Couplage
Méthodes Multipôles Rapides et Discrétisation Microlocale pour la Résolution des Equations Intégrales de l'Electromagnétisme

Eric Darrigrand

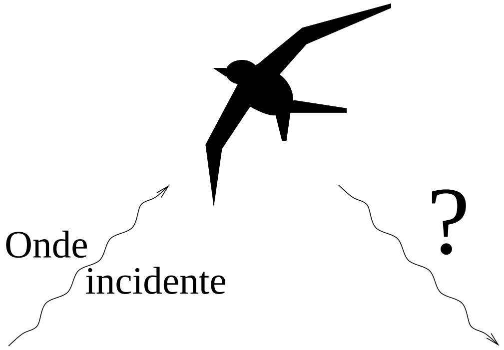
CEA-CESTA DEV/SIS

Encadrement : Katherine Mer-Nkonga

Université Bordeaux 1 - MAB

CNRS

Directeur de thèse : Alain Bachelot



- **Equations de Maxwell en régime harmonique**

$$\left\{\begin{array}{ll}
\nabla \wedge E + \imath k \mu^* H = 0\,, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}\,,\\
\nabla \wedge H - \imath k \epsilon^* E = 0\,, & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}\,,\\
n \wedge (E \wedge n) + H \wedge n - R(-n \wedge (E \wedge n) + H \wedge n) = g^{inc}\,, & \text{sur } \Gamma\,,\\
\displaystyle\lim_{|x| \longrightarrow \infty} ((H \wedge \hat{x}) \wedge \hat{x} - E \wedge \hat{x}) = 0\,, & \text{où } \hat{x} = \dfrac{x}{|x|}\,.
\end{array}\right.$$

$R = (Id - Z)\,(Id + Z)^{-1}$: coefficient de réflexion $\qquad Z$: impédance

- **Diverses méthodes de résolution :**
  - Méthodes asymptotiques (D. Bouche et F. Molinet, ...)
  - Méthodes volumiques (P. Joly, ...) *3 D non borné*

    $\longrightarrow$ *Frontière artificielle et condition aux limites approchée*
  - Méthodes intégrales (A. Bendali, ...) *"2 D" borné*

- **Quelques formulations intégrales :**
  - EFIE - MFIE - CFIE - variantes
  - Formulation originale de A. Bendali
  - Formulation originale de B. Després

- **Résolution des équations intégrales :**
  Méthodes directes ou itératives selon la formulation choisie

- **Problème :**
  Contexte physique : Furtivité radar - SER à haute fréquence
  Influence numérique : Taille du système $\propto$ (nombre d'onde)^2

- **Solution :** Méthodes de réduction du coût de résolution
  Réduction de la taille du système ou de la densité de la matrice, accélération des produits matrice-vecteur, ...

- **Stratégie proposée :**

  Couplage des deux idées : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Réduction de la taille du système} \\ \text{Accélération des calculs} \end{array} \right.$

Plan de l'exposé

1 - Formulation par équations intégrales (EI)

2 - Discrétisation microlocale (DM)

Approximation de la phase $\Longrightarrow$ *Réduction de la taille du système*

3 - Méthode Multipôles Rapide (FMM) $\Longrightarrow$ *Accélération des calculs*

4 - Couplage **DM + FMM**

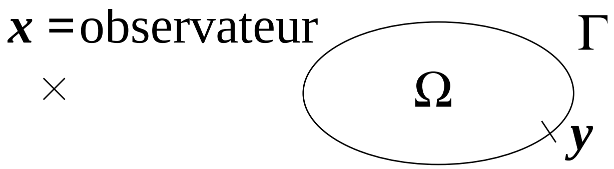
5 - Résultats numériques

$\longrightarrow$ Application du couplage à l'équation de Helmholtz

$\longrightarrow$ Application du couplage aux équations de Maxwell

6 - Conclusion - Perspectives

1 - EI : Introduction aux Equations Intégrales



$$\left.\begin{array}{c}\text{Problème 3 D}\\ \text{domaine non borné}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{intégrale}]{\text{Formulation}} \left\{\begin{array}{c}\text{Problème “2 D”}\\ \text{domaine borné}\end{array}\right.$$

Inconnues du problème intégral : (J, M) = courants sur Γ.

$$(E, H)(x) = \int_\Gamma \mathcal{G}(x, y)\,(J, M)(y)\,d\gamma(y)$$

1 - EI : Formulation Intégrale de Desprès

Formulation basée sur :

- Opérateurs intégraux classiques
- Décomposition du noyau de Green

$$G(k,|x-y|) = \frac{\cos(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} + \imath \frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} = G_r(k,|x-y|) + \imath G_i(k,|x-y|)$$

- Inconnues $U \longleftrightarrow (\sqrt{\imath}\, J, \sqrt{\imath}^{-1} M)$ et $V \propto U$
- Forme positive pour la partie imaginaire
- Condition au bord : R (ou Z) dans un terme distinct de la matrice

(N. Bartoli, F. Collino *et* B. Desprès)

Ou (*formulation initiale due à* B. Desprès)

Minimisation d'une fonctionnelle quadratique avec contraintes linéaires

$\longrightarrow$ Système linéaire de type Stokes

1 - EI : Système Intégral de Desprès

$$\begin{bmatrix} Id + A_\infty^* A_\infty & -\mathbf{T}^* \\ \mathbf{T} & A_\infty^* A_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_R U \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_\infty \longleftrightarrow G_i \\ F_R \longleftrightarrow Z \end{array}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_r & K_r - \frac{1}{2} n\wedge \\ K_r - \frac{1}{2} n\wedge & T_r \end{bmatrix} \qquad T_r = T_r^1 + T_r^2$$

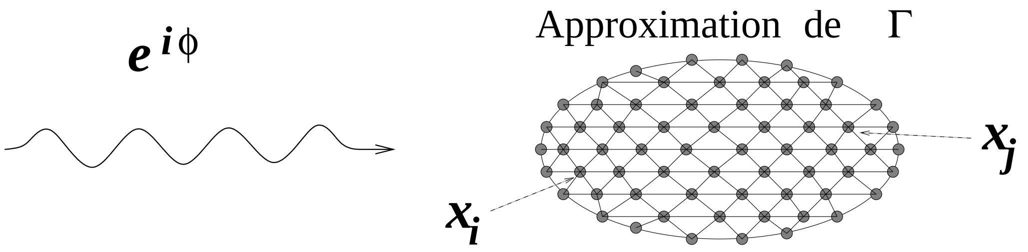
$$\boldsymbol{(T_r^1 J, J') = k \iint_{\Gamma\times\Gamma} G_r(k, |x-y|)\, J(y) \cdot \overline{J'(x)}\, d\gamma(y) d\gamma(x)}$$

$$(T_r^2 J, J') = \frac{1}{k} \iint_{\Gamma\times\Gamma} \nabla_x G_r(k, |x-y|)\, \nabla^t J(y) \cdot \overline{J'(x)}\, d\gamma(y) d\gamma(x)$$

$$(K_r M, J') = \iint_{\Gamma\times\Gamma} (\nabla_x^t G_r(k, |x-y|) \wedge M(y)) \cdot \overline{J'(x)}\, d\gamma(y) d\gamma(x)$$

1 - EI : Discrétisation Classique

Eléments finis de type Raviart-Thomas :



Nombre de degrés de liberté $= N \longleftrightarrow \phi \longleftrightarrow k$, $\boldsymbol{N \sim k^2}$

$\Longrightarrow$ Résolution d'un système matriciel de taille $N \times N \sim k^2 \times k^2$

$\Longrightarrow$ Limitation pour le problème de la montée en fréquence

- **Le système matriciel :**

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \begin{array}{l} b \longleftrightarrow g^{inc} \text{ et condition au bord} \\ X \longleftrightarrow (J, M) \\ \mathcal{M}_{ij} \longleftrightarrow A_\infty \,,\; T_r \,,\; K_r \end{array}$$

$$(T^1_{r,h})_{\hat{i},\hat{j}} = k \sum_{t_i} \sum_{t_j} G_r(k, |x_j - x_i|)\varphi_{\hat{j}}(x_j) \cdot \overline{\varphi_{\hat{i}}(x_i)}$$

- **Résolution du système :**

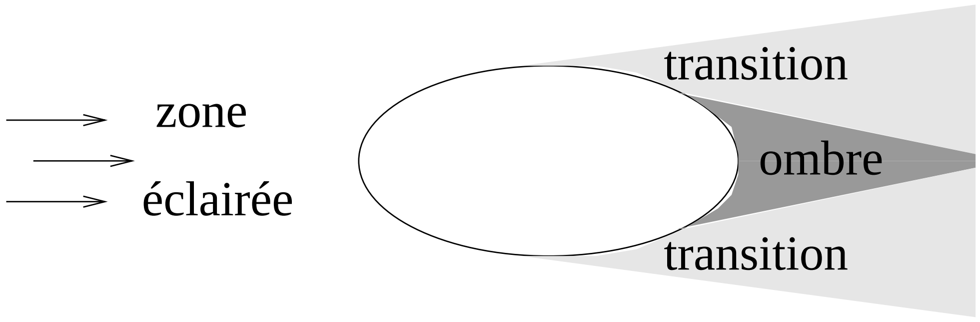
Méthodes directes, coût $\sim N^3$ - Méthodes itératives, coût $\sim N_{iter}\, N^2$

1 - EI : Réductions des Coûts de Résolution

- Modifier la matrice du système :
  - Discrétisations microlocales (DM) $\longrightarrow$ Réduire la taille du système (T. Abboud, J.-C. Nédélec, B. Zhou ; A. de La Bourdonnaye)
  - Ondelettes $\longrightarrow$ Creuser la matrice (G. Beylkin, R.R. Coifman, V. Rokhlin ; ...)
- Accélérer les produits matrice-vecteur :
  - Regular Grid Method $\longrightarrow$ Utilisation des FFT (A.N. Bespalov)
  - Panel Clustering $\longrightarrow$ Développement de la fonction de Green (S.A. Sauter)
  - Fast Multipole Methods (FMM) $\longrightarrow$ Développement de la fonction de Green (V. Rokhlin, W.C. Chew, E. Darve, ...)
- **Notre choix : DM + FMM**

2 - DM : Approximation de la Phase

- **Selon les méthodes asymptotiques :**
  - Méthode des Rayons
  - Théorie Géométrique de la Diffraction
  - Théorie Physique de la Diffraction
  - Théorie Uniforme de la Diffraction
- **Développements asymptotiques** selon les différentes zones :



- **Résultats justifiés par l'Analyse Microlocale**

  R.B. Melrose, M.E. Taylor, ...

- Pour une **onde incidente plane** $e^{\imath k \xi_{inc}}$ et un **objet régulier convexe** :

$$X = A e^{\imath \phi} \ , \quad A = \ \text{Amplitude} \ \ , \quad \phi = \ \text{Phase}$$

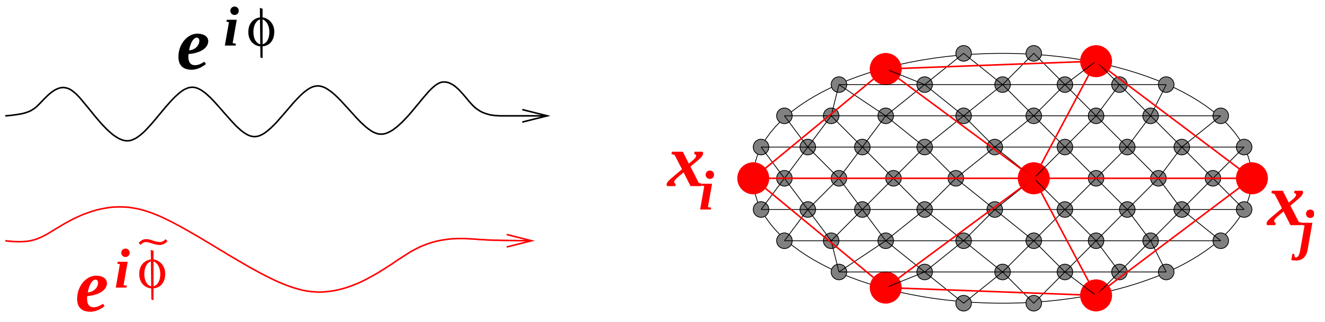
  - Développement de A différent d'une zone à l'autre
  - Développement de ϕ valable dans toutes les zones :
    $\boldsymbol{\phi} = k\phi_0 + \mathcal{O}(k^{1/3}) \boldsymbol{\approx k\phi_0}$ avec $\phi_0(x) = \xi_{inc} \cdot x$

- **Idée retenue :** Approximation de la phase
  $\Longrightarrow$ Isoler la partie la plus oscillante de l'inconnue

- **Difficultés :** Objets non convexes (réflexions multiples)
  Ondes incidentes générales

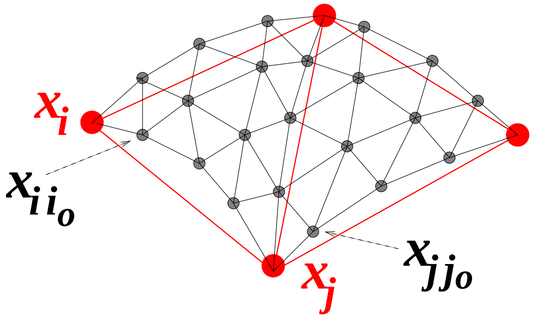
2 - DM : Réduction de la Taille du Système

(T. Abboud, J.-C. Nédélec, B. Zhou)



- **Nouvelle inconnue** $\widetilde{X}$ telle que $X = \widetilde{X} e^{\imath k \phi_0}$, $\boldsymbol{\widetilde{\phi} = \mathcal{O}(k^{1/3})}$
- **Nouvelles estimations d'erreur** :
  - Terme relatif à la discrétisation de l'inconnue en $(hk^{1/3})^m$
  - Terme relatif à la discrétisation des calculs intégraux en $h^l k$ ou $h^l k^{3/2}$
- **Nouvelle discrétisation :**
  - Nombre de degrés de liberté $N_g \longleftrightarrow \widetilde{\phi} \longleftrightarrow k^{1/3}$, $\boldsymbol{N_g \sim k^{2/3}}$
  - Discrétisation fine des intégrales

2 - DM : Discrétisation selon un Double Maillage



- **Un maillage grossier $(t_i)_i$:** Γ_g, $N_g \sim k^{2/3}$
  Discrétisation de l'inconnue $\Longrightarrow$ Fonctions de base définies sur Γ_g
- **Un maillage fin $(t_{ii_0})_{ii_0}$:** Γ_f, $N_f \sim k^2$
  - Evaluation de la normale et des fonctions oscillantes $e^{\imath k\phi_0}$ et $G(k,.)$
  - Cas de Maxwell : Champs tangents définis sur Γ_f
- **Lien entre les deux maillages :** Γ_f obtenu par raffinement de Γ_g et projection sur la surface de l'objet $(\pi) \longrightarrow$ mise en place d'un outil sous I-deas pour la projection

2 - DM : Nouveau Système Discrétisé

- **Nouveau système** $\widetilde{\mathcal{M}}\widetilde{X} = \widetilde{b}$ de taille $N_g \times N_g \sim k^{2/3} \times k^{2/3}$.
- **Nouvelles matrices**

$$(\widetilde{T^1_{r,h}})_{\hat{i},\hat{j}} = k \sum_{t_i} \sum_{t_j} \sum_{\boldsymbol{i_0}} \sum_{\boldsymbol{j_0}} \boldsymbol{\mathcal{J}_{ii_0}} \, \boldsymbol{\mathcal{J}_{jj_0}} \, \varphi^{\pi}_{\hat{j}}(\boldsymbol{\pi^{-1}(x_{jj_0})}) \cdot \overline{\varphi^{\pi}_{\hat{i}}(\boldsymbol{\pi^{-1}(x_{ii_0})})}$$
$$. G_r(k, |\boldsymbol{x_{jj_0}} - \boldsymbol{x_{ii_0}}|) \, \boldsymbol{e^{\imath k \phi_0(x_{jj_0})}} \, \boldsymbol{e^{-\imath k \phi_0(x_{ii_0})}}$$

- **Complexité :**
  - Mémoire consommée : $\mathcal{O}(\boldsymbol{N_f})$
  - Coût de calcul de la résolution : $\mathcal{O}(N_g^2) = \mathcal{O}(\boldsymbol{N_f^{2/3}})$
  - Coût de calcul de la matrice : $\mathcal{O}(\boldsymbol{N_f^2})$
- **Accélération du calcul de la matrice :**
  - Idée des auteurs : Théorie de la phase stationnaire $\longrightarrow$ Difficultés en 3 D
  - Notre idée : **Méthode multipôles rapide**

3 - Méthode Multipôles Rapide : Idée Générale

- Calculer : $\forall i = 1, N \quad F_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}\, Y_j$ $\longrightarrow$ Complexité $= \mathcal{O}(N^2)$
- **Supposons : $\exists\, (a_i)_i\,,\ (b_j)_j \;/\; M_{ij} \;=\; a_i\, b_j$**

$\Longrightarrow$ Algorithme :

$$\text{Etape 1 : } B = \sum_{j=1}^{N} b_j\, Yj$$

$$\text{Etape 2 : } \forall i,\ F_i = a_i B$$

$\longrightarrow$ Complexité $= \mathcal{O}(N)$

- **Supposons : $\exists\, (a_i^l)_{il}\,,\ (b_j^l)_{jl} \;/\; M_{ij} \;=\; \sum_{l=1}^{L} a_i^l\, b_j^l\ ,\quad L << N$**

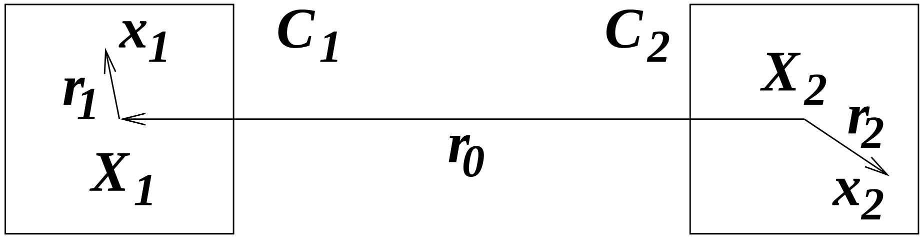
$\Longrightarrow$ Algorithme :

$$\text{Etape 1 : } \forall l\,,\ B^l = \sum_{j=1}^{N} b_j^l\, Yj$$

$$\text{Etape 2 : } \forall i\,,\ F_i = \sum_{l=1}^{L} a_i^l B^l$$

$\longrightarrow$ Complexité $= \mathcal{O}(N\, L)$

3 - Méthode Multipôles Rapide (FMM)



$$r_0 = X_1 - X_2,\ r_i = x_i - X_i,\ r = r_1 - r_2,\ |\boldsymbol{r}| < |\boldsymbol{r_0}|$$

- **Série de Gegenbauer :** $G(k, |x_1 - x_2|) = \dfrac{e^{\imath k|x_1 - x_2|}}{4\pi|x_1 - x_2|} = \dfrac{\imath k}{4\pi} h_0^{(1)}(k|r_0 + r|)$

$$G(k, |x_1 - x_2|) = \frac{\imath k}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, h_l^{(1)}(k|r_0|)\, j_l(k|r|)\, P_l(\cos(r, r_0))$$

- **Découplage r_1 et r_2 :** $j_l(k|r|)\, P_l(\cos(r, r_0)) = \dfrac{\imath^l}{4\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{S}^2} P_l(\cos(s, r_0)) e^{\imath k s \cdot r} ds$

3 - Méthode Multipôles Rapide (FMM)

- **Fonctions de transfert :**

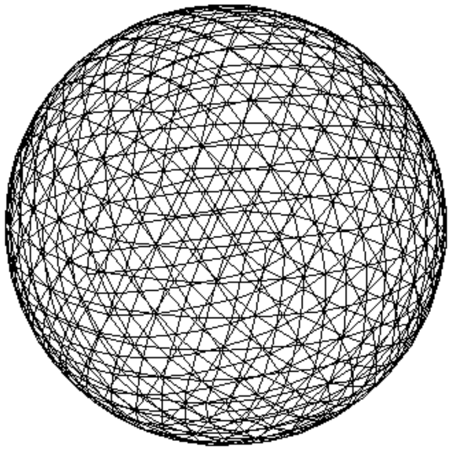
$$\mathcal{T}_{L,r_0}(s) = \imath k \sum_{l=0}^{L} \frac{(2l+1)\imath^l}{4\pi}\, h_l^{(1)}(k|r_0|)\, P_l(\cos(s, r_0))$$

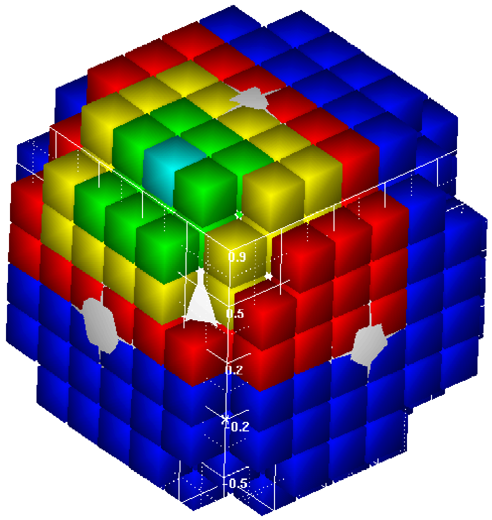
- **Développement de la fonction de Green** $(|\boldsymbol{r}| < |\boldsymbol{r_0}|)$ **:**

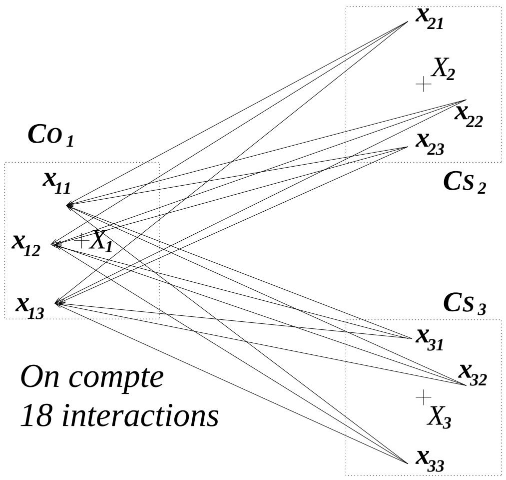
$$G(k, |x_1 - x_2|) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^{S} \omega_p\, \boldsymbol{e^{\imath k s_p \cdot r_1}\, \mathcal{T}_{L,r_0}(s_p)\, e^{-\imath k s_p \cdot r_2}}$$

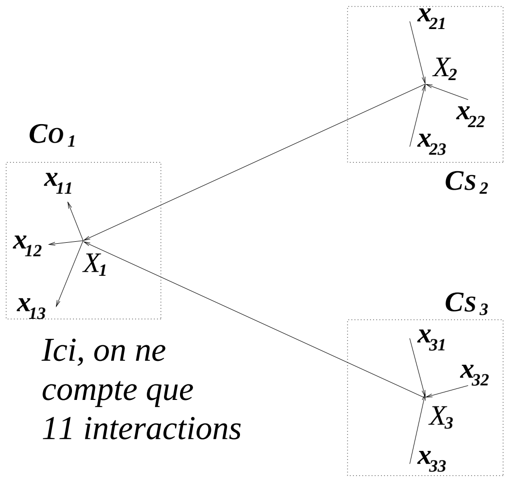
- **Troncature et discrétisation de la sphère unité :**

$$L \sim kd\,,\ S \sim L^2 \ \text{ avec } \ d = \text{diamètre des boîtes}$$




0.9
0.5
0.2
-0.2
-0.5


Co_1
x_{11}
x_{12}
x_{13}
X_1
x_{21}
X_2
x_{22}
x_{23}
Cs_2
Cs_3
x_{31}
x_{32}
X_3
x_{33}
On compte
18 interactions


Co_1
x_{11}
x_{12}
X_1
x_{13}
x_{21}
X_2
x_{22}
x_{23}
Cs_2
Cs_3
x_{31}
x_{32}
X_3
x_{33}
Ici, on ne
compte que
11 interactions

4 - Couplage DM - FMM 1 niveau

- **Les termes matriciels à calculer :**

$$(\widetilde{T^1_{r,h}})_{\hat{i},\hat{j}} = \sum_{i_0} \sum_{j_0} a_{jj_0}\, \overline{a_{ii_0}}\, e^{\imath k \phi_0(x_{jj_0})}\, G_r(k, |x_{jj_0} - x_{ii_0}|)\, e^{-\imath k \phi_0(x_{ii_0})}$$

- **Approximation de la matrice lointaine par la FMM 1 niveau :**

$$(\widetilde{T^{1,ap}_{r,h}})_{\hat{i},\hat{j}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^{S} \omega_p \sum_{C / T^s_j \cap C \neq \varnothing} \; \sum_{j_0 / x_{jj_0} \in C} a_{jj_0}\, e^{\imath k \phi_0(x_{jj_0})}\, e^{\imath k s_p \cdot r_{jj_0}}$$

$$\sum_{\widetilde{C} \text{ loin de } C / T^s_i \cap \widetilde{C} \neq \varnothing} \mathcal{T}^{\Re}_{L, r_{C\widetilde{C}}}(s_p) \sum_{i_0 / x_{ii_0} \in \widetilde{C}} \overline{a_{ii_0}}\, e^{-\imath k \phi_0(x_{ii_0})}\, e^{-\imath k s_p \cdot r_{ii_0}}$$

4 - Algorithme DM - FMM 1 niveau

- **Précalculs**
  - Fonctions de transfert : $\mathcal{T}^{\Re}_{L,r_{C\widetilde{C}}}(s_p)$
  - Fonctions "de radiation" ou "far fields" :

$$F_{jC}(s_p) = \sum_{j_0/x_{jj_0}\in C} a_{jj_0}\, e^{\imath k\phi_0(x_{jj_0})}\, e^{\imath k s_p\cdot r_{jj_0}}$$

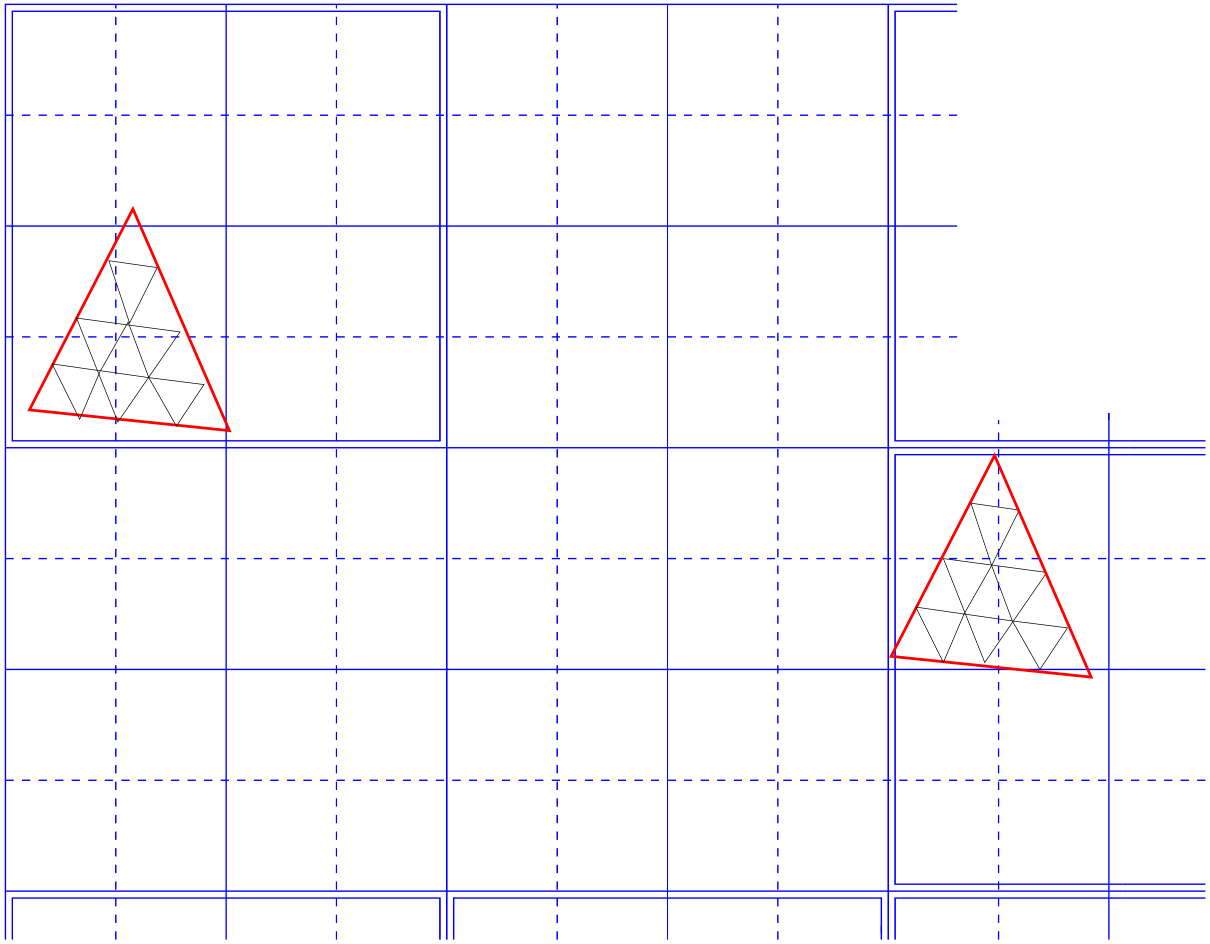
- **Le terme matriciel :**

$$(\widetilde{T^{1,ap}_{r,h}})_{\hat{i},\hat{j}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{S}\omega_p \sum_{C/T^s_j\cap C\neq\varnothing} F_{jC}(s_p) \sum_{\widetilde{C}\text{ loin de }C/T^s_i\cap\widetilde{C}\neq\varnothing} \mathcal{T}^{\Re}_{L,r_{C\widetilde{C}}}(s_p)\,\overline{F_{i\widetilde{C}}(s_p)}$$

4 - Comparaison avec les Méthodes Classiques

	Précalcul	Résolution	Mémoire
Discrétisation Microlocale sans Phase Stationnaire	N_f^2	$N_{iter}\, \boldsymbol{N_f^{2/3}}$	$\boldsymbol{N_f}$
FMM 1 niveau $N_{fmm} \sim N_f^{1/2}$	$N_f^{5/4}$	$N_{iter}\, N_f^{3/2}$	$N_f^{3/2}$
Discrétisation Microlocale avec FMM 1 niveau	$\boldsymbol{N_f^{3/2}}$	$N_{iter}\, \boldsymbol{N_f^{2/3}}$	$\boldsymbol{N_f}$

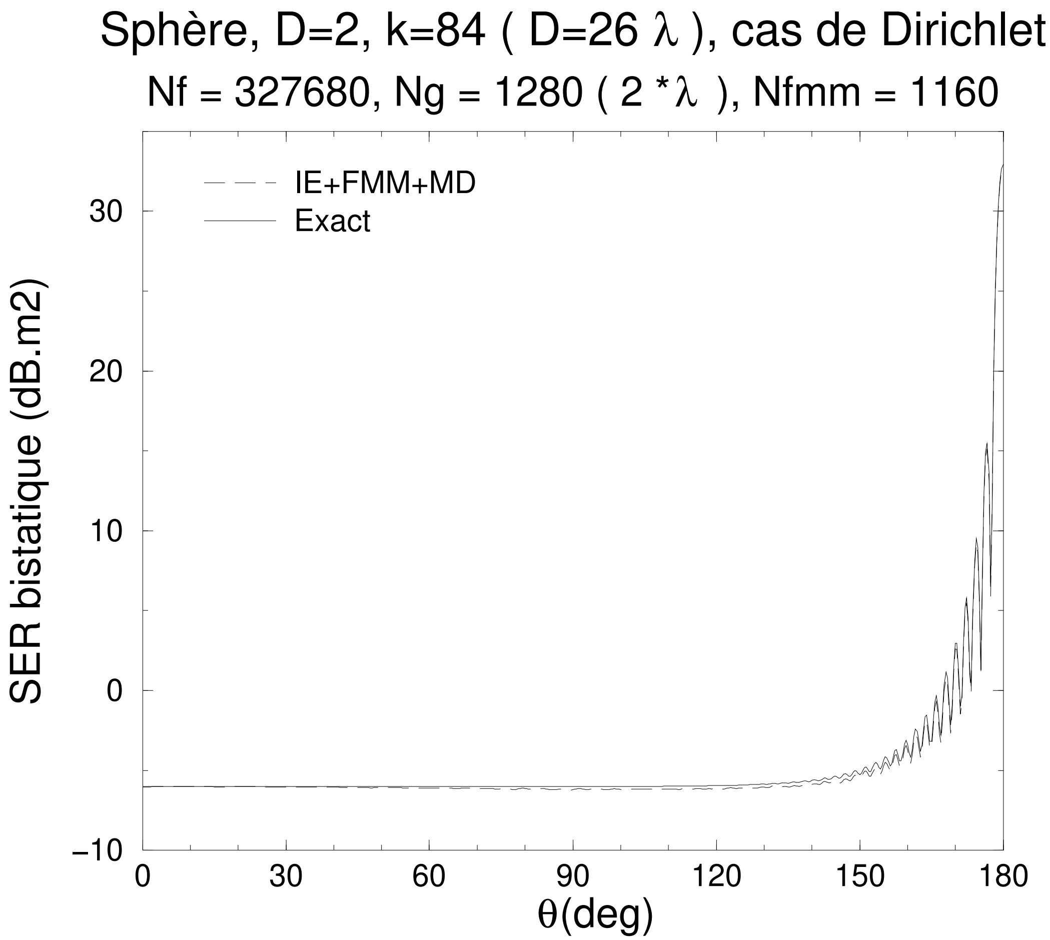
4 - Couplage DM - FMM multi-niveaux



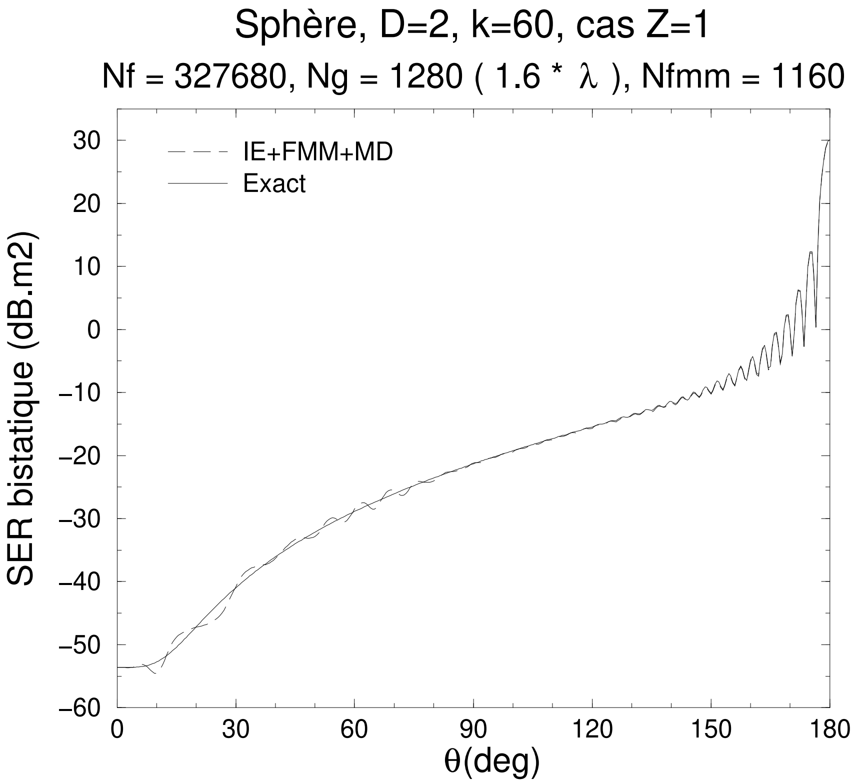
4 - Comparaison avec les Méthodes Classiques

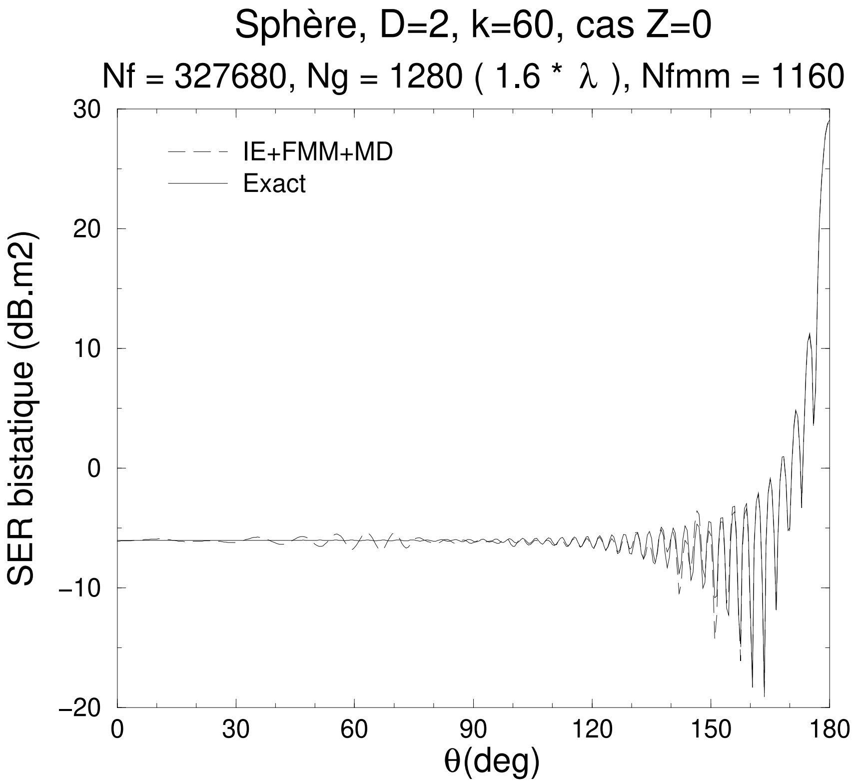
	Précalcul	Résolution	Mémoire
DM sans Ph. Stat.	N_f^2	$N_{iter}\ \boldsymbol{N_f^{2/3}}$	$\boldsymbol{N_f}$
FMM multi-niveaux $N_{fmm} \sim N_f$	$N_f\ \ln^2(N_f)$	$N_{iter}\, N_f\ \ln^2(N_f)$	$N_f\ \ln(N_f)$
DM + FMM multi-niveaux	$\boldsymbol{N_f^{4/3}} +$ $\boldsymbol{\mathcal{C}\ N_f\ \ln^2(N_f)}$	$N_{iter}\ \boldsymbol{N_f^{2/3}}$	$\boldsymbol{N_f}$

5 - Helmholtz - Cond. de Dirichlet
sphère unité

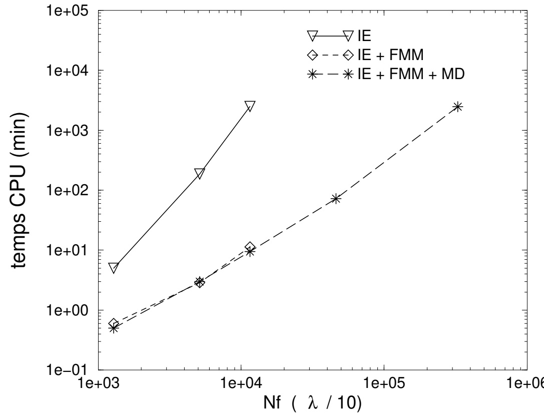


5 - Helmholtz - Cond. de Robin et de Neumann
sphère unité

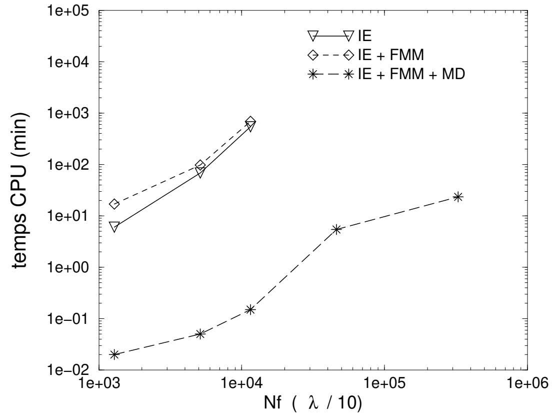




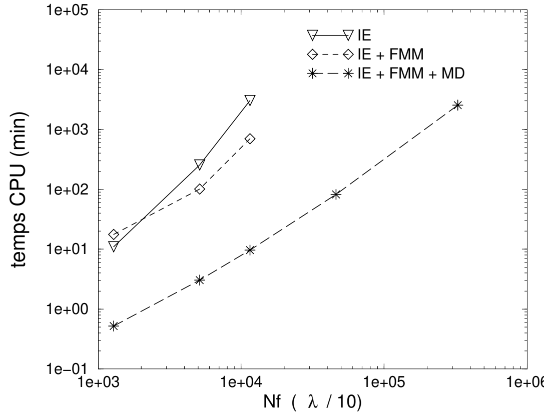
5 - Helmholtz - Cond. de Dirichlet
sphère unité



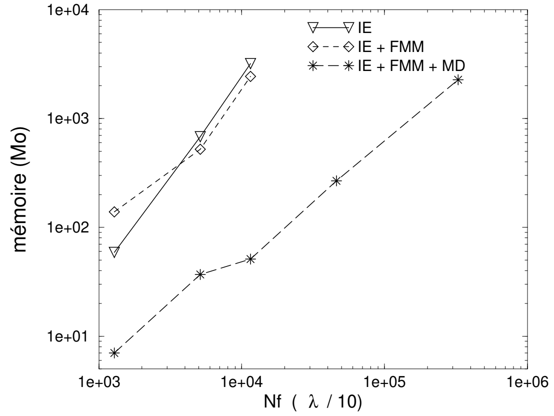
a) Précalcul



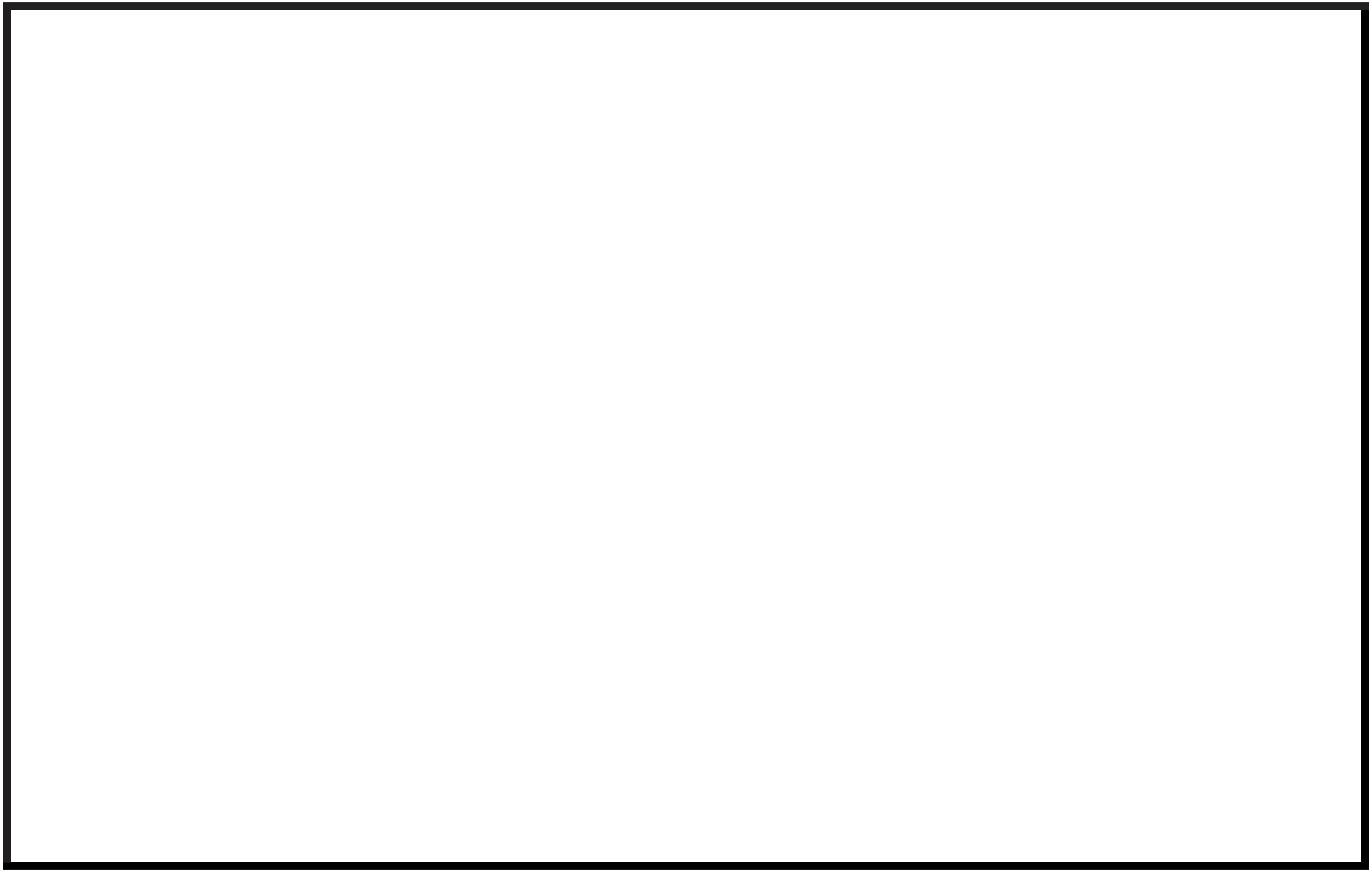
b) Résolution



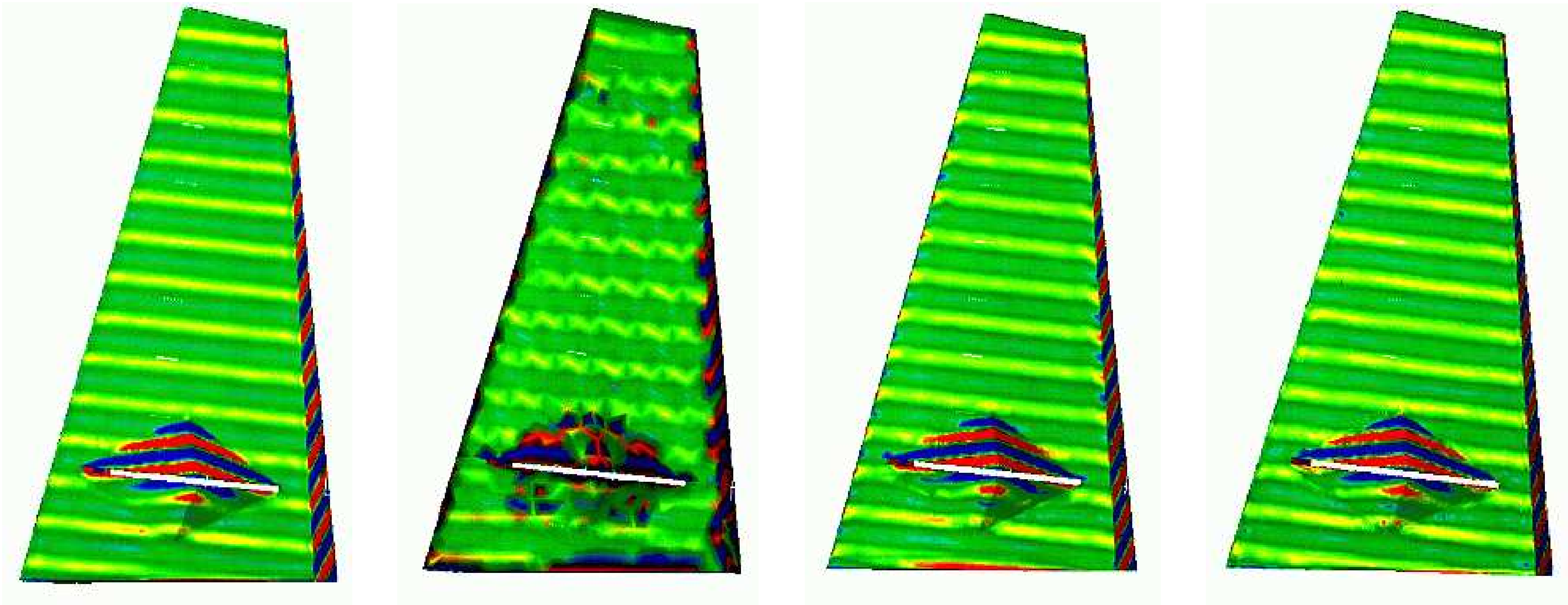
c) Temps CPU total



d) Mémoire consommée

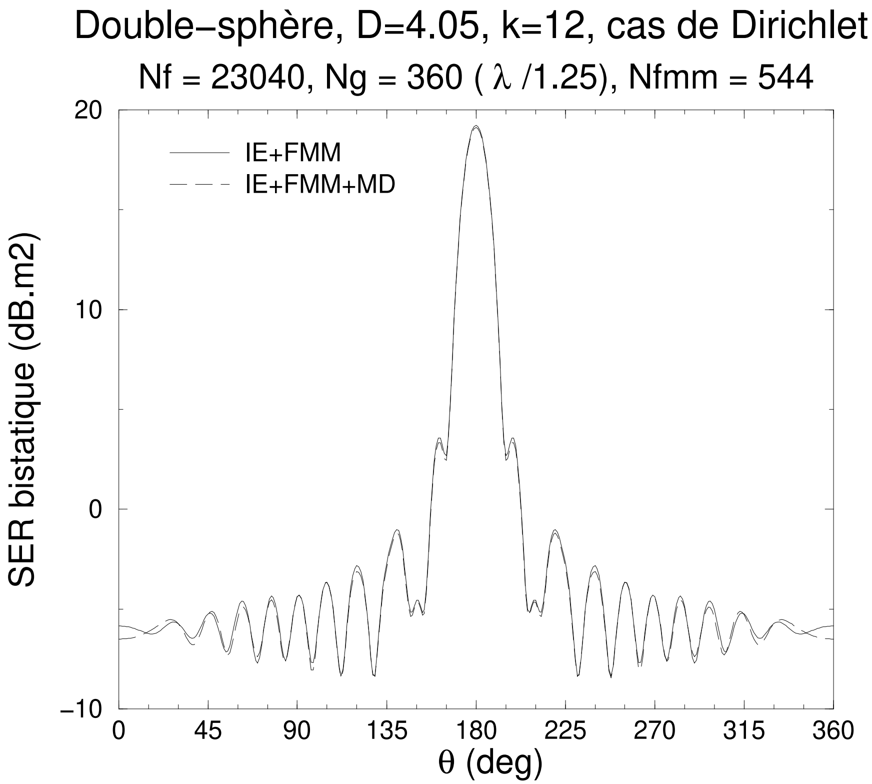


5 - Helmholtz - Cond. de Robin
CETAF

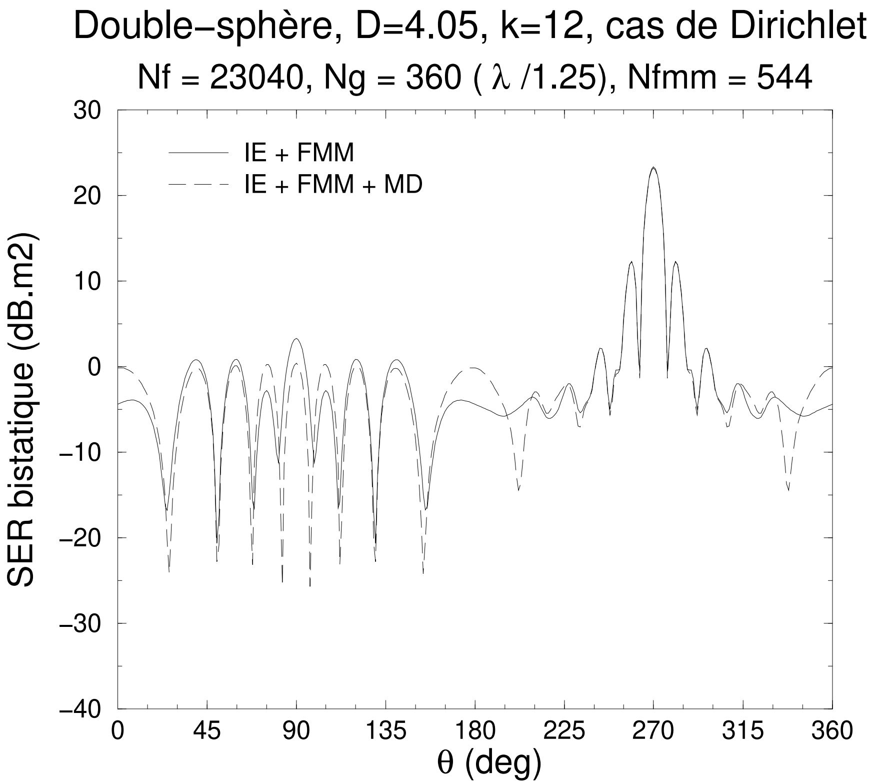


a)IE+FMM(λ /7) b)IE+FMM(λ /1.7) c)IE+FMM+MD d)IE+FMM(λ /7) initialisé par (c)

5 - Helmholtz - Cond. de Dirichlet
double-sphère

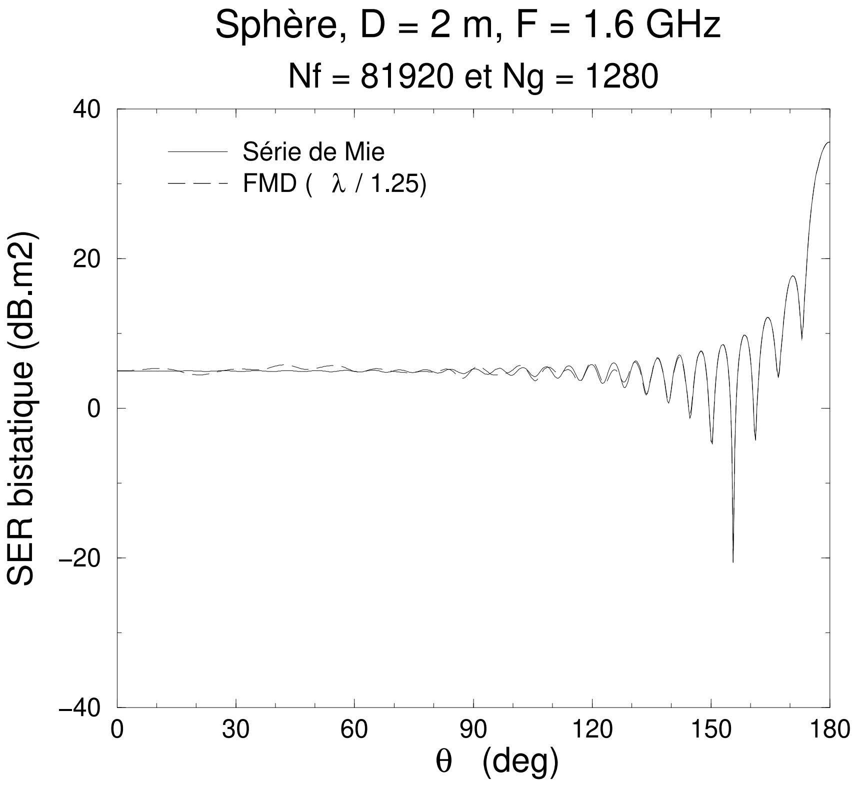


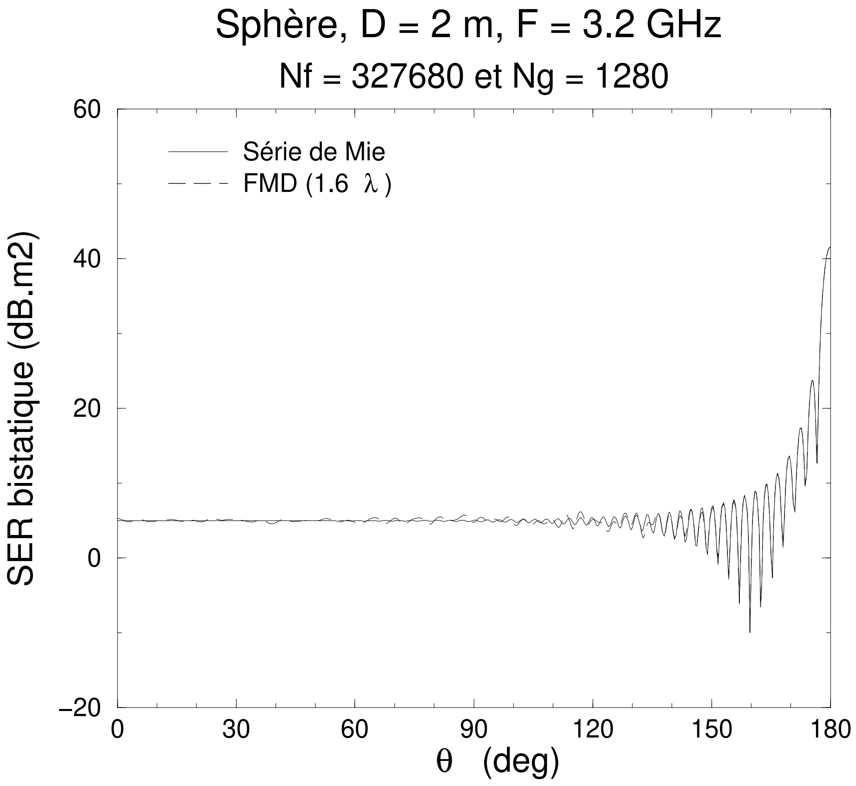
a) Inc = (0,0,-1)



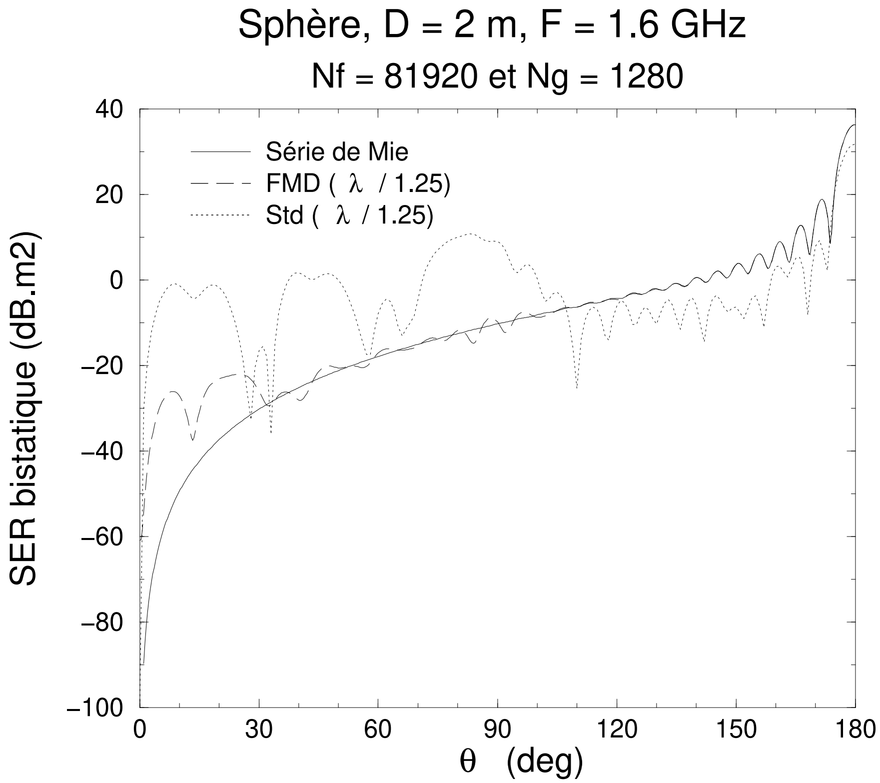
b) Inc = (0,-1,0)

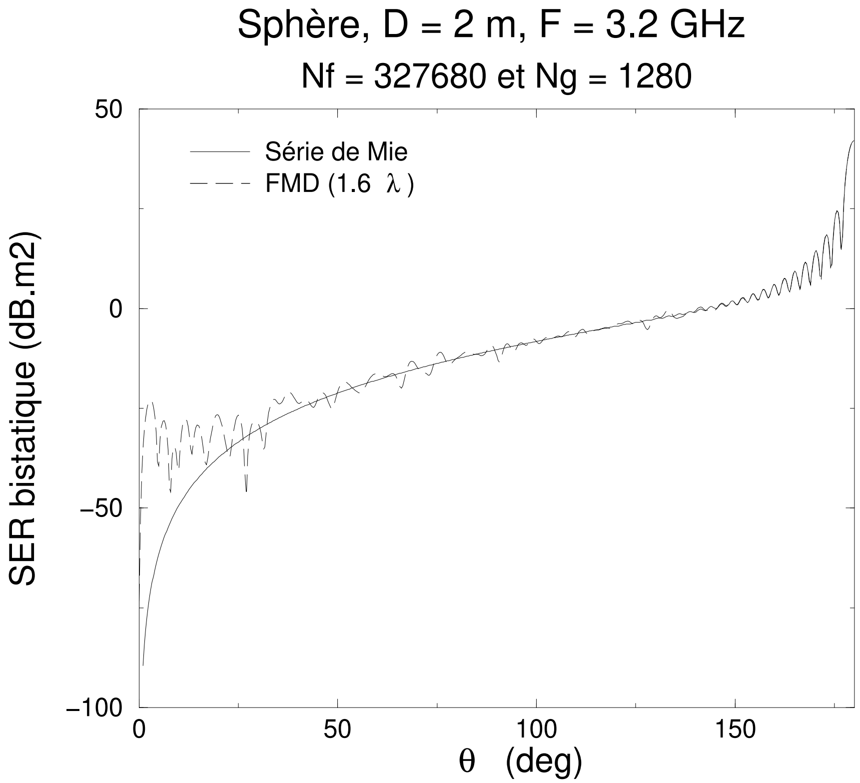
5 - Maxwell - Conducteur Parfait $Z = 0$
sphère unité





5 - Maxwell - Cond. de Leontovitch $Z = 1$
sphère unité





Conclusion

- Nouvelle méthode efficace
- Basée sur la discrétisation microlocale
- Application originale de la FMM

Perspectives

- Approximation géométrique de degré 2
- Meilleure approximation de la phase
- Objets non convexes
- Optimisation de DM + FMM multi-niveaux
- Nouvelles applications