

Mini formulaire de probabilités

Damien Robert

13–24 Janvier 2020

1 Espace de probabilités

1.1 Cas d'un univers fini

Définition 1.1.

- Ω désigne un univers fini (univers des résultats possibles du tirage aléatoire) ;
- Un événement est un sous-ensemble $A \subset \Omega$;
- Une probabilité est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui satisfait
 - $P(\Omega) = 1$;
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

Dictionnaire entre probabilités et ensembles :

Événement	Ensemble
Univers	Ω
A	$A \subset \Omega$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
non A	$\bar{A} = \Omega - A$
événement certain	$A = \Omega$
événement impossible	$A = \emptyset$
probabilité de A	$P(A)$

Exemple 1.2. Pour l'expérience de lancer de dé, on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et pour le lancer de deux dés on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. L'événement « la somme des deux dés est supérieure à 11 » est représenté par l'ensemble $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$.

Exemple 1.3 (Probabilité uniforme). Si Ω est fini de taille N , P est uniforme si $P(\{x\}) = 1/N$. Alors pour tout événement : $P(A) = \#A/\#\Omega$.

Ainsi une probabilité peut se voir comme une généralisation de la notion de cardinal : si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, P est entièrement déterminé par $p_i = P(\{x_i\})$. Inversement, si on a n réels $p_i \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, alors on peut associer une probabilité $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$.

1.2 Probabilité conditionnelle

Définition 1.4 (Probabilité conditionnelle). Si B est un événement de probabilité non nulle, $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (autre notation : $P(A | B)$).

Propriétés 1.5.

- $P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A)$;
- $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$;

2 Variable aléatoire

- *Formule de Bayes* : $P(B | A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.
- *Formule des probabilités totales* : Si $\Omega = \coprod_{i \in I} A_i$, $P(A) = \sum_{i \in I} P(A | A_i)P(A_i) \Rightarrow$ arbre de probabilité
- Si $n \in I$, $P(A_n | A) = P(A | A_n)P(A_n) / \sum_{i \in I} P(A | A_i)P(A_i)$.

Exemple 1.6 (Arbre de probabilité). Si $\Omega = \coprod_{i \in I} A_i$, $A_i = \coprod_j A_{ij}$, $A_{ij} = \coprod_k A_{ijk}$, alors $\Omega = \coprod_{i,j,k} A_{ijk}$. On peut alors calculer

$$P(A) = \sum_{i,j,k} P(A | A_{ijk})P(A_{ijk}) = \sum_{i,j,k} P(A | A_{ijk})P(A_{ijk} | A_{ij})P(A_{ij} | A_i)P(A_i)$$

1.3 Indépendance

Definition 1.7 (Indépendance).

- A est indépendant de B $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$ (ou $P(B) = 0$).
- $A_1, \dots, A_n$ sont indépendantes si $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ pour tout $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Propriétés 1.8.

- A et B sont indépendants $\Leftrightarrow \bar{A}$ et B le sont $\Leftrightarrow A$ et $\bar{B}$ le sont $\Leftrightarrow \bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont ;
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, ils le sont deux à deux (attention, la réciproque est fausse) ;
- Attention : on peut avoir A indépendant de B et B indépendant de C mais A non indépendant de C.

2 Variable aléatoire

Definition 2.1.

- Une variable aléatoire réelle est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- X induit une probabilité sur $\mathbb{R}$: $P(X \in A) := P(X^{-1}(A))$ (aussi noté $P_X(A)$).
- On dit que X a une loi $\mathcal{L}$ si $P_X = \mathcal{L}$. Notation : $X \sim \mathcal{L}$;
- Un vecteur aléatoire réel est un n -uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ de fonctions : $X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.2. Pour un jeu de pile ou face, on peut prendre la variable aléatoire X représentant les gains du jeu : $X(\text{pile}) = 10$, $X(\text{face}) = -10$.

2.1 Indépendance

Definition 2.3.

- X et Y sont indépendantes ssi $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$P(X \in [a_1; b_1] \cap Y \in [a_2; b_2]) = P(X \in [a_1; b_1])P(Y \in [a_2; b_2]);$$

- $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes ssi

$$P(\cap X_i \in [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in [a_i, b_i]).$$

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux (attention, la réciproque est fausse).

Exemple 2.4. Deux événements A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ le sont.

Propriétés 2.5.

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Leftrightarrow P_{(X_1, \dots, X_n)}$ est la probabilité produit $P_{X_1} \times \dots \times P_{X_n}$.
- Attention : la loi de $X_1, \dots, X_n$ ne détermine pas en général la loi de $(X_1, \dots, X_n)$. Mais si les X_i sont indépendantes, la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est déterminée par la loi produit des X_i .

Proposition 2.6. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute fonction $f(X_1, \dots, X_p)$ est indépendante de $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$.

3 Espérance et variance

3.1 Espérance

Definition 3.1.

- Si X est une variable aléatoire finie, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$.
- Si X est une variable aléatoire discrète, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. **Attention :** l'espérance n'a de sens que si la série est absolument convergente.
- Si X est à densité f , $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$. **Attention :** l'espérance n'a de sens que si cette intégrale converge absolument.

Propriétés 3.2.

- *Linéarité :* si X et Y ont une espérance, alors $\alpha X + \beta Y$ aussi et $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.
- Si $X = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{1}_{A_i}$ (avec les A_i disjoints¹) et que l'espérance de X existe, alors $E(X) = \sum x_i P(A_i)$.
- Si on a un arbre de probabilité, $E(X) = \sum_{ijk} E(X | A_{ijk}) P(A_{ijk}) = \sum_{ijk} E(X | A_{ijk}) P(A_{ijk} | A_{ij}) P(A_{ij} | A_i) P(A_i)$.
- Si X et Y sont indépendantes et ont une espérance, alors XY aussi et $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Transfert, cas X fini ou discret : si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$.
- Transfert, cas X à densité : si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt$.

3.2 Variance

Definition 3.3.

- Variance : $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Attention : la variance n'a de sens que si $E(X)$ existe et si la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ a une espérance ;
- Variance, cas X fini ou discret : $V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$;
- Variance, cas X à densité : $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$;
- Écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés 3.4.

- $V(X) \geq 0$; $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante ;
- Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$;
- Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Variable centrée réduite : $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. Exemple : $\frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$ est toujours centrée réduite.

4 Variable aléatoire finie ou discrète

Definition 4.1. X est une variable aléatoire finie (resp. discrète) si $X(\Omega)$ est fini (resp. dénombrable) : $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$.

P_X est alors complètement déterminé par $P(X = x_i)$ pour $x_i \in X(\Omega)$.

¹par exemple si X est une va discrète, $A_i = X^{-1}(x_i)$

Propriétés 4.2.

- Si X et Y sont discrètes (ou finies), le vecteur (X, Y) est déterminé par $p_{ij} := P(X = x_i \cap Y = y_j)$;
- X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$;
- La loi de X peut se retrouver à partir de la loi de (X, Y) : $P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{j \in J} p_{ij}$;
- Loi conditionnelle : $P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{j' \in J} p_{ij'}}$.

4.1 Loi uniforme $U([1; n])$

- $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, $P(X = i) = 1/n$;
- $E(X) = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exemple type : pile ou face, lancé de dé.

4.2 Loi de Bernoulli $B(p)$

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$;
- $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$.

Interprétation : $X = \mathbb{1}_A$ où $A \in \mathcal{T}$ est un évènement, $p = P(A)$ (probabilité de tomber dans A).

Exemple type : un lancé de pile ou face biaisé.

4.3 Loi binomiale $B(n; p)$

- $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$;
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$.

Interprétation : $X = X_1 + \dots + X_n$ somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (schéma de Bernoulli).

Plus généralement la loi binomiale est stable par addition, si X_i sont indépendantes de loi $B(n_i; p)$, $X = \sum X_i$ est de loi $B(\sum n_i, p)$.

Exemple type : n lancers de pile ou face biaisé. (Si $n = 1$ on retrouve une loi de Bernoulli).

4.4 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$;
- $E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.

Stabilité par la somme : $X = \sum_i X_i$ somme de variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre λ_i ($X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $X \sim \mathcal{P}(\sum \lambda_i)$).