXQ2bLZGYBiMZFfOOlpCQECgcwA5ZUh3/8yS0duNhsDz3sgC2u40HwHUbxuSOUa
a5t4CoUY9iuF7b7qhBEcvdLgIOiXA5xo+r4p0xgbLvDUTsRR1mrDM2+wRcjjwXcW
pFaMFRl2Rr72yLUC7N0WNcoUshrNL4X/1j8T4WLRcannpXcor+/kn1rwdLEbRCC+
zRTAdJlgMPt4kwJeHtE9Mzw2/O3GX3MeLvzvJklzvpCGw20N/2Yqjs++V5hXoHPs
21y6y6/FV097dvFctf7NahS04JsjubfnjOMx89AUNZsCgcwA1DfabCGJSCkmQ+mg
2q9lDPJz6r29wmBtYyT20oZ2kd4QBHrOp0t59yG4bvdRqcZG/Dr5LjuVDWMPyetV
dksK7hVYQz2B7Nzy7W3waPVrhA0N4fqbIFGxih5QiSFG7/oroZ8PdZDcfVRKroh1
/JJ7rIz/ZBQCLRS5t7/G2B0kBDOMMM+02wR60CTmxUhmgvsoDZWRp5KKha5PSvZa
WAu2CN3mXNK72RLF3RFUvuhNYnkOEj5Oau1RaGgpZoB0JTKYI9nffbe8up+DV8MC
gcwA18be28Ti5FXyg+/IGQ3EBHfucCTiTDQqA2Ew/8pTfK+z0kr9yYISsKXUuaSk
+skghkhPcrugW8LgabH4GT/zGu+lH4btyekSBxeCtFqTtpED1WJOWD2ozi7NXSjd
YrhF+VCcMCWA7ekOqSHjkmT4XMO/wPab4VFEKzgLnHzQlcZB3ke7/4/OHnDScIE7
vWVNeRCdYdRggT+wBX+Y6bxp142Smj8uyu1oDmpmR5ZUCnTdqT4O8K/RT0x4jCeC
CUhGv5rVillO7bS4CdkCgctXvnQwCzmwvVrV744TfTuhu8lTwHnqGWaA/LKU3wW9
T/x9ba1uHFXkaWvRba61LIcDGPsYM4hwTYokqYnfbC2rvOWOf6rtnXlP1An3y6lV
ovQfgDeNiFmIyvnviPPEm0JZA+QnburLYwOx4DgwYvyBnpal8WPo8c3L/J4hkwLm
Pc30DJ0xhUumLevAnCvOcjvgSfw8NenSVfzw+KToDIeKaP0rWfJTUWDAA79vY6tD
UNwRjPNtYIwtSAv+FpRvINko0ZeHamW9H+D1cwKBy2euc93qruYDtFej/biGSA5D
```

Choisir une courbe elliptique

Modèle de Weierstrass ou d'Edwards, petite caractéristique, grande caractéristique, GLV, GLS, petits coefficients, coefficients aléatoires...

- Courbes du NIST ;
- Courbes Brainpool (BSI) ;
- Courbes ANSSI ;
- Courbes NUMS – Nothing Up My Sleeve (Microsoft) ;
- Curve25519 (DJB) ;
- Courbe Goldilock (Mike Hamburg).

Exemple : méthode de la multiplication complexe pour générée une courbe elliptique sécurisée (Enge-Sutherland)

- Les polynômes de classe de corps quadratiques imaginaires permettent de construire des courbes elliptiques avec un nombre de points prescrit $\Rightarrow$ générer des courbes elliptiques optimisées pour les applications
- Le polynôme de classe pour $D = 10^{15} + 15$ a un degré 15209152, une borne sur la taille des coefficients est de 2337598720 bits ($= 2\text{GB}$) pour une taille totale d'environ 4.4PB.
- Comment calculer de tels objets gigantesques ?
- Il faut des algorithmes asymptotiquement rapides, utiliser au maximum le parrallélisme, et réduire les résultats modulo p directement ($= 4\text{GB}$) pour consommer moins de mémoire.

L'essor du cloud computing

- Chiffrement homomorphe : l'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage n'a rien appris sur la donnée m, ni sur le résultat !
- L'utilisateur fournit au nuage un message chiffré $f_K(m)$ et le chiffrement $f_K(P)$ d'un programme P, et le nuage renvoie $f_K(P(m))$.
  Le nuage ne sait pas ce qu'il a calculé !

⇒ Une version faible utilise les couplages de courbes elliptiques ;

⇒ La version complète utilise des réseaux, en particulier des réseaux d'idéaux dans des corps de nombres ;

☹ Encore très lent.

Cryptographie post-quantique

- RSA (basé sur la factorisation) et les courbes elliptiques sont vulnérables aux ordinateurs quantiques ;
- Problématique pour des secrets à très long terme (50 ans) : secrets défense
- Conception de nouveaux protocoles résistant aux ordinateurs quantiques
- Diffie-Helmann : échange de clé par des opérations dans un groupe.
  Diffie-Helmann post-quantique : échange de clé par des opérations dans un graphe.

SIDH : Supersingular isogeny key exchange

- Soit G un graphe tel que chaque noeud a des arrêtes classifiées par une direction (qui commutent entre elles). Exemple : sur $G = \mathbb{Z}^2$, on a quatres directions : « Haut, Bas, Gauche, Droite ».
- Echange de clé : Alice part de $(0,0)$, suit les directions « Haut, Haut, Gauche, Haute, Droite, Droite » et publie le point $(1,3)$.
- Bob part de $(0,0)$, suit les directions « Bas, Gauche, Bas, Bas, Droite, Droite, Bas, Bas » et publie le point $(1,-5)$.
- Clé commune : le point $(2,-2)$ obtenu à partir du point $(1,-5)$ par les directions « Haut, Haut, Gauche, Haute, Droite, Droite » ou à partir du point $(1,3)$ par les directions « Bas, Gauche, Bas, Bas, Droite, Droite, Bas, Bas ».
- Attaque : trouver un chemin sur le graphe entre deux points. Sur $G = \mathbb{Z}^2$ très facile !
- En pratique on utilise le graphe d'isogénies des courbes elliptiques supersingulières définies sur $\mathbb{F}_{p^2}$, graphe d'ordre (environ) p.
- C'est un graphe expanseur : suivre $O(\log p)$ arrêtes donne une répartion uniforme !
- DEMO