Remerciements

Mes remerciements vont d'abord au professeur Jean ESTERLE. J'ai particulièrement apprécié les qualités humaines et mathématiques qu'il a manifesté pendant la durée de cette thèse pour guider mes pas avec patience. J'ai été notemment sensible à sa capacité à faire percevoir l'esthétique des mathématiques. Que ma profonde gratitude lui soit témoignée.

Les professeurs A. BONAMI et A. ATZMON m'ont fait l'honneur d'accorder de l'intérêt à ce travail et d'accepter d'en être les rapporteurs. Qu'ils en soient vivement remerciés.

Je remercie également Madame A. Bonami et Messieurs R. Deville, N. K. Nikolski, T. Ransford et J. Saint-Raymond pour me faire l'honneur d'accepter d'être membre de mon jury de thèse et particulièrement M.Nikolski qui le préside.

Ce travail n'aurait pas pu se dérouler dans d'aussi bonnes conditions sans l'ambiance sympathique de l'équipe d'Analyse de Bordeaux. Que ses membres soient remerciés d'y avoir contribué.

L'ambiance de camaraderie et de communication qui prévaut chez les thésards est aussi l'un des agréments qui ont marqué cette période de thèse. Qu'ils en soient remerciés et en particulier Thierry Pellé qui fait profiter sans réserve de son savoir-faire en informatique.

Merci également aux membres de ma famille de m'avoir encouragé dans ce travail depuis les lointains là-bas où ils habitent.

Je remercie enfin Madame Mauricette JAUBERT et Monsieur Daniel YNBOURG qui ont assuré le travail d'impression avec rapidité et gentillesse.

Table des matières

1
1

Introduction 5
5

Préliminaires 9

Partie 1. Étude du cas d'une algèbre régulière 15

Chapitre 1. L'algèbre $\mathcal{B}$ et son dual 17
1. L'algèbre $\mathcal{B}$ 17
2. Hyperfonctions, description du dual de $\mathcal{B}$ 19
3. Produit d'une fonction par une hyperfonction 23
4. Platitude 25

Chapitre 2. Idéaux de $\mathcal{B}$ associés à des fonctions intérieures 29

Chapitre 3. Propriété d'approximation à l'aide de fonctions extérieures 37

Chapitre 4. Étude des idéaux I tels que $A^\infty \cap I \neq \{0\}$ 41

Chapitre 5. Étude des idéaux tels que $h(I)$ est un ensemble dénombrable de Γ 47
1. Cas où $h(I) = \{\lambda\},\ \lambda \in \Gamma$. 47
2. Cas où $h(I)$ est dénombrable 52

Partie 2. Étude du cas d'une algèbre quasianalytique 55

Chapitre 6. Idéaux fermés d'une algèbre de fonctions quasianalytique 57
1. Étude des idéaux $I_{S,\mathcal{D}}$ 58
2. Étude de $I \cap A^\infty$ pour I idéal de $\mathcal{D}$. 59

3. Description des idéaux fermés I de $\mathcal{D}$. 62

Bibliographie 65

Introduction

"Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogien und jene praestabilirte Harmonie, welche der Mathematicker so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt"

David Hilbert

Hilbert réalisant la "décomposition spectrale" des opérateurs linéaires, Perrin analysant le bleu du ciel, Monet, Debussy et Proust recréant, pour notre émerveillement, le scintillement de la lumière sur la mer, travaillaient tous dans le même but [...]"

Roger Godement

L'objet de ce travail de thèse est la description des idéaux fermés de certaines algèbres de Fréchet de fonctions indéfiniement différentiables sur le cercle Γ. Remarquons que si l'on note α l'application $z \mapsto z$, la multiplication par α ou par α^{-1} correspond à une translation à gauche ou à droite sur les coefficients de Fourier de la fonction considérée. Les idéaux fermés I sont alors les sous-espaces invariants par α et α^{-1} lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ considérée est égale à $\mathrm{Vect}\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. La description des idéaux fermés d'une algèbre de fonctions correspond alors au problème classique du sous-espace invariant. La description des idéaux fermés d'algèbres topologiques est lié à l'analyse et à la synthèse harmonique. Il s'agissait à l'origine (cf par exemple [**16**] p 213) de résoudre un problème de cordes vibrantes : Le son produit par une corde peut être considéré comme l'addition de sons "purs", ses harmoniques; la recherche des harmoniques est l'analyse, et la reconstitution à partir des harmoniques est la synthèse. On verra dans le chapitre de préliminaires une formulation mathématique de cette question et son lien avec la description des idéaux fermés. Nous renvoyons en particulier à [**21**] pour une discussion générale des questions d'Analyse et de Synthèse.

Rappelons quelques uns des résultats de description des idéaux d'algèbres classiques. Soit $\mathcal{C}(\Gamma)$ l'algèbre des fonctions continues sur le cercle unité Γ. On connait alors certains résultats importants [**15**] et [**16**] sur l' algèbre

$$A(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma), \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty\}$$

On note $h(I) = \{z \in \Gamma \ / \ f(z) = 0 \quad (f \in I)\}$. On sait alors [**16**] que si $h(I)$ est dénombrable ou vérifie le critère de Herz (c'est à dire si pour une infinité de valeur de l'entier N, les multiples de de $\frac{2\pi}{N}$ sont soit des points de E, soit à une distance de E au moins égale à $\frac{2\pi}{N}$), on a alors

$$I = I(h(I)) = \{f \in A(\Gamma) \ / \ f \ |_{h(I)} \equiv 0\}.$$

Notons que le critère de Herz est manifestement vérifié par l'ensemble triadique de Cantor.
Il existe en revanche des ensembles (nécessairement non dénombrables) pour lesquels cette description n'est pas vérifiée. Il existe plusieurs démonstrations classiques de ce résultat (cf [**16**] p 121 et p 209).

Mentionnons également le cas de l'algèbre A^∞ définie par

$$A^\infty(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \ / \ \hat{f}(n) = 0 \ \ (n \leq 0)\}.$$

Ses idéaux fermés ont été complètement décrits dans [**24**] à l'aide d'une propriété d'approximation. Dans ce cas, si on note

$$\begin{aligned}
S_\nu &= \exp(\frac{-1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t)) \\
d_I(\lambda) &= \sup\{n \in \mathbb{N} \ / \ f(\lambda) = ... = f^{(n)}(\lambda) = 0 \ (f \in I)\} \text{ si } \lambda \in h(I) \\
I^{(d)}(h(I)) &= \{f \in A^\infty \ / \ f^{(n)} = 0 \ (n \leq d_I(\lambda), \ \lambda \in h(I))\}
\end{aligned}$$

pour chaque idéal I de A^∞, il existe une mesure positive singulière ν telle que $\mathrm{Supp}(\nu) \subset h(I)$ et telle que

$$I = S_\nu A^\infty \cap I^{(d)},$$

en remarquant que $d_I(\lambda) = +\infty$ dès que $\lambda \in \mathrm{Supp}(\nu)$.
Des résultats analogues ont été obtenus dans [**18**] pour les algèbres

$$A^p = \{f \in \mathcal{C}^p(\Gamma) \ / \ \hat{f}(n) = 0, \ (n < 0)\}$$

et dans [**19**] pour l'algèbre

$$A^{-\infty} = \bigcap_{k \geq 1} \{f \in Hol(D) \ / \ |f(z)| = O(\frac{1}{(1-|z|)^k}\}$$

Remarquons également que (cf [**20**]) les idéaux bilatères de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ sont décrits par

$$I = I^{(d)}(h(I))$$

Enfin, si ω est un poids (un poids étant une application sous multiplicative à valeurs dans $[0, +\infty]$), on peut définir une algèbre à poids par

$$A_\omega(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) \ / \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty\}$$

ou un espace de Hilbert par

$$L^2_\omega(\Gamma) = \{f \in L^2 \ / \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \omega(n)^2 < +\infty\}$$

les idéaux de telles algèbres (resp. les sous espaces biinvariants de tels espaces de Hilbert) ont été étudiés respectivement dans [**9, 10**] et dans [**11**].

Les algèbres considérées seront des algèbres topologiques à poids $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ que l'on définit en posant

$$\omega_{\mathcal{B},p}(n) = \begin{cases} (n+1)^p & (n \geq 0) \\ e^{p\sqrt{|n|}} & (n < 0) \end{cases} \quad \text{et } \omega_{\mathcal{D},p}(n) = \begin{cases} (n+1)^p & (n \geq 0) \\ e^{p\frac{|n|}{1+\log(|n|)}} & (n < 0). \end{cases}$$

et on remarque que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ vérifient

$$A^\infty \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}^\infty(\Gamma).$$

On caractérise complètement dans ce travail les idéaux fermés de $\mathcal{D}$ (ils sont engendrés par les idéaux de A^∞). On décrit également tous les idéaux fermés de $\mathcal{B}$ tels que $h(I)$ est fini ou dénombrable. Ces résultats sont interprétés en termes de synthèse pour les éléments de $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{D}^*$.

Préliminaires

On considère l'algèbre $\mathcal{C}(\Gamma)$ des fonctions à valeurs complexes et continues sur le cercle $\Gamma = \partial D$, D désignant le disque unité ouvert.
Une *hyperfonction* φ sur le cercle Γ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, tendant vers 0 à l'infini. On définit pour φ des coefficients de Fourier par les formules :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n\geq 0} \hat{\varphi}(n) z^n \qquad (z \in D) \\ \varphi(z) &= \sum_{n<0} \hat{\varphi}(n) z^n \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}) \end{aligned}$$

Soit $\tilde{\varphi}$ définie par $\begin{cases} \tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) & (z \in D) \\ \tilde{\varphi}(z) = -\varphi(z) & (z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}). \end{cases}$

Le *support de l'hyperfonction* φ est le complémentaire de l'ensemble des $z_0 \in \Gamma$ pour lesquels $\tilde{\varphi}$ possède un prolongement analytique sur un voisinage de z_0. On appellera α l'application $z \mapsto z$. Soit alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ une algèbre localement multiplicativement convexe et complète, telle que $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{A}$ et telle que l'ensemble des caractères bornés sur $\mathcal{A}$ coincide avec les évaluations aux points de Γ.
Pour $\varphi \in \mathcal{A}^*$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \langle (\alpha - z)^{-1}, \varphi \rangle \quad \text{pour } |z| < 1 \\ \varphi(z) &= -\langle (\alpha - z)^{-1}, \varphi \rangle \quad \text{pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

Ceci permet d'identifier $\mathcal{A}^*$ à un ensemble $HF_{\mathcal{A}}$ d'hyperfonctions. Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est homogène au sens de [**23**], ce qui signifie que $f_u : e^{it} \longmapsto f(ue^{it}) \in \mathcal{A}$ pour $f \in \mathcal{A}$ et $u \in \Gamma$ et que l'application $u \longmapsto f_u$ est continue de Γ dans $\mathcal{A}$. La dualité entre $\mathcal{A}$ et $HF_{\mathcal{A}}$ est donnée par la formule

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \hat{\varphi}(-n-1),$$

la série ci-dessus étant convergente au sens d'Abel.
On dira que l'on peut *synthétiser une hyperfonction* $\psi \in HF_{\mathcal{A}}$ *par un ensemble* $M \subset \overline{\mathrm{Vect}(\alpha^n \psi)_{n\in\mathbb{Z}}}^{\omega^*}$ si $\psi \in \tau(M) := \overline{\mathrm{Vect}\{\varphi,\ \varphi \in M\}}^{\omega^*}$. Plusieurs résultats dans la description des idéaux fermés d'une algèbre de fonctions s'expriment en relation avec la synthèse. Nous renvoyons à [**21**] pour une discussion générale des questions d'Analyse et de Synthèse.
Pour décrire les idéaux fermés d'une telle algèbre $\mathcal{A}$, on considère pour E fermé de Γ les ensembles

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{A}}(E) &= \overline{\{f \in \mathcal{A},\ \mathrm{Supp}(f) \cap E = \emptyset\}}^{\mathcal{A}} \\ \text{et} \quad I_{\mathcal{A}}(E) &= \{f \in \mathcal{A},\ f\,|_E \equiv 0\} \end{aligned}$$

Si on note $h(I) = \{z \in \Gamma,\ f(z) = 0,\ (f \in I)\}$, on a $I \subset I_{\mathcal{A}}(h(I))$, et naturellement $J_{\mathcal{A}}(h(I)) \subset I_{\mathcal{A}}(h(I))$. Si de plus, l'algèbre $\mathcal{A}$ est *régulière* sur Γ au sens de [**17**] p 221, c'est à dire si pour tout arc fermé L d'intérieur non vide et tout $z \in \Gamma \setminus L$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f\,|_L \equiv 0$ et $f(z) = 1$, alors $J_{\mathcal{A}}(h(I)) \subset I$. (Notons que dans tous les cas classiques d'algèbres non régulières, $J_{\mathcal{A}}(E) = \{0\}$ pour tout fermé E non vide). On dit que E est *de synthèse* si $J_{\mathcal{A}}(E) = I_{\mathcal{A}}(E)$ (il peut évidemment arriver, comme dans le cas de l'algèbre $\mathcal{O}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma)\ /\ \overline{\lim_{|n|\to+\infty}} |\hat{f}(n)|^{\frac{1}{n}} < 1\}$ pour les ensembles infinis que $J_{\mathcal{A}}(E) = I_{\mathcal{A}}(E) = \{0\}$).
Pour un *poids* ω, c'est à dire une application sous-multiplicative de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$, on considère

$$A_\omega(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma)/\ \|f\|_\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty\}.$$

La théorie des idéaux fermés de $A_\omega(\Gamma)$ est classique pour $\omega \equiv 1$; on retrouve alors le cas de l'algèbre usuelle de N. Wiener $A(\Gamma)$ (cf par exemple [**15**] et [**16**]).
Si

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log(\omega(n))}{1+n^2} < +\infty \quad (\mathcal{R}_1),$$

l'algèbre $A_\omega(\Gamma)$ est régulière et a Γ pour spectre de Gelfand. Dans ce cas, on a pour tout idéal I

$$J_{A_\omega(\Gamma)}(h(I)) \subset I \text{ et } h(J_{A_\omega(\Gamma)}(h(I)) = h(I).$$

De même, si Λ est une famille filtrante croissante (c'est-à-dire si $\sup_{i\in\{1,\dots k\}} \omega_i \in \Lambda$ pour toute famille finie d'éléments de Λ) on peut considérer

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\omega\in\Lambda} A_\omega(\Gamma)$$

S'il existe un poids σ_0 vérifiant $(\mathcal{R}_1)$ tel que

$$\omega(n) = O(\sigma_0(n)) \quad (|n| \to +\infty) \quad (\mathcal{R}_2)$$

pour tout $\omega \in \Lambda$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est alors régulière. Il résulte immédiatement de la démonstration de [**26**] th 2.2 que l'on a la propriété suivante :

PROPOSITION 0.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre localement multiplicativement convexe et vérifiant $(\mathcal{R}_2)$. Alors les arcs fermés L non réduits à un point sont des ensembles de synthèse.*

Dans une première partie, on s'intéresse à une algèbre régulière. Posons pour $k \geq 1$

$$\omega_k(n) = \begin{cases} e^{k\sqrt{|n|}} \ (n < 0) \\ (n+1)^k \ (n \geq 0) \end{cases} .$$

On considère ici l'algèbre

$$\mathcal{B} = \bigcap_{k\geq 1} A_{\omega_k}(\Gamma)$$

Il est immédiat de remarquer que les fonctions de $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ si on observe le critère élémentaire selon lequel une fonction de $L^1(\Gamma)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ si et seulement si $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|^p})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. L'algèbre $\mathcal{B}$ est également clairement une algèbre de Fréchet.

Les conditions de régularité liées aux poids ω_k permettent d'obtenir dans ce cas des propriétés de division et d'approximation particulières. En effet, si ν est une mesure positive singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, on considère S_ν définie sur D et sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ par la formule

$$S_\nu(z) = \exp(-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t))$$

$$(\text{on pose } S_\nu(\infty) = \exp(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\nu(t)).)$$

On peut définir une hyperfonction S_ν^* en posant

$$\begin{aligned} S_\nu^*(z) &= \frac{1}{S_\nu(z)} - \frac{1}{S_\nu(\infty)} \quad (|z|<1) \\ S_\nu^*(z) &= -\frac{1}{S_\nu(z)} + \frac{1}{S_\nu(\infty)} \quad (|z|>1) \end{aligned}$$

et on obtient une description des idéaux $I_{S_\nu} := \tau(S_\nu^*)^\perp$ en termes de division. Le résultat principal est le fait que

$$I_{S_\nu} = S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)),$$

où $I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{B}$ s'annulant avec toutes leurs dérivées sur E.

On obtient également au paragraphe 3 une propriété d'approximation à l'aide de fonctions extérieures pour les fonctions de $I^\infty(E)$ lorsque E vérifie la condition géométrique de Carleson $\int_0^{2\pi} \log(\frac{2}{\mathrm{d}(e^{it},C)})dt < +\infty$. On montre qu'il existe dans ce cas une suite $(F_k)_{k\geq 1}$ de fonctions de $A^\infty \cap I^\infty(E)$, où $A^\infty := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma), \hat{f}(n) = 0,\ (n<0)\}$ telle que l'on ait pour la topologie de $\mathcal{B}$

$$f = \lim_{k\to+\infty} fF_k \quad (f \in I^\infty(E))$$

On obtient alors une description de tous les idéaux de $\mathcal{B}$ dont l'intersection avec $A^\infty := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma), \hat{f}(n) = 0,\ (n<0)\}$ est non réduite à $\{0\}$ au paragraphe 4. On note, pour $I \subset \mathcal{B}$, et pour $\lambda \in h(I)$, $d_I(\lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N},\ f(\lambda) = ... = f^{(n)}(\lambda) = 0,\ (f \in I)\}$. On note alors

$$I^{(d)} := \{f \in \mathcal{B},\ f(\lambda) = ... = f^{(d_I(\lambda))}(\lambda) = 0,\ (\lambda \in h(I))\}.$$

et on obtient alors pour tout idéal I tel que $I \cap A^\infty \neq 0$

$$I = I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$$

où S_ν est une fonction intérieure singulière.

Enfin, on obtient une description complète des idéaux I de $\mathcal{B}$ tels que $h(I)$ est dénombrable. Les calculs sont sensiblement plus simples que dans la situation étudiée dans [**10**]. En particulier, toute hyperfonction $\varphi \in HF_{\mathcal{B}}$ dont le support est dénombrable peut être synthétisée par des dérivées de mesures de Dirac et des hyperfonctions du type S_ν^* où ν est atomique.

Il serait intéressant de voir si, pour certains ensembles parfaits E de mesure nulle, on a $\bigcap_{\mathrm{Supp}\, S_\nu \subset E} I_{S_\nu} = J_{\mathcal{B}}(E)$, ainsi que d'envisager la synthèse pour des ensembles non dénombrables. Cet objectif n'a pas été atteint.

Dans une deuxième partie, on étudie au chapitre 6 le cas d'une algèbre quasi-analytique en posant

$$\omega'_k(n) = \begin{cases} e^{\frac{k|n|}{1+\log(|n|)}} & (n < 0) \\ (1+n)^k & (n \geq 0). \end{cases}$$

On s'intéresse alors à l'algèbre

$$\mathcal{D} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{\omega'_k}(\Gamma).$$

qui a manifestement des propriétés de division analogues à celles de $\mathcal{B}$. En appliquant un résultat de factorisation général démontré par A.A Borichev, on montre que tout idéal I de $\mathcal{D}$ vérifie $I \cap A^\infty \neq \{0\}$. On en déduit une description de *tous* les idéaux fermés de $\mathcal{D}$ et des résultats généraux de synthèse pour les hyperfonctions $\varphi \in HF_{\mathcal{D}}$.

Partie 1

Étude du cas d'une algèbre régulière

CHAPITRE 1

L'algèbre $\mathcal{B}$ et son dual

1. L'algèbre $\mathcal{B}$

L'algèbre $\mathcal{B}$ apparait comme une intersection d'algèbres à poids.
Un *poids* ω est une application sous-multiplicative de $\mathbb{Z}$ dans $[1, +\infty[$. Il est dit *régulier* si la condition

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log(\omega(n))}{1+n^2} < +\infty$$

est réalisée. Dans ce cas, l'algèbre

$$A_\omega(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma)\ /\ \|f\|_\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty\}$$

est une algèbre régulière [**17**]. Rappelons que cela signifie que si x est un point de Γ et si A est un compact de Γ, il existe une fonction f de $A_\omega(\Gamma)$ telle que $f(x) = 1$ et $f\ |_A \equiv 0$.
On considère la famille de poids

$$\omega_k(n) = \begin{cases} e^{k\sqrt{|n|}}, n < 0 \\ (1+n)^k, n \geq 0 \end{cases}$$

et, clairement,

$$\mathcal{B} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{\omega_k}(\Gamma)$$

est une algèbre de Fréchet régulière pour la famille $(\|.\|_k)_{k\geq 1}$ où $\|.\|_k = \|.\|_{\omega_k}$ $(k \geq 1)$

Remarquons que celle-ci vérifie la propriété de stabilité suivante :
pour $f \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \Gamma$, $\xi \in \Gamma$, on pose

$$f_\lambda(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(\lambda)}{\xi-\lambda} \text{ pour } \xi \neq \lambda \\ f'(\lambda) \text{ pour } \xi = \lambda \end{cases} \tag{1.1}$$

On a donc $(\alpha - \lambda)f_\lambda = f - f(\lambda)$ et

$$f_\lambda \in \mathcal{B}, \quad (f \in \mathcal{B},\ \lambda \in \Gamma) \tag{1.2}$$

En effet,

$$f - f(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(\alpha^n - \lambda^n).$$

Il vient alors, les séries étant convergentes dans $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$,

$$f_\lambda = \sum_{n>0} \hat{f}(n)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\alpha + ... + \alpha^{n-1}) - \sum_{n<0} \hat{f}(n)\alpha^n(\lambda^{-1} + ... + \lambda^n\alpha^{-n-1})$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>0} \|\hat{f}(n)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\alpha + ... + \alpha^{n-1})\|_p + \sum_{n<0} \|\hat{f}(n)\alpha^n(\lambda^{-1} + ... + \lambda^n\alpha^{-n-1})\|_p \\
\leq\ & \sum_{n>0} |\hat{f}(n)|(\|1\|_p + ... + \|\alpha^{n-1}\|_p) + \sum_{n<0} |\hat{f}(n)|\|\alpha^n\|_p(\|1\|_p + ... + \|\alpha^{-n-1}\|_p) \\
\leq\ & \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)|n^{p+1} + \sum_{n<0} |\hat{f}(n)|e^{p\sqrt{|n|}}|n|^{p+1} \\
\leq\ & K\Big(\sum_{n>0} |\hat{f}(n)|n^{p+1} + \sum_{n<0} |\hat{f}(n)|e^{(p+1)\sqrt{|n|}}\Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Ceci montre que f_λ est un élément de $\mathcal{B}$.

Pour I idéal d'une des algèbres considérées ci-dessus, on notera

$$h(I) = \{z \in \Gamma \ / \ f(z) = 0 (f \in I)\}$$

l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions de l'idéal I.

Remarque 1.1. Soit A une algèbre de Fréchet commutative unitaire et soit $\widehat{A}$ l'ensemble des caractères χ continus de A. Pour $x \in A$, notons $\mathrm{Sp}(x)$ le spectre de x dans A. Alors $\mathrm{Sp}(x) = \{\chi(x)\}_{\chi\in\hat{A}}$. Si I est un idéal fermé de A, posons $Z(I) = \{\chi \in \widehat{A} \ / \ I \subset \mathrm{Ker}\,(\chi)\}$ et soit π la surjection canonique de A sur $\frac{A}{I}$. Alors l'application $\chi \to \chi \circ \pi$ est une bijection de $\widehat{(\frac{A}{I})}$ sur $Z(I)$. On en déduit que si I est un idéal fermé de $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{B}$, $\mathrm{Sp}(\pi(f)) = f(h(I))$. Donc si $f \in \mathcal{B}$, $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in h(I)$, alors il existe $g \in \mathcal{B}$ et $h \in I$, tels que

$$fg = 1 + h$$

On considère maintenant deux types d'idéaux particuliers. Si E est un fermé de Γ, on note $I(E)$(resp. $I_\omega(E)$) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{B}$ (resp de $A_\omega(\Gamma)$) s'annulant sur E et on note $J(E)$(resp $J_\omega(E)$) l'adhérence dans $\mathcal{B}$ (resp. dans $A_\omega(\Gamma)$) de l'ensemble des fonctions nulles au voisinage de E. On dit de même que dans [**15**] qu'une fonction est *de synthèse* pour E dans $\mathcal{B}$ (resp. dans $A_\omega(\Gamma)$) si elle appartient à $J(E)$(resp $J_\omega(E)$). Le fait que l'algèbre $A_\omega(\Gamma)$ soit régulière implique alors que, E étant un fermé de Γ,

$$h(I_\omega(E)) = h(J_\omega(E)) = E$$

et que pour tout idéal fermé I de $A_\omega(\Gamma)$ tel que $h(I) = E$, on a

$$J_\omega(E) \subset I \subset I_\omega(E)$$

D'autre part, de même que dans [**10, 26**], on a

$$\overline{J(E)}^{A_{\omega_k}} = J_{\omega_k}(E) \tag{1.3}$$

$$J(E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_{\omega_k}(E) \tag{1.4}$$

$$\text{et} \qquad J(E) \subset I \subset I(E). \tag{1.5}$$

pour tout idéal fermé I de $\mathcal{B}$ tel que $h(I) = E$.

Dans toute la suite, on notera $\alpha : z \mapsto z$ l'application identité; on a donc, pour $f \in \mathcal{B}$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\alpha^n \tag{1.6}$$

la série étant convergente au sens de la topologie de $\mathcal{B}$.

2. Hyperfonctions, description du dual de $\mathcal{B}$

Le dual $\mathcal{B}^*$ de l'algèbre $\mathcal{B}$ pourra être interprété comme un ensemble d'hyperfonctions.

DÉFINITION 1.1. Une hyperfonction φ sur le cercle Γ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, tendant vers 0 à l'infini.
L'ensemble des hyperfonctions sera noté $HF(\Gamma)$.

On définit pour l'hyperfonction φ des coefficients de Fourier par les formules :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n\geq 0} \hat{\varphi}(n) z^n \qquad (z \in D) \\ \varphi(z) &= \sum_{n<0} \hat{\varphi}(n) z^n \qquad (z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}) \end{aligned} \tag{1.7}$$

et on pose

$$\varphi^+ = \varphi \mid_D, \ \varphi^- = \varphi \mid_{\mathbb{C}\backslash\overline{D}}. \tag{1.8}$$

Pour $\varphi \in HF(\Gamma)$, on définit $\tilde{\varphi} \in HF(\Gamma)$ par les formules $\tilde{\varphi}^+ = \varphi^+$ et $\tilde{\varphi}^- = -\varphi^-$. On définit le support de φ comme le plus petit fermé $E \subset \Gamma$ tel que $\tilde{\varphi}$ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash E$. Cet ensemble sera noté $\mathrm{Supp}(\varphi)$. Si E est un ensemble fermé du cercle on pose $HF(E) = \{\varphi \in HF(\Gamma) \ / \ \mathrm{Supp}(\varphi) \subset E\}$.

Remarquons que si $f \in L^1(\Gamma)$, on peut considérer f comme une hyperfonction en posant

$$\begin{aligned} f^+(z) &:= \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) z^n \qquad (z \in D) \\ f^-(z) &:= \sum_{n<0} \hat{f}(n) z^n \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}) \end{aligned}$$

On voit donc que les coefficients de Fourier de la fonction f (définis par les formules usuelles) et de l'hyperfonction f (définis par (1.7)) coincident. Ces notations sont celles de [**12**] et diffèrent légèrement de celles de [**10**]. On peut de même identifier $\mathcal{D}'(\Gamma)$, l'ensemble des distributions sur Γ, à l'ensemble $\{\varphi \in HF(\Gamma)) \ / \ \overline{\lim}_{|n|\to\infty} \frac{\log|\hat{\varphi}(n)|}{\log|n|} < +\infty\}$ (cf par exemple [**16**] p163).
Il apparait alors que si ω est un poids, on a :

$$(A_\omega(\Gamma))^* = HF_\omega(\Gamma)$$

qui est défini par

$$HF_\omega(\Gamma) := \{\varphi \in HF(\Gamma) / \ \sup_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{|\hat{\varphi}(-n)|}{\omega(n)}) < +\infty\}.$$

la dualité étant définie pour $f \in A_\omega(\Gamma)$, $\varphi \in HF_\omega(\Gamma)$ par la formule

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\varphi}(-n-1) \tag{1.9}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma [\varphi(r\zeta)+\varphi(\frac{\zeta}{r})]f(\zeta)d\zeta \tag{1.10}$$

la dernière égalité étant un résultat classique (voir par exemple [**10, 12**]). En appliquant ceci à ω_k, il est immédiat de constater que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^* &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A^*_{\omega_k}(\Gamma)\\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\varphi \in HF(\Gamma)/ \sup_{n\geq 0}(\frac{|\hat{\varphi}(n)|}{e^{k\sqrt{n}}}) < +\infty, \sup_{n\leq 0}(\frac{|\hat{\varphi}(n)|}{|n|^k}) < +\infty\}\\
&= \{\varphi \in HF(\Gamma)/ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^+|\hat{\varphi}(n)|}{\sqrt{n}} < \infty, \overline{\lim_{n\to-\infty}}\frac{\log^+|\hat{\varphi}(n)|}{\log|n|} < \infty\}
\end{aligned}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{B}^*$, en utilisant la notation (1.7), on obtient immédiatement les formules suivantes

$$\hat{\varphi}(n) = \langle \alpha^{-n-1}, \varphi\rangle \tag{1.11}$$

ainsi que

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \langle(\alpha-\lambda)^{-1}, \varphi\rangle & |\lambda| < 1\\ -\langle(\alpha-\lambda)^{-1}, \varphi\rangle & |\lambda| > 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

De plus, les formules (1.9) et (1.10) restent valables pour $f \in \mathcal{B}$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$, ainsi que pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ et $\varphi \in \mathcal{D}'(\Gamma)$.

On sait aussi [**2, 10, 24**] aussi que si E est un fermé de Γ et si $\varphi \in \mathcal{B}^* \cap HF(E)$, on a les estimations suivantes, où N est un entier positif dépendant de φ

$$\log^+(|\varphi^+(z)|) = O(\mathrm{d}(z,E)^{-1}) \quad (|z| \to 1^-) \tag{1.13}$$

$$\varphi^-(z) = O(\mathrm{d}(z,E)^{-N}) \quad (|z| \to 1^+) \tag{1.14}$$

où $\mathrm{d}(z,E)$ désigne la distance de z à l'ensemble E.

On aura à considérer par la suite certains types et certaines classes de fonctions analytiques usuelles. Rappelons brièvement quelques définitions classiques.

On dit qu'une fonction f analytique sur D est dans la *classe de Nevanlinna* si elle vérifie la condition

$$\sup_{r\in[0,1[} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|d\theta < \infty.$$

On notera dans la suite $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions de la classe de Nevanlinna.
Le produit de Blaschke associé à $m \geq 0$ et à une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de D vérifiant $\sum_{n\geq 1}(1-|z_n|) < +\infty$ est le produit (convergent uniformément sur les compacts de D) de la forme

$$B(z) = z^m \prod_{n\geq 1} \frac{\overline{z_n}}{|z_n|}\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z} \qquad (z \in D).$$

Une fonction intérieure singulière $S = S_\mu$ est une fonction définie de D dans $\mathbb{C}$ par

$$S(z) = \exp(-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t))$$

μ étant une mesure positive singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans toute la suite, lorsque l'on aura $\mu = t\delta_\lambda$, on notera $S_\mu = S_{t,\lambda}$.
Les fonctions extérieures sont les fonctions de la forme

$$F(z) = \exp[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}k(\theta)d\theta]$$

où k est une fonction réelle intégrable sur le cercle unité.

Les fonctions f de la classe de Nevanlinna vérifient la factorisation suivante

$$f(z) = \lambda B(z)\frac{S_1(z)}{S_2(z)}F(z) \qquad (z \in D) \tag{1.15}$$

où λ est un nombre complexe de module 1, B un produit de Blaschke, F une fonction extérieure et où S_1 et S_2 sont des fonctions intérieures singulières dont le $PGCD$ est égal à 1.

REMARQUE 1.2. Selon [**1**], lemme 1.5, si $\psi \in \mathcal{N}$, il existe des constantes M et C telles que

$$|\psi(z)| \leq Me^{\frac{C}{1-|z|}}.$$

Un calcul classique à partir de la formule de Cauchy (cf. [**7**] p 155 proposition 3.5) montre qu'on a alors pour les coefficients de Fourier de ψ les estimations

$$|\hat{\psi}(n)| = O(e^{C\sqrt{n}})$$

REMARQUE 1.3. On peut définir des hyperfonctions de $\mathcal{B}^*$ associées à des fonctions intérieures singulières. Toute fonction intérieure singulière se prolonge en effet en une fonction analytique sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \Gamma$ en posant

$$S(z) = \exp(-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t)), \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma)$$

et

$$S(\infty) = \exp(\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} d\nu(t))$$

Supp(ν) étant défini au sens des distributions, on définit alors une hyperfonction de support égal à Supp(ν) par

$$\begin{cases} S^*(z) := \dfrac{1}{S(z)} - \dfrac{1}{S(\infty)} & (|z| < 1) \\ S^*(z) := -\dfrac{1}{S(z)} + \dfrac{1}{S(\infty)} & (|z| > 1) \end{cases}$$

Selon la remarque 1.2, comme $S^{*+} \in \mathcal{N}$ et comme d'autre part, S^{*-} est manifestement bornée, $S^* \in \mathcal{B}^*$.
Remarquons que l'on peut écrire

$$S^* = \frac{1}{S} - \overline{S} \tag{1.16}$$

où on identifie $\frac{1}{S} \in \ Hol(D)$ à une hyperfonction en la prolongeant par 0 sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ et en identifiant $\overline{S} \in L^\infty(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ à une hyperfonction.

3. Produit d'une fonction par une hyperfonction

On définit pour $f \in \mathcal{B}$, $\varphi \in \mathcal{B}^*$ le produit $f.\varphi$ par

$$\langle g, f.\varphi \rangle = \langle gf, \varphi \rangle \qquad (g \in \mathcal{B}) \tag{1.17}$$

Il apparait alors clairement que l'on a :

$$(gf).\varphi = g(f.\varphi) \qquad (f, g \in \mathcal{B},\ \varphi \in \mathcal{B}^*) \tag{1.18}$$

et un calcul élémentaire à partir de (1.10) permet d'obtenir la formule

$$\widehat{f.\varphi}(n) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p) \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1.19}$$

Remarque 1.4. On déduit en particulier de la formule (1.19) que, lorsque les coefficients de Fourier d'indices négatifs de f et φ sont nuls, le produit $f.\varphi$ s'identifie au produit de fonctions holomorphes $f\varphi$.

Remarque 1.5. Il est clair que si $\varphi \in \mathcal{B}^*$, alors l'ensemble $I_\varphi := \{f \in \mathcal{B} \ / \ f.\varphi = 0\}$ est un idéal de $\mathcal{B}$. De même que dans ([**16**], App II et III) pour les pseudomesures, il résulte de (1.10) que si $\varphi \in \mathcal{B}^*$, $f \in \mathcal{B}$ et si $\mathrm{Supp}(f) \cap \mathrm{Supp}(\varphi) = \emptyset$, alors $f \in I_\varphi$. Autrement dit, on a

$$\{\varphi \in \mathcal{B}^* \ / \ \mathrm{Supp}(\varphi) \subset E\} \subset J(E)^\perp$$

Considérons maintenant $\varphi \in \mathcal{B}^*$ et $f \in I_\varphi$. Posons $J = \overline{\mathrm{Vect}\{\alpha^n f\}}_{n\in\mathbb{Z}}$ et soit $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/J$ la surjection canonique. Alors $h(J) = Z(f) := \{\xi \in \Gamma \ / \ f(\xi) = 0\}$ donc $\mathrm{Sp}(\pi(\alpha)) = Z(f)$. Il existe $\psi \in (\mathcal{B}/I)^*$ telle que $\varphi = \psi \circ \pi$. On a alors pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

$$\tilde{\varphi}(z) = \langle(\alpha - z.1)^{-1}, \varphi\rangle = \langle(\pi(\alpha) - z.1)^{-1}, \psi\rangle$$

qui se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} \setminus Z(f)$. Donc si $\varphi \in \mathcal{B}^*$ et si $f.\varphi = 0$, alors f s'annule sur $\mathrm{Supp}(\varphi)$. En particulier, si $\varphi \in J(E)^\perp$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset h(J(E)) = E$ et on a

$$J(E)^\perp = \{\varphi \in \mathcal{B}^* \ / \ \mathrm{Supp}(\varphi) \subset E\} \tag{1.20}$$

Notons que l'analogue de (1.20) est vérifié pour toutes les algèbres $A_\omega(\Gamma)$ régulières, cf [**9**].

Remarque 1.6. Synthèse dans $\mathcal{B}^*$

On note, pour $M \subset \mathcal{B}^*$

$$\tau(M) = \overline{\mathrm{Vect}\,\{\varphi, \ \varphi \in M\}}^{\omega^*}$$

On dit que l'on peut synthétiser une hyperfonction ψ par $M \subset \overline{\mathrm{Vect}(\alpha^n\psi)}^{\omega^*}_{n\in\mathbb{Z}}$ si $\psi \in \tau(M)$. Ceci peut être relié à la description des idéaux de $\mathcal{B}$ en remarquant que, pour $\varphi \in \mathcal{B}^*$,

$$\begin{aligned} \tau[(\alpha^n\varphi)_{n\in\mathbb{Z}}]^\perp &= \{f \in \mathcal{B} \ / \ \langle f, \alpha^n.\varphi\rangle \ (n \in \mathbb{Z})\} \\ &= \{f \in \mathcal{B} \ / \ \langle \alpha^n, f.\varphi\rangle \ (n \in \mathbb{Z})\} \\ &= \{f \in \mathcal{B} \ / \ f.\varphi = 0\} \\ &= I_\varphi \end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$\tau[(\alpha^n M)_{n\in\mathbb{Z}}]^\perp = \{f \in \mathcal{B} \ / \ \forall\varphi \in M, \ \ f.\varphi = 0\}$$

4. Platitude

DÉFINITION 1.2. On dit qu'une fonction f qui est k fois dérivable sur le cercle est *plate au rang* k sur un ensemble E si

$$f\ |_E \equiv f'\ |_E \equiv \ldots \equiv f^{(k)}\ |_E \equiv 0$$

On dit que f est *plate* sur E si elle y est plate pour tout rang. On notera $I^k(E)$ l'ensemble des fonctions plates au rang k sur E et $I^\infty(E)$ l'ensemble des fonctions plates sur E.

Remarquons que la propriété de stabilité (1.2) implique par récurrence que si $f \in \mathcal{B}$ est plate au rang k en λ, alors $\frac{f}{(\alpha-\lambda)^{k+1}} \in \mathcal{B}$.

PROPOSITION 1.1. *Soit $S = S_\nu$ une fonction intérieure, f un élément de $\mathcal{B}$ tel que $fS \in \mathcal{B}$.*
Alors f est plate sur Supp(ν).

DÉMONSTRATION. Selon [**13**] on sait que $S(z),\ z \in D$, n'est prolongeable par continuité sur aucun point du support de ν. S étant d'autre part égale à l'intégrale de Poisson $\mathcal{P}(S)$ de ses valeurs au bord (cf par exemple [**22**] p 249), aux points où $\theta \mapsto S(e^{i\theta})$ est continue, $\mathcal{P}(S)(z) = S(z) \to S(e^{i\theta})$([**3**] p 311), donc si $e^{i\theta} \in$ Supp(ν), $f(e^{i\theta}) = 0$. Ceci implique en particulier que si f et Sf

appartiennent à $\mathcal{B}$, f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$ si $\mathrm{Supp}(\nu)$ est un ensemble parfait, ou plus généralement que f est plate au rang k en tout point du $k$ème ensemble dérivé de $\mathrm{Supp}(\nu)$, le $k$ème ensemble dérivé d'un fermé de Γ étant l'ensemble obtenu après avoir enlevé les points isolés du $(k-1)$ème, celui d'indice 0 étant le fermé de départ.
Si z_0 est un point isolé de $\mathrm{Supp}(\nu)$, on a $S(z) = e^{t\frac{z+z_0}{z-z_0}} S_\mu(z)$ où $t \in \mathbb{R}$ et $z_0 \notin \mathrm{Supp}(\mu)$. On a alors

$$|S^{(k)}(z)| \underset{z\to z_0}{\sim} \frac{c_k}{|z-z_0|^{2k}}.$$

avec $c_k > 0$.
Supposons f non plate en z_0 et soit k le plus petit entier tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient alors que

$$|(fS)^{(k)}(z)| \underset{z\to z_0}{\sim} \frac{c_k|f^{(k)}(z_0)|}{|z-z_0|^k}$$

ce qui est absurde. Ceci permet de conclure que f est plate en tous les points de $\mathrm{Supp}(\nu)$. $\square$

Posons

$$\begin{aligned} A^\infty &= \mathcal{C}^\infty(\overline{D}) \cap Hol(D) \\ &= \{f \in H^\infty(D)/f^{(k)} \in H^\infty(D) \text{ pour } k \geq 1\} \end{aligned}$$

Il a été montré dans [**24**] que les ensembles C vérifiant la propriété géométrique suivante

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{2}{\mathrm{d}(e^{it}, C)}\right) dt < \infty. \tag{1.21}$$

sont tels qu'il existe $F \in A^\infty$ extérieure plate sur C et telle que l'ensemble des zéros de F est exactement C.
En identifiant $f \in A^\infty$ à $f|_\Gamma$, on obtient immédiatement

$$A^\infty = \mathcal{B}^+ := \{f \in \mathcal{B}/\hat{f}(n) = 0 \text{ pour } n < 0\} \tag{1.22}$$

La condition géométrique (1.21) caractérise les ensembles de zéros sur le cercle des éléments non nuls de A^∞ et a été introduite par Carleson [**6**]. On désignera par *ensembles de Carleson* les ensembles vérifiant cette condition. De même que plus haut, on notera $\mathrm{Supp}(\nu)$ le support au sens des distributions d'une mesure ν sur le cercle. Rappelons la propriété classique suivante

PROPOSITION 1.2. *Si* $S = S_\nu$ *et si* $\mathrm{Supp}(\nu)$ *est un ensemble de Carleson, alors* S_ν^* *n'est pas une distribution.*

DÉMONSTRATION. Soit $F \in A^\infty$, extérieure, non nulle et plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Comme $A^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, si S_ν^* était une distribution, on aurait $F.S_\nu^* = 0$.
Or $F.S_\nu^* \neq 0$. En effet, $A^\infty \subset H^2$, donc $F \in H^2$, et on sait que $\{f \in H^2 \ / \ f.S_\nu^* = 0\} = S_\nu.H^2$ (voir par exemple [**11**], prop 3.12). $\square$

CHAPITRE 2

Idéaux de $\mathcal{B}$ associés à des fonctions intérieures

DÉFINITION 2.1. A chaque fonction intérieure singulière S, on associe l'idéal I_S défini par

$$I_S := \{f \in \mathcal{B},\ f.S^* = 0\}$$

Si l'on considère l'hyperfonction $\varphi = S^*$ associée à S, ces idéaux correspondent aux idéaux I_φ des remarques 1.5 et 1.6.
On va montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Soit ν une mesure singulière positive et soit $E = \mathrm{Supp}(\nu)$. Alors $I_{S_\nu} = S_\nu I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$.*

La démonstration du théorème va reposer sur plusieurs lemmes.

LEMME 2.1. *Soient $f \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$ telle que $\widehat{\varphi}(n) = 0$, $(n < 0)$. Les coefficients de Fourier de l'hyperfonction $f.\varphi$ vérifient pour tout $k \geq 1$*

$$\sum_{n<0} |\widehat{f.\varphi}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} < +\infty$$

DÉMONSTRATION. Il existe $K > 0$ tel que $|\hat{\varphi}(n)| = O(e^{K\sqrt{n}})$, $n \to \infty$. On a alors

$$\begin{aligned} & \sum_{n<0} |\widehat{f.\varphi}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} \\ = \quad & \sum_{n<0} |\sum_{p\geq 0} \widehat{\varphi}(p) \hat{f}(n-p)| e^{k\sqrt{|n|}} \end{aligned}$$

On obtient alors les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n<0} |\widehat{f.\varphi}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} \\
\leq\ & M \sum_{n<0} \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} |\hat{f}(n-p)| e^{k\sqrt{|n|}} \\
\leq\ & M \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} \sum_{n<0} |\hat{f}(n-p)| e^{k\sqrt{|n|+p}} \\
=\ & M \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} \sum_{l<-p} |\hat{f}(l)| e^{k\sqrt{|l|}} \\
\leq\ & M \sum_{p\geq 0} e^{K\sqrt{p}} \sum_{l<-p} |\hat{f}(l)| e^{(k+2K)\sqrt{|l|}} e^{-2K\sqrt{p}} \\
\leq\ & M \sum_{p\geq 0} e^{-K\sqrt{p}} \sum_{l<-p} |\hat{f}(l)| e^{(k+2K)\sqrt{|l|}} < +\infty
\end{aligned}$$

□

Remarquons que cette propriété est en particulier vérifiée pour les hyperfonctions correspondant à une fonction φ de $\mathcal{N}$ (prolongée par 0 sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$). En effet, d'après la remarque 1.2, il existe dans ce cas un nombre positif K tel que

$$|\widehat{\varphi}(n)| = O(e^{K\sqrt{n}}) \quad (n \geq 0).$$

Corollaire 2.1. *Soient ν une mesure positive singulière et E un fermé du cercle contenant* $\mathrm{Supp}(\nu)$. *Alors $S_\nu.I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$, et l'application $f \mapsto S_\nu f$ est continue sur $I^\infty(E)$.*

Démonstration. Pour $p \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes P_1, ..., P_j et des entiers q_1, ..., q_j tels que

$$S^{(p)}(z) = (\prod_{l\leq j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_l(e^{it}, z)}{(e^{it}-z)^{q_l}} d\nu(t)) S(z) \tag{2.1}$$

Le produit $S_\nu f$ définit donc une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ plate sur E. Le lemme permet de conclure que $S_\nu f \in \mathcal{B}$. Par ailleurs, si $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\to} g$ dans $\mathcal{B}$, on a $g = 0$ dans $L^\infty(\Gamma)$. La continuité de l'application $f \mapsto S_\nu f$ sur $I^\infty(E)$ résulte alors du théorème du graphe fermé (on aurait pu aussi déduire directement cette continuité des calculs du lemme). □

Si $\varphi \in Hol(D)$, on pose $\varphi_r(z) = \varphi(rz)$ pour $|z| < 1$.

LEMME 2.2. *Soit ν une mesure positive et E un fermé du cercle contenant* $\mathrm{Supp}(\nu)$. *Si $g \in I^\infty(E)$, alors $gS_r \to gS$ dans $\mathcal{B}$.*

DÉMONSTRATION. On pose $S = S_\nu$. Montrons que pour $k \geq 1$

$$\sum_{n<0} |\widehat{gS - gS_r}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} \underset{r\to 1^-}{\to} 0.$$

On observe que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n<0} |\sum_{p\geq 0} \hat{g}(n-p)(1-r^p)\hat{S}(p)| e^{k\sqrt{|n|}} \\
\leq\ & \sum_{p\geq 0}(1-r^p) \sum_{l<-p} |\hat{g}(l)| e^{k\sqrt{|l|-p}} \\
\leq\ & \sum_{p\geq 0}(1-r^p) \sum_{l<-p} |\hat{g}(l)| e^{2k\sqrt{|l|}} e^{-k\sqrt{p}} \\
\leq\ & \sum_{l<0} |\hat{g}(l)| e^{2k\sqrt{|l|}} \sum_{p\geq 0}(1-r^p) e^{-k\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

ce qui implique que l'on a bien la limite annoncée.
Il suffit alors de montrer que $gS_r - gS \underset{r\to 1^-}{\to} 0$ pour la topologie de $\mathcal{C}^\infty$ pour avoir la propriété voulue.
On est donc amené à examiner les termes issus de la formule de Leibniz de la forme

$$g^{(k)}(z)[S^{(p)}(z) - S^{(p)}(rz)]$$

D'après (2.1), pour $p \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes P_1, ..., P_j et des entiers q_1, ..., q_j tels que

$$S^{(p)}(z) = (\prod_{l\leq j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_l(e^{it}, z)}{(e^{it} - z)^{q_l}} d\nu(t)) S(z)$$

Posons $q = \sum_{l=1}^{j} q_j$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
& |g^{(k)}(z)[S^{(p)}(z) - S^{(p)}(rz)]| \\
\leq\ & M|g^{(k)}(z)| [\frac{1}{\mathrm{d}(z, \mathrm{Supp}(\nu))^q} + \frac{1}{\mathrm{d}(rz, \mathrm{Supp}(\nu))^q}]
\end{aligned}$$

En remarquant comme dans [**10**] lemme 4.9 que $\mathrm{d}(re^{it}, E) \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(e^{it}, E)$, on voit qu'il existe pour $m \geq 0$ un réel $K > 0$ tel que

$$|(gS_r)^{(m)}(z) - (gS)^{(m)}(z)| \leq K\,\mathrm{d}(z, \mathrm{Supp}(\nu))$$

pour $0 \leq r < 1$ et $|z| \leq 1$.
Comme $(gS_r)^{(m)}(z) \underset{r\to 1^-}{\to} (gS)^{(m)}(z)$ uniformément sur tout compact de $\overline{D}\backslash\mathrm{Supp}(\nu)$, on en déduit que $gS - gS_r \underset{r\to 1^-}{\to} 0$ pour la topologie de $\mathcal{C}^\infty$.

$\square$

LEMME 2.3. *Si $S = S_{t,\lambda}$, la relation $f.S^* = 0$ implique que f est plate en λ.*

DÉMONSTRATION. Posons $S = S_{t,\lambda}$.
Alors $\mathrm{Supp}(S^*) = \{\lambda\}$, donc, d'après (1.20), $J(\lambda) \subset I_S$ et $h(I_S) \subset \{\lambda\}$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f(\lambda) = ... = f^{(K-1)}(\lambda) = 0$ et $f^{(K)}(\lambda) \neq 0$. Posons $g = \frac{f}{(\alpha-\lambda)^K}$. Alors $g \in \mathcal{B}$ et $g(\lambda) \neq 0$. D'après la remarque 1.1, il existe $h \in \mathcal{B}$ et $l \in I_S$ tels que $gh = 1 + l$.
On en déduit que

$$(\alpha - \lambda)^K.S^* = 0 \tag{2.2}$$

Or la relation (2.2) implique que S^* doit alors être une combinaison linéaire de la mesure de Dirac en λ et de ses $(K-1)$ premières dérivées (il suffit de faire un développement de Taylor de f en λ dans l'expression $\langle f, S^*\rangle$, $(f \in \mathcal{B})$ pour s'en assurer).
L'hyperfonction S^* serait alors ici une distribution, ce qui est exclu pour S_ν^* lorsque $\mathrm{Supp}(\nu)$ est comme ici un ensemble de Carleson d'après la proposition 1.2.
La fonction f est donc plate en λ. $\square$

LEMME 2.4. *Si $S = S_\nu$, la relation $f.S^* = 0$ implique que f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$.*

DÉMONSTRATION. Si $f.S^* = 0$, selon la remarque 1.5, on a $f \equiv 0$ sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Ceci implique que f est plate sur l'ensemble des points d'accumulation de ce support. Si $\mathrm{Supp}(\nu)$ admet un point isolé λ, il existe un élément g de $\mathcal{B}$ tel

que $g(\lambda) = 1$ et $g \equiv 0$ sur un voisinage compact E_λ de $\mathrm{Supp}(\nu) \setminus \{\lambda\}$.
D'autre part, il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait la décomposition de mesures

$$\nu = \nu' \oplus t\delta_\lambda$$

où $\lambda \notin \mathrm{Supp}(\nu')$.
On a alors $S_\nu = S_{\nu'} S_{t,\lambda}$.
Puisque g est un élément de $\mathcal{B}$, on peut écrire

$$(gf).S^* = g(f.S^*) = 0$$

et, comme g est nulle au voisinage de $\mathrm{Supp}(\nu')$, $gS_{\nu'} \in \mathcal{B}$, et on a

$$f(gS_{\nu'}.S^*) = (gS_{\nu'})f.S^* = 0 \tag{2.3}$$

Remarquons que pour $p \geq 1$, l'application

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{B}, (A_{\omega_p})^*) & \to & (A_{\omega_p})^* \\ (f, \varphi) & \longmapsto & f.\varphi \end{array}$$

est une application bilinéaire continue.
Si l 'on définit φ_r pour $\varphi \in (A_{\omega_p})^*$ par

$$\varphi_r(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) r^{|n|} \xi^n \quad (\xi \in \Gamma)$$

on a clairement

$$\varphi_r \underset{r \to 1^-}{\to} \varphi \text{ dans } (A_{\omega_p})^*.$$

Soit $p \geq 1$ tel que S^*, $S_{\nu'}^*$ et $S_{t,\lambda}^* \in (A_{\omega_p})^*$. On a dans $(A_{\omega_p})^*$, d'après (1.16)

$$\begin{aligned} (gS_{\nu'}).S^* &= (gS_{\nu'}).(\frac{1}{S} - \overline{S}) \\ &= \lim_{r \to 1^-} g(S_{\nu'})_r \frac{1}{S_r} - gS_{\nu'}\overline{S} \\ &= \lim_{r \to 1^-} g\frac{1}{(S_{t,\lambda})_r} - g\overline{S_{t,\lambda}} \\ &= g.(\frac{1}{S_{t,\lambda}} - \overline{S_{t,\lambda}}) \\ &= g.S_{t,\lambda}^* \end{aligned}$$

On a donc en revenant à la formule (2.3)

$$fg.S_{t,\lambda}^* = 0$$

ce qui implique selon le lemme 2.3 que la fonction fg est plate en λ, puis, puisque $g(\lambda) = 1$, que f est plate en λ □

On peut alors démontrer le théorème 2.1.

Démonstration. On pose à nouveau $S = S_\nu$.
Si $f = Sg$, où g est une fonction de $\mathcal{B}$ plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$, alors selon le corollaire 2.1, f est une fonction de $\mathcal{B}$ plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. On a selon le lemme 2.2 la propriété

$$Sg = \lim_{r \to 1^-} S_r g \text{ dans } \mathcal{B}$$

et, comme il existe p tel que $S^* \in (A_{\omega_p})^*$, on a dans $(A_{\omega_p})^*$, de même que dans la démonstration du lemme 2.4,

$$\begin{aligned}(Sg).S^* &= Sg.(\frac{1}{S} - \overline{S}) \\ &= \lim_{r \to 1^-} (gS_r)\frac{1}{S_r} - g = 0\end{aligned}$$

donc

$$SI^\infty(E) \subset I_S.$$

Réciproquement, si $f.S^* = 0$, $f.\frac{1}{S} = f\overline{S}$.
Comme f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$, il vient de (2.1) et de calculs analogues à ceux du lemme 2 que $f.\overline{S} \in \mathcal{C}^\infty$ et $f.\overline{S}$ est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. On déduit du lemme 2.1 que $\displaystyle\sum_{n<0} |\widehat{f.\overline{S}}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} < +\infty$ pour tout $k \geq 1$ et par conséquent $f.\overline{S} \in \mathcal{B}$.
On a alors

$$f = (f.\overline{S})S \in SI^\infty(E)$$

donc

$$I_S \subset SI^\infty(E).$$

□

Corollaire 2.2. *Soit E un fermé du cercle et soit S_ν une fonction intérieure singulière telle que* $\mathrm{Supp}(\nu) \subset E$. *Alors $S_\nu.I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$ est fermé et l'application $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ est continue de $S_\nu.I^\infty(E)$ sur $I^\infty(E)$.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 2.1, $S_\nu.I^\infty(E) \subset I^\infty(E)$ et l'application $f \mapsto S_\nu f$ est continue sur $I^\infty(E)$.
On a $S_\nu.I^\infty(E) \subset (S_\nu.I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))) \cap I^\infty(E)$.
Soit $f = S_\nu g \in (S_\nu.I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))) \cap I^\infty(E)$ et soit $\lambda \in E \setminus \mathrm{Supp}(\nu)$. Alors S_ν est continue et de module 1 au voisinage de λ. Comme f est plate en λ, g l'est également. On a donc

$$S_\nu.I^\infty(E) = S_\nu.I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)) \cap I^\infty(E).$$

D'après le théorème 2.1, on obtient

$$S_\nu.I^\infty(E) = \{f \in I^\infty(E) \ / \ f.S_\nu^* = 0\}$$

donc $S_\nu.I^\infty(E)$ est fermé dans $\mathcal{B}$.
Soit $\varphi \ : S_\nu.I^\infty(E) \to I^\infty(E)$ l'application $f \longmapsto f\overline{S_\nu}$. Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et si $((\varphi(f_n))_{n\geq 0}$ admet une limite b au sens de la topologie de $\mathcal{B}$, alors comme $\varphi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ dans L^∞ $b = 0$ et la continuité résulte du théorème du graphe fermé. □

On obtient alors le résultat de division suivant :

THÉORÈME 2.2. *Soit* $E \subset \Gamma$ *un fermé contenant* $\mathrm{Supp}(\nu)$. *Alors* $J(E) = S_\nu J(E)$ *et les applications* $f \mapsto S_\nu f$ *et* $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ *sont continues sur* $J(E)$.

DÉMONSTRATION. Comme $J(E) \subset I^\infty(E)$, la continuité sur $J(E)$ de l'application $f \mapsto S_\nu f$ résulte du corollaire 2.1.
On remarque que $S_\nu J(E) \subset I^\infty(E)$ est un idéal de $\mathcal{B}$. Soit $f \in J(E)$ et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}$ nulles au voisinage de E telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$. Alors $S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\to} S_\nu f$. Comme $S_\nu f_n$ est nulle au voisinage de E pour tout $n \geq 1$, $S_\nu f \in J(E)$ et $S_\nu J(E) \subset J(E)$.
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $J(E)$ telle que

$$S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\to} g \quad \text{avec } g \in \mathcal{B}$$

Comme $S_\nu I^\infty(E)$ est fermé, $g \in S_\nu I^\infty(E)$. Alors, d'après le corollaire 2.2

$$f_n = \overline{S_\nu} S_\nu f_n \underset{n\to+\infty}{\to} \overline{S_\nu} g \in I^\infty(E).$$

Donc $\overline{S_\nu} g = \lim_{n\to+\infty} f_n \in J(E)$ et $g \in S_\nu.J(E)$. Donc $S_\nu J(E)$ est un idéal fermé de $\mathcal{B}$.

Mais $|S_\nu| = 1$ sur $\Gamma \setminus E$ donc $h(S_\nu J(E)) = h(J(E)) = E$ et d'après (1.5), on obtient

$$J(E) \subset S_\nu J(E).$$

Donc $J(E) = S_\nu J(E)$. La continuité de l'application $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ sur $J(E)$ résulte alors du corollaire 2.2. $\square$

CHAPITRE 3

Propriété d'approximation à l'aide de fonctions extérieures

Il résulte de (1.2) que si $f \in \mathcal{B}$ est plate au rang k en λ, alors $\frac{f}{(\alpha-\lambda)^k} \in \mathcal{B}$. On dispose d'un résultat de division plus général lorsque f est plate sur un ensemble C de Carleson.
Posons, pour $z \in D$

$$\delta(z) = \exp[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log(\tilde{d}(e^{i\theta}, C))d\theta]$$

où $\tilde{d}(e^{it}, C) = (\beta_\nu - t)(t-\alpha_\nu)$, où α_ν et β_ν sont les arguments des extrémités des arcs du complémentaire de C. Alors, on a les inégalités

$$\mathrm{d}(e^{it}, C)^2 \leq \tilde{d}(e^{it}, C) \leq 2\pi\,\mathrm{d}(e^{it}, C)$$

Le rapport $\frac{\log(\tilde{d}(e^{it},C))}{\log(\mathrm{d}(e^{it},C))}$ et son inverse sont bornés sur $\Gamma \setminus C$ et $\tilde{d}(e^{it}, C)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Gamma \setminus C$.
Alors δ est une fonction extérieure qui s'étend par continuité à $\overline{D}$ et le rapport $\frac{\log(|\delta(e^{it}))|}{\log(\mathrm{d}(e^{it},C))})$ et son inverse sont bornés. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que, pour $0 < r < 1$, $\delta^{(p)}(re^{it}) = O(\frac{1}{\mathrm{d}(e^{it},C)^q})$. On a alors la propriété :

PROPOSITION 3.1. *Soient $f \in \mathcal{B}$, plate sur un ensemble de Carleson C,et δ la fonction précédente associée à C.*
Alors $\frac{f}{\delta}$ est plate sur C et $\frac{f}{\delta} \in \mathcal{B}$

DÉMONSTRATION. Il est immédiat de constater que le quotient de fonctions $\frac{f}{\delta}$ définit une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma \setminus C)$, qui s'étend par continuité en une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ plate sur C.
Pour vérifier que $\frac{f}{\delta}$ est un élément de $\mathcal{B}$, remarquons que $\frac{1}{\delta}$ qui est analytique dans D et appartient en particulier à la classe de Nevanlinna définit une hyperfonction nulle sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ et appartenant à $\mathcal{B}^*$. Le lemme 2.1 indique alors que l'on a pour

$k \geq 1$

$$\sum_{n<0} |\widehat{f.(\frac{1}{\delta})}(n)| e^{k\sqrt{|n|}} < +\infty$$

Dans ce qui suit, on identifie de même qu'en (2) une fonction de $L^1(\Gamma)$ à l'hyperfonction ayant les mêmes coefficients de Fourier. On va montrer que l'hyperfonction $f.\frac{1}{\delta}$ coincide avec l'hyperfonction associée à la fonction g définie par

$$g(e^{it}) = \frac{f(e^{it})}{\delta(e^{it})}.$$

Notons h l'hyperfonction $f.\frac{1}{\delta} - g$.

Considérons (cf (1.21)) une fonction θ extérieure et plate sur C. Le produit $\theta\delta$ est donc une fonction de A^∞, extérieure et plate sur C. On remarque que l'on a, au sens du produit d'une fonction par une hyperfonction l'égalité

$$(\theta\delta).h = 0.$$

On a en effet $(\theta\delta)g = \theta f$ au sens des fonctions, donc au sens de (1.19). D'autre part, d'après (1.18)

$$(\theta\delta)(f.\frac{1}{\delta}) = (\theta\delta f).\frac{1}{\delta} = f(\theta\delta.\frac{1}{\delta}) = f.\theta 1 = f\theta.$$

Comme les coefficients de Fourier négatifs de $(\theta\delta).h^+$ sont nuls, $\theta\delta$ étant holomorphe, $[(\theta\delta).h^-]^- = 0$.

On définit alors un élément l de l'espace de Hardy usuel H^2 en posant

$$\overline{\hat{l}(n)} = \begin{cases} \hat{h}(-n-1) & (n \geq 0) \\ 0 \quad (n < 0) \end{cases}$$

et on a :

$$l \perp (\theta\delta)H^2$$

Selon le théorème de Beurling, $(\theta\delta)H^2 = H^2$, ce qui implique que $l = 0$.

On en déduit que $h^- = 0$, puis que $h^+ = 0$. La fonction g et l'hyperfonction $f.\frac{1}{\delta}$ ont donc les mêmes coefficients de Fourier et d'après ce qui précède, $g \in \mathcal{B}$. $\square$

On déduit alors d'un résultat d'approximation de [**24**] la propriété suivante.

PROPOSITION 3.2. *Si C est un ensemble de Carleson, il existe une suite de fonctions extérieures $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*
(1)$F_k \in A^\infty$ et F_k est plate sur C $(k \geq 1)$
(2)Pour toute fonction $h \in \mathcal{B}$, plate sur C, la suite $(hF_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers h dans $\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION. Pour $q \geq 0$, posons

$$U_q := \{f \in \mathrm{Hol}(D) \ / \ f^{(k)} \in H^\infty, \ 0 \leq k \leq q\}$$

Il résulte de la démonstration de ([**24**] th. 3.3 p1269) qu'il existe une suite de fonction extérieures $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1) et telle que pour tout $p \geq 1$, il existe $q = q(p) \geq p+2$ tel que

$$\|hF_k - h\|_p \to 0 \quad (h \in U_q).$$

On vérifie que cette suite satisfait les conditions de la proposition. En effet, il résulte de [**6**] p 329 que pour $p \geq 1$, il existe $N \geq 1$ tel que $\delta^N \in U_q \subset A_{\omega_p}(\Gamma)$. Alors $\frac{f}{\delta^N} \in \mathcal{B}$ d'après la proposition 3.1 et on a

$$\begin{aligned}\|fF_k - f\|_p &= \|\frac{f}{\delta^N}(\delta^N F_k - \delta^N)\|_p \\ &\leq \|\frac{f}{\delta^N}\|_p \|\delta^N F_k - \delta^N\|_p \to 0 \quad (k \to \infty)\end{aligned}$$

□

Notons que la proposition 3.2 s'applique en particulier aux ensembles finis.

CHAPITRE 4

Étude des idéaux I tels que $A^\infty \cap I \neq \{0\}$

LEMME 4.1. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$. Si $I \cap A^\infty \neq \{0\}$, alors $\mathcal{B} = A^\infty + I$ et $h(I)$ est un ensemble de Carleson.*

DÉMONSTRATION. Puisque $I \cap A^\infty \neq \{0\}$, $J := I \cap A^\infty$ est un idéal fermé de A^∞ non réduit à $\{0\}$. On considère la surjection canonique

$$\pi \; : \; A^\infty \longrightarrow A^\infty / J$$

et, pour $f \in A^\infty$ et $\lambda \in \overline{D}$, on considère l'application f_λ définie par

$$f_\lambda \; : \; z \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & si \; z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & si \; z = \lambda. \end{cases}$$

L'application f_λ appartient alors à A^∞ et si $f \in J$ et $f(\lambda) = 0$, on a

$$(\alpha - \lambda) f_\lambda = f.$$

Si $\lambda \in D$, on obtient $f_\lambda = (\alpha - \lambda)^{-1} f \in I \cap A^\infty = J$. On en déduit que $h(J) = \{\lambda \in \overline{D}, \; f(\lambda) = 0 \; (f \in J)\}$ est contenu dans Γ. Comme $\sigma(\pi(\alpha)) = h(J)$, $\pi(\alpha) - \lambda.1$ est inversible pour tout $\lambda \in D$. Comme $J \subset I$, $h(I) \subset h(J)$ et $h(I)$ est donc un ensemble de Carleson.
Soit maintenant $f \in J$, $\lambda \in D$. On a :

$$(\alpha - \lambda) f_\lambda = f - f(\lambda)$$

d'où

$$-f(\lambda)(\pi(\alpha) - \lambda)^{-1} = \pi(f_\lambda).$$

On en déduit que $\|(\pi(\alpha) - \lambda)^{-1}\|_{\omega_p} |f(\lambda)|$ est bornée et selon [**1**] lemme 5 (c), il existe C indépendante de p et $M_p > 0$ tels que

$$\|(\pi(\alpha) - \lambda)^{-1}\|_{\omega_p} \leq M_p e^{\frac{C}{1 - |\lambda|}}$$

et on a, de même que dans la remarque 1.2

$$\|\pi(\alpha)^{-n}\|_{\omega_p} = O(e^{C\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty).$$

Pour $f \in \mathcal{B}$, on pose alors

$$\delta(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\pi(\alpha)^n.$$

δ est alors un homomorphisme continu et surjectif de $\mathcal{B}$ à valeurs dans A^∞/J et on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A^\infty & \xrightarrow{i} & \mathcal{B} \\ \pi\downarrow & \swarrow_\delta & \downarrow\theta \\ A^\infty/J & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathcal{B}/I \end{array}$$

Ici, i désigne l'injection naturelle de A^∞ dans $\mathcal{B}$, θ la surjection canonique de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}/I$ et $\tilde{i}$ l'application vérifiant $\tilde{i}\circ\pi = \theta\circ i$.
On a alors $\delta(\alpha^n) = \pi(\alpha^n)$ et $(\tilde{i}\circ\delta)(\alpha^n) = \tilde{i}(\pi(\alpha^n)) = \theta(\alpha^n)$ pour $n \geq 0$. Comme $\tilde{i}\circ\delta$ et θ sont des homomorphismes, on a

$$(\tilde{i}\circ\delta)(\alpha^n) = \theta(\alpha^n) \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Par continuité, on obtient $\tilde{i}\circ\delta = \theta$ et $\tilde{i}$ est surjective puisque θ l'est. Donc, pour $f \in \mathcal{B}$, il existe $g \in A^\infty$ tel que

$$\theta(f) = (\tilde{i}\circ\pi)(g) = \theta(g)$$

et $f - g \in I$. □

Corollaire 4.1. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$. Si $I \cap A^\infty \neq \{0\}$, alors*

$$I = \overline{[\bigcup_{n\leq 0} \alpha^n(A^\infty \cap I)]}$$

Démonstration. On pose $H = \overline{[\bigcup_{n\leq 0} \alpha^n(A^\infty\cap I)]}$. Alors H est un idéal fermé de $\mathcal{B}$, $H \subset I$ et $A^\infty \cap I \subset H$. D'après le lemme, $\mathcal{B} = A^\infty + H$. Soit $f \in I$. Il existe $g \in A^\infty$ et $h \in H$ tels que $f = g + h$. Comme $H \subset I$, $h \in I$ donc $g \in A^\infty \cap I \subset H$ et $f \in H$. □

Pour l'énoncé suivant, on adopte les conventions $S_0 = 1$ et $I^\infty(\emptyset) = \mathcal{B}$. Pour $I \subset \mathcal{B}$, et pour $\lambda \in h(I)$, on pose $d_I(\lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N},\ f(\lambda) = ... = f^{(n)}(\lambda) = 0,\ (f \in I)\}$. On note alors

$$I^{(d)} := \{f \in \mathcal{B},\ f(\lambda) = ... = f^{(d_I(\lambda))}(\lambda) = 0,\ (\lambda \in h(I))\}.$$

On obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 4.1. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$ tel que $I \cap A^\infty \neq \{0\}$. Alors $h(I)$ est un ensemble de Carleson et il existe une mesure singulière $\nu \geq 0$ avec* $\mathrm{Supp}(\nu) \subset h(I)$ *telle que*

$$I = I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$$

DÉMONSTRATION. On a $I \subset I^{(d)}$.
Soit $J = I \cap A^\infty$. Comme $h(J) \subset \Gamma$, d'après la description de Taylor-Williams [**24**] des idéaux fermés de A^∞, il existe une mesure singulière $\nu \geq 0$ telle que

$$J = (J^{(d)} \cap A^\infty) \cap S_\nu[I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu) \cap A^\infty]$$

Si $f \in I$, on a $f = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^{-p_n} f_n$ avec $f_n \in J$. Il existe donc $g_n \in A^\infty \cap I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ telle que $f = \lim\limits_{n \to +\infty} S_\nu \alpha^{-p_n} g_n$. Comme $S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu) = \{g \in \mathcal{B},\ g.S_\nu^* = 0\}$ est fermé dans $\mathcal{B}$, on a $f \in S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ et $I \subset S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$. On a donc

$$I \subset I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)).$$

On a d'autre part $J \subset I$, donc $I^{(d)} \subset J^{(d)}$. Si $\lambda \in h(J)$ et si $p \leq d_J(\lambda)$, on a $f^{(p)}(\lambda) = 0$ pour $f \in \bigcup\limits_{n \geq 0} \alpha^{-n} J$, donc pour toute $f \in I$ d'après le corollaire 4.1. Donc $h(I) = h(J)$ et $I^{(d)} = J^{(d)}$. Soit $f \in I^{(d)} \cap (S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))) \cap A^\infty$. Alors $f \in J^{(d)} \cap A^\infty$ et il existe $g \in I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$ telle que $f = S_\nu g$. Donc $f.S_\nu^* = 0$ et en particulier $\widehat{f.\overline{S_\nu}}(n) = 0$ pour $n < 0$. Alors $g = f.\overline{S_\nu} \in \mathcal{B} \cap H^2 = A^\infty$ et $f \in S_\nu[I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)) \cap A^\infty]$. Donc $f \in J$ et

$$[I^{(d)} \cap (S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))] \cap A^\infty = J = I \cap A^\infty$$

et, d'après le corollaire 4.1

$$I = I^{(d)} \cap [S_\nu I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu)].$$

□

LEMME 4.2. *Si $f \in A^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$, alors $(f.\varphi)^+ - f.\varphi^+ \in A^\infty(D)$*

DÉMONSTRATION. Soit $n \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}\widehat{(f.\varphi)^+}(n) - \widehat{(f.\varphi^+)}(n) &= \widehat{f.\varphi}(n) - \sum_{p=0}^{n} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p) \\ &= \sum_{p \geq n+1} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p)\end{aligned}$$

Or il existe $M_1 \geq 0$ et $K \geq 0$ tels que $|\hat{\varphi}(m)| \leq M_1 |m|^K$ pour $m \leq 0$, et pour tout $l \geq 0$, il existe $M_2 \geq 0$ tel que $|\hat{f}(m)| \leq \frac{M_2}{m^{l+K+2}}$ pour $m \geq 1$. On obtient donc pour tout $n \geq 0$ et pour $l \geq 0$

$$\begin{aligned}(n+1)^l |\widehat{(f.\varphi)^+}(n) - \widehat{(f.\varphi^+)}(n)| &\leq M_1 M_2 \sum_{p \geq n+1} \frac{(n+1)^l}{p^{l+K+2}} (p-n)^K \\ &\leq M_1 M_2 \sum_{p \geq n+1} \frac{1}{p^{K+2}} (p-n)^K \\ &\leq M \sum_{p \geq n+1} \frac{1}{p^2} < +\infty.\end{aligned}$$

□

Pour $\varphi \in \mathcal{B}^*$, lorsque $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, on note $S(\varphi)$ le dénominateur de φ^+ dans (1.15) et on note $\nu(\varphi)$ la mesure positive qui définit $S(\varphi)$. On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME 4.2. *Soit $f \in A^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{B}^*$.*
Si $f.\varphi = 0$, $f \neq 0$, alors $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, $f.S(\varphi)^* = 0$ et Supp(φ) *est un ensemble de Carleson. Réciproquement, si* Supp(φ) *est un ensemble de Carleson et $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, alors*

$$\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)) \subset \mathrm{Supp}(\varphi), \; (S(\varphi) I^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi))) \cap A^\infty \subset I_\varphi$$

$$\text{et } I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S(\varphi) I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)))$$

DÉMONSTRATION. D'après la remarque 1.5, $f\ |_{\mathrm{Supp}(\varphi)} = 0$ donc $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson. Si $f.\varphi = 0$, $f.\varphi^+ = -f.\varphi^-$. Pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |\widehat{f.\varphi^+}(n)| &= |-\sum_{p\geq 0} \hat{f}(p)\widehat{\varphi^-}(n-p)| \\ &= |\sum_{p\geq n+1} \hat{f}(p)\hat{\varphi}(n-p)| \\ &= |\sum_{q\geq 1} \hat{f}(n+q)\hat{\varphi}(-q)| \end{aligned}$$

Il existe alors $k \geq 1$ tel que

$$|\widehat{f.\varphi^+}(n)| \leq C\sum_{q\geq 1} |\hat{f}(n+q)|q^k$$

et on obtient pour tout $p \geq 1$

$$\begin{aligned} n^p|\widehat{f.\varphi^+}(n)| &\leq C\sum_{q\geq 1} |\hat{f}(n+q)|q^k n^p \\ &\leq C\sum_{q\geq 1} |\hat{f}(n+q)|(n+q)^{p+k} < +\infty \end{aligned}$$

Donc $f.\varphi^+ \in A^\infty$ (ces calculs sont analogues à ceux de [**10**], lemme 4.10).
En particulier, $f.\varphi^+$ est bornée et $\varphi^+ \in \mathcal{N}$. Posons $S = S(\varphi)$ et soit $\nu = \nu(\varphi)$. D'après (1.15), il existe F extérieure, U intérieure telles que $\varphi^+ = \frac{UF}{S}$, et telles que le $PGCD$ de U et S est égal à 1. On a $fUF = Sf\varphi^+$ donc S divise le facteur intérieur de f. D'après [**24**] th. 4.7, f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Posons $g = \frac{f}{S} \in H^2$. Comme $|S(\xi)| = 1$ pour $\xi \notin \mathrm{Supp}(\nu)$, g coincide presque partout sur Γ avec une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Donc $g \in A^\infty \cap I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu))$. D'après le théorème 2.1, on a $f.S^* = 0$.
Supposons maintenant que $\varphi^+ \in \mathcal{N}$ et que $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson. Alors d'après [**10**] lemme 5.2, $\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)) \subset \mathrm{Supp}(\varphi)$. Posons à nouveau $S = S(\varphi)$ et soit $f \in SI^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \cap A^\infty$. Alors

$$f.\frac{1}{S} = f.\overline{S} \in \{g \in L^\infty(\Gamma)\ /\ \hat{g}(n) = 0\ (n<0)\} = H^\infty.$$

Avec les notations ci-dessus, on a $f.\varphi^+ = \frac{f}{S}UF \in \mathcal{N}^+$. Mais $f.\varphi^-$ est bornée sur $\Gamma \setminus \mathrm{Supp}(\varphi)$ d'après (1.14), donc $f.\varphi^+$ aussi. Comme $f.\varphi^+ \in \mathcal{N}^+$, $f.\varphi^+ \in H^\infty$. D'après le lemme 4.2, $(f.\varphi)^+ \in H^\infty$. Donc $f.\varphi$ est une distribution, et $\mathrm{Supp}(f.\varphi) \subset \mathrm{Supp}(\varphi)$. D'après la proposition 3.2, il existe une suite $(F_k)_{k\geq 1}$

d'éléments de $I^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \cap A^\infty$ tels que $fF_k \underset{k\to+\infty}{\to} f$ dans $\mathcal{B}$. On a donc, au sens de la convergence simple des coefficients de Fourier

$$f.\varphi = \lim_{k\to+\infty} (fF_k).\varphi = \lim_{k\to+\infty} F_k(f.\varphi) = 0.$$

Donc

$$SI^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \cap A^\infty \subset I_\varphi.$$

D'après le corollaire 4.1

$$SI^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \subset I_\varphi.$$

Par ailleurs, si $f \in I_\varphi \cap A^\infty$, alors $f.S^* = 0$, donc $f \in SI^\infty(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi))) \cap A^\infty$. On a donc

$$SI^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \subset I_\varphi \subset SI^\infty(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)))$$

Comme $I_\varphi \cap A^\infty \neq \{0\}$, il existe d'après le théorème 4.1 une mesure singulière $\nu_1 \geq 0$ telle que

$$S_{\nu_1} I^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \subset I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S_{\nu_1} I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu_1)).$$

Donc $SI^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \subset S_{\nu_1}(I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu_1))$

et $S_{\nu_1}(I^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi)) \subset SI^\infty(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)))$.

De même que dans la démonstration du théorème 4.1, on a

$$[SI^\infty(\mathrm{Supp}(\nu((\varphi))] \cap A^\infty \subset SH^\infty \text{ et } S_{\nu_1} I^\infty(\mathrm{Supp}(\nu_1) \cap A^\infty \subset S_{\nu_1} H^\infty.$$

Comme $I^\infty(\mathrm{Supp}(\varphi))$ contient des fonctions extérieures, S divise S_{ν_1} et S_{ν_1} divise S. Donc $\nu_1 = \nu(\varphi)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

CHAPITRE 5

Étude des idéaux tels que $h(I)$ est un ensemble dénombrable de Γ

1. Cas où $h(I) = \{\lambda\},\ \lambda \in \Gamma$.

Rappelons que pour $\lambda \in \Gamma$, on note $S_{t,\lambda}$ la fonction intérieure singulière définie par

$$S_{t,\lambda}(z) = e^{t\frac{z+\lambda}{z-\lambda}}, \qquad (z \in D)$$

et $S^*_{t,\lambda}$ l'hyperfonction associée.

On notera également $S_a := \{S_{t,\lambda}, t \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda \in \Gamma\}$, et $I(\lambda)$ (resp. $J(\lambda)$) les ensembles $I(\{\lambda\})$ (resp. $J(\{\lambda\})$).

Commençons par établir une propriété d'approximation pour des fonctions de synthèse en λ.
Remarquons tout d'abord que l'on peut déduire d'un résultat de [**1**] de manière analogue à [**10**] le lemme suivant :

Lemme 5.1. *Soit $p \geq 1$. Il existe $q \geq 1$ tel que pour toute fonction $\theta \in A^\infty$ plate au point λ, on a*

$$\theta . S_{q,\lambda} \in J_{\omega_p}(\lambda).$$

Démonstration. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\theta}{(\alpha-\lambda)^k} \in A^\infty$. On considère alors la surjection canonique $\pi : A_{\omega_p}(\Gamma) \to A_{\omega_p}(\Gamma)/_{J_{\omega_p}(\lambda)}$.
Comme $h(J_{\omega_p}(\lambda)) = \{\lambda\}$, $\mathrm{Spec}(\pi(\alpha)) = \{\lambda\}$ selon la remarque 1.1. D'autre part, si T est défini par $T(\pi(f)) = \pi(\alpha f)$, on a :

$$\begin{cases} \|T^n\|_p = \|\pi(\alpha^n)\|_p = O(|n|^p) & (n > 0) \\ \|T^n\|_p = \|\pi(\alpha^n)\|_p = O(e^{p\sqrt{|n|}}) & (n \leq 0) \end{cases}$$

Si $f \in A^{p+2} := \{g \in H^\infty \ / \ g^{(i)} \in H^\infty \ (i \leq p+2)\}$, posons $f(T) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)T^n$.
Posons $g = (\alpha - \lambda)^{4p+5} S_{2p^2,\lambda}$. Il résulte de [**1**] th.2, que $g(T) = 0$, c'est à dire que $\pi(g) = 0$. On a alors

$$\pi(\theta S_{2p^2,\lambda}) = \pi(\frac{\theta}{(\alpha-\lambda)^{4p+5}})\pi(g) = 0$$

$\square$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Pour toute fonction $f \in J(\lambda)$, il existe une suite $(e_p)_{p\geq 0}$ d'éléments de $J(\lambda)$ telle que, pour la topologie de $\mathcal{B}$, $f = \lim_{p\to+\infty} fe_p$.*

Démonstration. Soit $p \geq 1$. D'après la proposition 3.2, il existe $u_p \in I^\infty(\lambda) \cap A^\infty$ tel que

$$\|f - fu_p\|_p < \frac{1}{2p}.$$

Soit $q \geq 1$ tel que $u_p.S_{q,\lambda} \in J_{\omega_p}(\lambda)$. D'après le théorème 2.2, $f\overline{S_{q,\lambda}} \in J(\lambda)$. Comme $J(\lambda)$ est dense dans $J_{\omega_p}(\lambda)$ d'après (1.3), il existe $v_p \in J(\lambda)$ tel que $\|u_pS_{q,\lambda} - v_p\|_p < \dfrac{1}{2p(1 + \|f\overline{S_{q,\lambda}})\|_p)}$.
Posons $e_p = \overline{S_{q,\lambda}}v_p \in J(\lambda)$.
On a alors

$$\begin{aligned} \|f - fe_p\|_p &= \|f - fu_p + f\overline{S_{q,\lambda}}S_{q,\lambda}u_p - f\overline{S_{q,\lambda}}S_{q,\lambda}e_p\|_p \\ &\leq \frac{1}{2p} + \|f\overline{S_{q,\lambda}}\|_p\|u_pS_{q,\lambda} - v_p\|_p < \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Pour $q \geq p$, on a $\|f - fe_q\|_p \leq \|f - fe_q\|_q < \frac{1}{q}$, donc $(fe_p)_{p\geq 1}$ converge vers f dans $\mathcal{B}$. $\square$

Lemme 5.2. *Soient ν_1 et ν_2 des mesures positives telles que $\mathcal{C} = \mathrm{Supp}(\nu_1+\nu_2)$ soit un ensemble de Carleson. Alors, pour $\theta \in I^\infty(\mathcal{C})$, on a*

$$\begin{aligned} (i) \qquad & \theta S_{\nu_1+\nu_2}.S^*_{\nu_1} = 0 \\ (ii) \qquad & \theta S_{\nu_1}.S^*_{\nu_1+\nu_2} = \theta.S^*_{\nu_2} \end{aligned}$$

Démonstration. L'égalité (i) résulte immédiatement du fait que, d'après le théorème 2.1, $I_{S_{\nu_1+\nu_2}} \subset I_{S_{\nu_1}} \cap I_{S_{\nu_2}}$.
Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{B}^*$. L'application $f \mapsto \widehat{f.\varphi}(n)$ est continue sur $\mathcal{B}$. D'autre part, l'application $f \mapsto f.S_\nu$ est continue sur $I^\infty(\mathcal{C})$ d'après le corollaire 2.1.
On considère l'ensemble L des fonctions $\theta \in I^\infty(C)$ vérifiant (ii). D'après ce qui précède, L est fermé.
D'après (1.18), on a $(fg).\varphi = f.(g.\varphi) \quad (f, g \in \mathcal{B}, \ \varphi \in \mathcal{B}^*)$. L est donc un idéal de $\mathcal{B}$.
Soit $\theta \in A^\infty \cap I^\infty(\mathcal{C})$. D'après la remarque 1.4, on a

$$(\theta S_{\nu_1}).\frac{1}{S_{\nu_1+\nu_2}} = \theta.\frac{1}{S_{\nu_2}}$$

et on a dans $L^\infty(\Gamma) \subset \mathcal{B}^*$

$$(\theta S_{\nu_1}).\overline{S_{\nu_1+\nu_2}} = \theta.\overline{S_{\nu_2}}.$$

On en déduit que $A^\infty \cap I^\infty(\mathcal{C}) \subset L$. Le fait que $I^\infty(\mathcal{C}) = L$ résulte alors immédiatement de la proposition 3.2. □

Corollaire 5.1. *Soit $\theta \in I^\infty(\lambda)$. On a pour $\lambda \in \Gamma$*

$$\begin{aligned} (i) \qquad & \theta S_{t,\lambda}.S^*_{s,\lambda} = 0 \quad (0 \le s < t) \\ (ii) \qquad & \theta S_{t,\lambda}.S^*_{s,\lambda} = \theta.S^*_{s-t,\lambda} (0 \le t \le s) \end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned} \langle \theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle &= \quad 0 \qquad (0 \le s < t) \\ \textit{et } \langle \theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle &= \langle \theta, S^*_{s-t,\lambda} \rangle \qquad (0 \le t \le s) \end{aligned}$$

Démonstration. (i) et (ii) sont des conséquences directes du lemme, en remarquant que $S^*_{0,\lambda} = 0$. On en déduit que si $f \in I^\infty(\lambda)$, on a $\langle \theta f S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle = 0 \quad (0 \le s < t)$ et $\langle \theta f S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda} \rangle = \langle \theta f, S^*_{s-t,\lambda} \rangle \quad (0 \le t \le s)$. D'après la proposition 3.2, il existe une suite $(f_k)_{k \ge 1}$ d'éléments de $I^\infty(\lambda)$ telle que $\theta f_k \underset{k \to +\infty}{\to} \theta$. Comme l'application $g \mapsto S_{t,\lambda} g$ est continue sur $I^\infty(\lambda)$, ceci achève la démonstration du corollaire. □

Lemme 5.3. *Soit $\lambda \in \Gamma$, $\theta \in I^\infty(\lambda)$, $s > 0$. Si $\langle \theta, S^*_{t,\lambda} \rangle = 0$ pour tout $t < s$, alors $\theta.S^*_{s,\lambda} = 0$.*

DÉMONSTRATION. Il résulte de [**8**], p150 et 151 que l'application $t \mapsto (\alpha-\lambda)^{2k+3}S_{t,\lambda}$ est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans A_{ω_k} pour tout $k \geq 1$ et que $\|(\alpha-\lambda)^{2k+3}S_{t,\lambda}\|_{A_{\omega_k}} = O(t^k)$. Par conséquent, l'intégrale de Bochner $\int_0^{+\infty} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}}\theta S_{t,\lambda}dt$ est convergente dans A^∞ pour $\theta \in I^\infty(\lambda)$ et $|u| > 1$, puisque $\mathrm{Re}(\frac{\lambda+u}{\lambda-u}) < 0$. Comme les caractères commutent avec les intégrales de Bochner, on obtient par calcul direct en évaluant chacun des deux membres de l'équation en $\xi \in \Gamma$ la formule suivante (qui est une variante de la formule de la résolvante des semi-groupes analogue à celles utilisées dans [**8**] p150 et [**10**] lemme 5.11)

$$(u-\lambda)\theta(\alpha-\lambda)(\alpha-u)^{-1} = 2\lambda\int_0^{+\infty} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}}\theta S_{t,\lambda}dt \ (\theta \in I^\infty(\lambda), |u| > 1) \tag{5.1}$$

Soit maintenant $\theta \in I^\infty(\lambda)$ vérifiant $\langle\theta, S^*_{t,\lambda}\rangle = 0$ pour $t < s$.
Soit $t \geq 0$. On a alors d'après le corollaire

$$\begin{aligned} \langle\theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle &= 0 \quad \text{si } s \leq t \\ \text{et } \langle\theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle &= \langle\theta, S^*_{s-t,\lambda}\rangle \quad \text{si } t \leq s \end{aligned}$$

Il résulte alors de (5.1) que

$$\begin{aligned} (u-\lambda)\langle\theta(\alpha-\lambda)(\alpha-u)^{-1}, S^*_{s,\lambda}\rangle &= 2\lambda\int_0^{+\infty} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}}\langle\theta S_{t,\lambda}, S^*_{s,\lambda}\rangle dt \\ &= 2\lambda\int_0^{s} e^{t\frac{\lambda+u}{\lambda-u}}\langle\theta, S^*_{s-t}\rangle dt = 0 \\ &\qquad (|u| > 1). \end{aligned}$$

Posons $\varphi = (\alpha-\lambda)\theta.S^*_{s,\lambda}$. On a $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{\lambda\}$ et $\langle(\alpha-u)^{-1}, \varphi\rangle = 0$ pour $|u| > 1$. Il résulte de (1.12) que $\varphi^- = 0$. Comme $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{\lambda\}$, $\varphi = 0$. On obtient $(\alpha-\lambda)\theta.S^*_{s,\lambda} = 0$. Soit $g \in I^\infty(\lambda)$. Comme $\frac{g}{(\alpha-\lambda)} \in \mathcal{B}$, on obtient $\theta g.S^*_{s,\lambda} = 0$. Le fait que $\theta.S^*_{s,\lambda} = 0$ résulte alors de la proposition 3.2. ☐

Soit I un idéal fermé de $\mathcal{B}$. En remarquant que $S^*_{0,\lambda} = 0$, on pose pour $\lambda \in \Gamma$

$$m_I(\lambda) = \sup\{t \geq 0, S^*_{t,\lambda} \in I^\perp\}, \tag{5.2}$$

et, de même que plus haut, pour $\lambda \in h(I)$

$$d_I(\lambda) = \sup\{n \in \mathbb{N} \ / \ f(\lambda) = ... = f^{(n)}(\lambda) = 0 \ (f \in I)\} \tag{5.3}$$

Si $m_I(\lambda) > 0$, on a $d_I(\lambda) = +\infty$ d'après le théorème 2.1.
D'autre part, si $s < m_I(\lambda)$, il existe $t > s$ tel que $f.S^*_{t,\lambda} = 0 \quad (f \in I)$. Donc

$f \in S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda) \subset S_{s,\lambda}I^{\infty}(\lambda)$ et $f.S^{*}_{s,\lambda} = 0$.
Si $0 < m_I(\lambda) < +\infty$, il résulte alors du lemme 5.3 que $f.S^{*}_{m_I(\lambda),\lambda} = 0$ (on aurait pu aussi déduire ce résultat de la continuité de l'application $t \mapsto \widehat{f.S^{*}_{t,\lambda}}(n)$ pour $f \in I^{\infty}(\lambda),\ n \in \mathbb{Z}$, qui se vérifie facilement). On a donc pour tout idéal fermé I de $\mathcal{B}$

$$f.S^{*}_{s,\lambda} = 0 \quad (f \in I,\ 0 \le s \le m_I(\lambda)). \tag{5.4}$$

On obtient alors la classification suivante :

Proposition 5.2. *Soit I idéal fermé de $\mathcal{B}$ tel que $h(I) = \{\lambda\}$ alors*
(1) si $m_I(\lambda) = +\infty$, alors $I = J(\lambda) = \bigcap_{t>0} S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda)$
(2) si $0 < m_I(\lambda) < +\infty$, alors $I = S_{m_I(\lambda),\lambda}I^{\infty}(\lambda)$
(3) si $m_I(\lambda) = 0$, alors $I = I^{d_I(\lambda)}(\lambda)$

Démonstration.
$m_I(\lambda) = +\infty$
Soit $f \in I$ et $t > 0$. Comme $f.S^{*}_{t,\lambda} = 0$, on a d'après le théorème 2.1, $f \in S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda)$. Donc $f \in \bigcap_{t>0} S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda)$ et $I \subset \bigcap_{t>0} S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda)$. D'après le lemme 5.1 et la relation (1.4), on a $\bigcap_{t>0} S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda) \subset J(\lambda)$. Comme d'après (1.5), $J(\lambda) \subset I$, on obtient (1).
$0 \le m_I(\lambda) < +\infty$
Soit $\varphi \in I^{\perp}$.
On a toujours $J(\lambda) \subset I$, donc $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{\lambda\}$ et $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson. A partir des estimations (1.13), on peut voir comme dans [**2**], prop 2.6 que $\varphi^{+} \in \mathcal{N}$. D'après le théorème 4.2,

$$I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S(\varphi)I^{\infty}(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)))$$

donc ou bien

$$I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \supset I^{\infty}(\lambda)$$

ou bien il existe $t > 0$ tel que

$$I_\varphi = I_\varphi^{(d)} \cap S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda) = S_{t,\lambda}I^{\infty}(\lambda).$$

Comme pour $t \leq m_I(\lambda)$, $S_{m_I(\lambda),\lambda} I^\infty(\lambda) \subset S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda)$ et $I = \underset{\varphi \in I^\perp}{\cap} I_\varphi$, on a $S_{t,\lambda} I^\infty(\lambda) = \{f \in \mathcal{B} \ / \ f.S^*_{t,\lambda} = 0\}$, $t \leq m_I(\lambda)$. On a donc dans tous les cas $S_{m_I(\lambda),\lambda} I^\infty(\lambda) \subset I$ et $I \cap A^\infty \neq 0$. D'après le théorème 4.1, ou bien

$$I = I^{d_I(\lambda)}$$

ou bien il existe $t_1 > 0$ tel que

$$I = S_{t_1,\lambda} I^\infty(\lambda).$$

Dans le deuxième cas

$$I = \{f \in \mathcal{B} \ / \ f.S^*_{t_1,\lambda} = 0\}$$

et $t_1 = m_I(\lambda) > 0$, et dans le premier cas, on a $m_I(\lambda) = 0$, et $I = I^{d_I(\lambda)}$. □

2. Cas où $h(I)$ est dénombrable

On peut maintenant donner une description des idéaux de $\mathcal{B}$ tels que $h(I)$ est une partie dénombrable de Γ.

On note

$I^a = \{f \in \mathcal{B}, \ / \ \forall S \in S_a$ telle que $S^* \in I^\perp, \langle f, S^* \rangle = 0\}$

et à nouveau

$I^{(d)} = \{f \in \mathcal{B} \ / \ f$ est plate à l'ordre $d_I(\lambda)$, $(\lambda \in h(I))\}$

THÉORÈME 5.1. *Si I est un idéal de $\mathcal{B}$ tel que $h(I)$ est dénombrable, alors*

$$I = I^a \cap I^{(d)}$$

DÉMONSTRATION. On a clairement $I \subset I^a \cap I^{(d)}$.

Soit $f \in I^a \cap I^{(d)}$. Posons $J = \{g \in \mathcal{B}, f.g \in I\}$

On va montrer que $h(J) = \emptyset$. Soit λ un point isolé de $h(J)$. L'algèbre $\mathcal{B}$ étant régulière, il existe un élément u de $\mathcal{B}$ tel que $\lambda \notin \mathrm{Supp}(1-u)$ et $\mathrm{Supp}(u) \cap (h(J) \setminus \{\lambda\}) = \emptyset$.

Alors $u(1-u) \in J(h(J))$, et donc $u(1-u) \in J$.

$$\text{Soit} \quad H = \{g \in \mathcal{B}, gu \in J\} = \{g \in \mathcal{B}, guf \in I\}.$$

Alors $h(H) \subset h(J)$, et d'autre part, $1 - u \in H$, donc $h(H) \subset \{\lambda\}$. Supposons que $d_I(\lambda) < +\infty$ et soit $g \in I$ tel que $g^{(d_I(\lambda))}(\lambda) \neq 0$. Alors

$$\frac{f}{(\alpha - \lambda)^{d_I(\lambda)+1}} \in \mathcal{B} \text{ et } h = \frac{g}{(\alpha - \lambda)^{d_I(\lambda)+1}} \in \mathcal{B}$$

avec $h(\lambda) \neq 0$. On a

$$hf = \frac{f}{(\alpha - \lambda)^{d_I(\lambda)+1}} g \in I.$$

Donc $h \in J$, ce qui contredirait le fait que $\lambda \in h(J)$. Donc $d_I(\lambda) = +\infty$ et $f \in I^\infty(\lambda)$.

Si $m_I(\lambda) = +\infty$, alors d'après (5.4) et le lemme 5.3, on a $f.S^*_{q,\lambda} = 0$ $(q \geq 1)$ et $f \in J(\lambda)$. Selon la proposition 5.1, il existe une suite $(e_p)_{p \geq 1}$ d' éléments de $J(\lambda)$ telle que

$$f = \lim_{p \to +\infty} f e_p.$$

Comme $h(H) \subset \{\lambda\}$, $J(\lambda) \subset H$. Donc $e_p uf \in I$ et $uf \in I$.

Supposons $m_I(\lambda) < +\infty$. On considère d'abord le cas où $0 < m_I(\lambda) < +\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $g \in I$ tel que $g.S^*_{m_I(\lambda)+\epsilon} \neq 0$.
Mais, selon (5.4) et le lemme 5.3, on obtient

$$\begin{cases} g.S^*_{m_I(\lambda),\lambda} = 0 \\ f.S^*_{m_I(\lambda),\lambda} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} g = S_{m_I(\lambda),\lambda} l \\ f = S_{m_I(\lambda),\lambda} h, \end{cases}$$

où l et h sont des fonctions de $I^\infty(\lambda)$. Il vient alors

$$lf = l.S_{m_I(\lambda),\lambda} h = gh \in I$$

donc $l \in J \subset H$ et selon le corollaire 5.1 $l.S^*_{\epsilon,\lambda} = lS_{m_I(\lambda),\lambda}.S^*_{m_I(\lambda)+\epsilon,\lambda} = gS^*_{m_I(\lambda)+\epsilon,\lambda} \neq 0$ et $m_H(\lambda) = 0$.
Dans le cas où $m_I(\lambda) = 0$, cette propriété est également vérifiée puisque $H \supset I$. Par conséquent, selon la classification de la proposition 5.2, on a $H = I^{(p)}(\lambda)$ où $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En particulier $I^\infty(\lambda) \subset H$. Donc $(F_k)_{k \geq 1} \in H$ $(k \geq 1)$, où $(F_k)_{k \geq 1}$ est la suite d'éléments de $I^\infty(\lambda)$ donnée par la proposition 3.2.

On a alors $F_k uf \in I$, et on en déduit à nouveau que $uf \in I$.

On a donc dans tous les cas $uf \in I$. Donc $u \in J$.
Comme $u(\lambda) = 1$, $h(J)$ ne peut pas avoir de point isolé. Comme il est dénombrable, il est nécessairement vide.
On a finalement

$$J = \mathcal{B}, \qquad I = I^a \cap I^{(d)}$$

□

REMARQUE 5.1. En considérant l'idéal I_φ, on en déduit que les éléments φ de $\mathcal{B}^*$ de support dénombrable sont synthétisables (au sens de la remarque 1.6) par des mesures de Dirac et leurs dérivées successives et des hyperfonctions associées à des fonctions intérieures singulières définies par des mesures de Dirac.

Partie 2

Étude du cas d'une algèbre quasianalytique

CHAPITRE 6

Idéaux fermés d'une algèbre de fonctions quasianalytique

On considère maintenant les algèbres à poids $A_{\omega'_k}(\Gamma)$ associées aux poids ω'_k définis par

$$\omega'_k(n) = \begin{cases} e^{\frac{k|n|}{1+\log(|n|)}} & (n < 0) \\ (1+n)^k & (n \geq 0) \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log(\omega'_k(n))}{1+n^2} = +\infty$$

et l'algèbre $A_{\omega'_k}(\Gamma)$ est alors une algèbre de Banach non régulière (cf [**17**]). On dit alors que $A_{\omega'_k}(\Gamma)$ est une *classe de fonctions quasianalytique*. On considère alors l'algèbre

$$\mathcal{D} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{\omega'_k}(\Gamma).$$

Il s'agit clairement d'une algèbre de Fréchet. Remarquons que

$$A^\infty \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{B} \tag{6.1}$$

et que $\mathcal{D}$ est telle que $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{D}$ et telle que l'ensemble des caractères bornés coincide avec les évaluations aux points de Γ. On se trouve donc dans la situation générale du chapitre de préliminaires. Le dual de $\mathcal{D}$ est donc un ensemble d'hyperfonctions et la dualité entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$ est définie par la relation

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\varphi}(-n-1) \quad (f \in \mathcal{D}, \varphi \in \mathcal{D}^*) \tag{6.2}$$

Remarque 6.1. Dans le cas de l'algèbre $\mathcal{D}$, on peut appliquer le théorème de sommabilité du logarithme de Volberg (cf [**5**], [**14**]) :
Si la suite $(\rho(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i)} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log(\rho(n))}{1+n^2} = +\infty \\ \text{(ii)} (\dfrac{\rho(n+1)}{\rho(n)})_{n\geq 1} \text{ est décroissante à partir d'un certain rang} \\ \text{(iii)} \dfrac{\log(\rho(n))}{\sqrt{n}} \text{ est croissante à partir d'un certain rang} \end{cases}$$

et si $f \in L^\infty(\Gamma)$, $f \neq 0$ et $|\hat{f}(-n)| = O(\frac{1}{\rho(n)})$, alors $\log|f| \in L^1(\Gamma)$.

Ces conditions étant vérifiées pour $\rho(n) = \omega'_k(-n)$, on voit que $\log|f| \in L^1(\Gamma)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Ceci implique en particulier que $\mathcal{D}$ est intègre et que $Z(f) = \{z \in \Gamma \ / \ f(z) = 0\}$ est de mesure nulle pour $f \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. On verra par la suite que $Z(f)$ est même un ensemble de Carleson.

1. Étude des idéaux $I_{S,\mathcal{D}}$

On note de manière analogue aux chapitres précédents

$$I_{S,\mathcal{D}} = \{f \in \mathcal{D} \ / \ f.S^* = 0\}$$

et, pour tout fermé E de Γ

$$I^\infty_{\mathcal{D}}(E) = \{f \in \mathcal{D} \ / \ f \text{ est plate sur } E\}$$

On déduit de (6.1) et des méthodes du chapitre 2 le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. *Soit ν une mesure positive singulière et soit $E = \mathrm{Supp}(\nu)$. Alors*

$$I_{S_\nu,\mathcal{D}} = S_\nu I^\infty_{\mathcal{D}}(E) \subset I^\infty_{\mathcal{D}}(E)$$

et les applications $f \mapsto S_\nu f$ de $I^\infty_{\mathcal{D}}(E)$ dans lui-même et $f \mapsto \overline{S_\nu} f$ de $S_\nu I^\infty_{\mathcal{D}}(E)$ dans $I^\infty_{\mathcal{D}}(E)$ sont continues.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que, puisque $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, alors pour $f \in \mathcal{D}$ la relation

$$f.S^*_\nu = 0$$

implique que la fonction f est plate sur $\mathrm{Supp}(\nu)$. Par ailleurs, en remarquant que , si $k \geq 0$, la suite $(\dfrac{kn}{\log(n)+1})_{n\geq 1}$ est croissante, on constate que les calculs des lemmes 2.1 et 2.2 restent valables dans ce contexte. On en déduit que si $f \in \mathcal{D}$, $\varphi \in \mathcal{D}^*$ et si $\hat{\varphi}(n) = 0$ pour $n < 0$

$$\sum_{n<0} |\widehat{f.\varphi}(n)|\omega'_k(n) < +\infty \text{ pour tout } k \geq 1,$$

et $S_\nu f \in I^\infty_\mathcal{D}(E)$ pour toute fonction $f \in I^\infty_\mathcal{D}(E)$. De plus, l'application $f \mapsto S_\nu f$ de $I^\infty_\mathcal{D}(E)$ dans lui-même est continue. Posons à nouveau pour $\varphi \in Hol(\mathcal{D})$, $\varphi_r(z) = \varphi(rz)$ pour $|z| < 1$; l'analogue du lemme 2.2 montre que pour $g \in I^\infty_\mathcal{D}(E)$

$$gS_r \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} gS \text{ pour la topologie de } \mathcal{D}.$$

On en déduit que $S_\nu I^\infty_\mathcal{D}(E) \subset I^\infty_{S_\nu,\mathcal{D}}$, puis comme $\displaystyle\sum_{n<0}|\widehat{f.\frac{1}{S_\nu}}(n)|\omega'_k(n) < +\infty$ pour tout $k \geq 1$, que $f.\overline{S_\nu} \in I^\infty_\mathcal{D}(E)$ pour toute $f \in I_{S_\nu,\mathcal{D}} \subset I^\infty_\mathcal{D}(E)$. Donc

$$I_{S_\nu,\mathcal{D}} = S_\nu I^\infty_\mathcal{D}(E)$$

et $S_\nu I^\infty_\mathcal{D}(E)$ est fermé. La continuité de l'application $f\overline{S_\nu}f$ sur $S_\nu I^\infty_\mathcal{D}(E)$ résulte alors du théorème du graphe fermé. □

2. Étude de $I \cap A^\infty$ pour I idéal de $\mathcal{D}$.

On considère l'algèbre de convolution $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} / \ \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n<0} |u_n|\omega'_p(n) < +\infty, \ \exists q \in \mathbb{N}, \sum_{n\geq 0} |u_n|{\omega'_q}^{-1}(-n) < +\infty\}$$

Cette algèbre est un cas particulier des algèbres de convolution étudiées dans [**4**]. On note

$$\mathcal{A}^- = \{u \in \mathcal{A} \ / \ u_n = 0 \ (n \geq 0)\},$$
$$\mathcal{A}^+ = \{u \in \mathcal{A} \ / \ u_n = 0 \ (n < 0)\},$$

et $*$ le produit de convolution usuel sur $\mathbb{Z}$. Soit

$$\mathcal{S} : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

l'opérateur de translation (shift) usuel. Pour $\varphi \in \mathcal{A}$, on pose

$$e^\varphi = \sum_{n\geq 0} \frac{\varphi^{*n}}{n!}$$

où φ^{*n} désigne la puissance $n^{ième}$ de convolution de φ. On a alors, d'après un théorème général de factorisation ([**4**] th.4 p. 327) la propriété suivante :

THÉORÈME 6.2. *Pour tout $u \in \mathcal{A}$, il existe $\varphi \in \mathcal{A}^-$, $v \in \mathcal{A}^+$ et $k \geq 0$ tels que*

$$e^{\varphi} * u = \mathcal{S}^{-k}(v)$$

Remarquons maintenant que $\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathcal{A}$. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ &= \{f \in \mathcal{D} \ / \ \hat{f}(n) = 0 \ (n < 0)\} = A^{\infty} \\ \mathcal{D}^- &= \{f \in \mathcal{D} \ / \ \hat{f}(n) = 0 \ (n \geq 0)\} \end{aligned}$$

On a alors $\widehat{\mathcal{D}^-} = \mathcal{A}^-$ et $\widehat{\mathcal{D}^+} = \widehat{A^{\infty}} \subset \mathcal{A}^+$. On obtient alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.1. *Pour toute $f \in \mathcal{D}$, il existe $g \in \mathcal{D}^-$, $h \in A^{\infty}$ et $k \geq 0$ tels que*

$$e^g f = \alpha^{-k} h$$

DÉMONSTRATION. On associe à la fonction f la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses coefficients de Fourier. Comme $u \in \mathcal{A}$, d'après le théorème 6.2, il existe des élements $\varphi \in \mathcal{A}^- = \mathcal{D}^-$ et $v \in \mathcal{A}^+$ tels que

$$e^{\varphi} * u = \mathcal{S}^{-k}(v).$$

Posons

$$g(e^{it}) = \sum_{n<0} \varphi_n e^{int}.$$

Alors $\hat{g} = \varphi$ et $g \in \mathcal{D}^-$, de même que $e^g - 1$. On a

$$\widehat{\alpha^k e^g f} = \mathcal{S}^k(\widehat{e^g f}) = v.$$

Comme $\alpha^k e^g f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma)$,

$$\sum_{n \geq 0} |v_n|(1+n)^k < +\infty \quad (k \geq 1)$$

et il existe $h \in A^{\infty}$ telle que $\hat{h} = v$. Donc $\alpha^k e^g f = h$ et $e^g f = \alpha^{-k} h$. $\square$

COROLLAIRE 6.2. *Pour toute $f \in \mathcal{D}$, il existe $k \geq 0$ et $h \in A^{\infty}$ tels que*

$$\overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^n f)} = \overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^{n-k} h)}$$

DÉMONSTRATION. Comme $\hat{g}(n) = 0$ pour $n > 0$, on a dans $\mathcal{D}$

$$e^g = \sum_{n \leq 0} \widehat{e^g}(n)\alpha^n$$

et selon le corollaire 6.1., il existe $h \in A^\infty$ tel que

$$\alpha^{-k}h = \lim_{m \to +\infty} \sum_{-m \leq n \leq 0} \widehat{e^g}(n)\alpha^n f$$

donc pour tout $n < 0$,

$$\alpha^{-n-k}h \in \overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^n f)}$$

De même, on a

$$e^{-g} = \sum_{n \leq 0} \widehat{e^{-g}}(n)\alpha^n$$

et on a

$$f = \lim_{m \to +\infty} \sum_{-m \leq n \leq 0} \widehat{e^{-g}}(n)\alpha^{n-k}h$$

et pour tout $n \leq 0$, on a

$$\alpha^n f \in \overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^{n-k}h)}$$

ce qui démontre le corollaire. $\square$

On a alors le théorème suivant

THÉORÈME 6.3. *Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $\mathcal{D}$. Alors*

$$I \cap A^\infty \neq \{0\}$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in I$, $f \neq 0$. Selon le corollaire 6.2, il existe $g \in A^\infty$ tel que

$$\overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^n f)} = \overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^{n-k}g)} \tag{6.3}$$

Mais $\overline{\mathrm{Vect}_{n \leq 0}(\alpha^n f)} \subset I$ et $\alpha^{-k}g \in I$, puis $g \in I$. On a par ailleurs necessairement $g \neq 0$ selon (6.3). $\square$

REMARQUE 6.2. Puisque $\dfrac{\log(\omega_k'(-n))}{\sqrt{n}} \underset{\mathrm{n} \to +\infty}{\to} +\infty$, le fait que $I \cap A^\infty \neq \{0\}$ pour tout idéal I non réduit à $\{0\}$ permet de voir exactement comme dans la situation analogue étudiée dans les lemme et corollaire 4.1 qu'ici pour *tout* idéal fermé I de $\mathcal{D}$, on a

$$I + A^\infty = \mathcal{D}$$

puis

$$I = \overline{[\bigcup_{n\leq 0} \alpha^n(A^\infty \cap I)]}$$

Cette propriété va permettre de décrire au paragraphe suivant *tous* les idéaux fermés de $\mathcal{D}$.

3. Description des idéaux fermés I de $\mathcal{D}$.

On montre de manière analogue au chapitre 4 le théorème suivant :

THÉORÈME 6.4. *Soit I un idéal fermé de $\mathcal{D}$ non réduit à $\{0\}$. Alors $h(I)$ est un ensemble de Carleson et il existe une mesure singulière $\nu \geq 0$ avec* $\mathrm{Supp}(\nu) \subset h(I)$ *telle que*

$$I = I^{(d)} \cap S_\nu I^\infty_{\mathcal{D}}(\mathrm{Supp}(\nu))$$

DÉMONSTRATION. Comme $I \cap A^\infty \neq \{0\}$, $h(I)$ est un ensemble de Carleson. On déduit la description de I de celle des idéaux de A^∞ donnée dans [**24**] en suivant la même démarche que dans la démonstration du théorème 4.1. □

REMARQUE 6.3. Ce résultat peut s'interpréter en termes de synthèse des hyperfonctions. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}^*$. L'ensemble $I_{\varphi,\mathcal{D}} := \{f \in \mathcal{D} \ / \ f.\varphi = 0\}$ est alors un idéal fermé de $\mathcal{D}$. Si

$$I_{\varphi,\mathcal{D}} = \{0\},$$

alors l'ensemble

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}(\varphi) := \overline{\mathrm{Vect}\{[\alpha^n\varphi]_{n\in\mathbb{Z}}\}}^{\omega^*} = \mathcal{D}^*$$

où ω^* désigne la topologie faible * associée à la relation de dualité (6.2). On peut alors synthétiser φ par des mesures de Dirac aux points λ de Γ. Si

$$I_{\varphi,\mathcal{D}} \neq \{0\},$$

il existe $f \in A^\infty$, $f \neq 0$, telle que $f.\varphi = 0$. Comme $\mathcal{B}^{*-} = \mathcal{B}^{*+}$, le calcul du début de la démonstration du théorème 4.2. montre que $f.\varphi^+ \in A^\infty$ et donc que $\varphi^+ \in \mathcal{N}$. En utilisant à nouveau les estimations de [**1**] lemme 5, on en déduit que $\varphi \in \mathcal{B}^*$. Le théorème 4.2. montre alors que $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson et que $f.S(\varphi)^* = 0$ où $S(\varphi)$ désigne comme précédemment le dénominateur de φ^+.

Réciproquement, si $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un ensemble de Carleson et si $\varphi^+ \in \mathcal{N}$, alors il existe $f \in A^\infty$, $f \neq 0$ telle que $f.\varphi = 0$ et $I_{\varphi,\mathcal{D}} \neq \{0\}$. Dans ce cas, de même qu'au théorème 4.2., on voit que $\mathrm{Supp}(\nu(\varphi)) \subset \mathrm{Supp}(\varphi)$ où $\nu(\varphi)$ est la mesure intérieure qui définit $S(\varphi)$. On définit alors l'indice $d_I(\lambda)$ de même que précédemment et on pose

$$I_{\mathcal{D}}^{(d)} = \{f \in \mathcal{D}, f \text{ est plate à l'ordre } d_I(\lambda)(\lambda \in h(I))\}.$$

On a alors la description

$$I_{\varphi,\mathcal{D}} = I_{\mathcal{D}}^{(d)} \cap S(\varphi) I_{\mathcal{D}}^{\infty}(\mathrm{Supp}(\nu(\varphi))).$$

On peut donc synthétiser φ par les translatés de $S(\varphi)^*$ et par des mesures de Dirac et certaines de leurs dérivées en des point de $\mathrm{Supp}(\varphi)$.

Remarque 6.4. On peut obtenir des résultats analogues pour l'algèbre

$$\mathcal{D}_p = \bigcap_{k \geq 1} A_{\omega'_{k,p}}(\Gamma)$$

où l'on définit le poids $\omega'_{k,p}$ par

$$\omega'_{k,p}(n) = \begin{cases} \omega'_p(n) & (k \geq 1, n < 0) \\ \omega'_k(n) = (1+n)^k & (n \geq 0) \end{cases}$$

mais il faudrait adapter pour cela les résultats de [**12**] qui étendent à certains espaces de Hilbert de suites pondérées une partie des résultats obtenus par Borichev dans [**4**]. Nous ne le ferons pas ici.

Bibliographie

[1] A. Atzmon: "Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces" *Acta Math. 144* (1980) 27-63.

[2] A. Atzmon: "Operators with resolvent of bounded characteristic" *Int. equations and Op. theory 6, Birkhäuser Verlag, Basel*(1983) 779-803.

[3] C.A. Berenstein, R. Gay: Complex variables, an introduction. *Springer Verlag, Graduate texts in mathematics 125* (1991).

[4] A.A. Borichev: "Boundary uniqueness theorems for almost analytic functions and asymetric algebras of sequences". *Math. USSR Sbornik 64* (1988) 323-338.

[5] A.A. Borichev, A.L. Volberg: "Uniqueness theorems for almost analytic functions".*Algebra i-Analiz* (1989) 146-177.

[6] L. Carleson: "Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle". *Acta Math.87* (1952) 325-345.

[7] I. Colojoara, C. Foias: Theory of generalized spectral operators. *Gordon and Breach, New York* (1968)

[8] J. Esterle: "Quasimultipliers, representation of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras"*Springer Lecture Notes* **975** (1983) 66-162.

[9] J. Esterle: "Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness, and closed ideals of A^+". *J. Reine Angew. Math.* **450** (1994) 43-82.

[10] J. Esterle: "Closed ideals in certain Beurling algebras and synthesis of hyperdistributions". *Studia Math.* **120**(1996) 113-153.

[11] J. Esterle: "Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymetric weighted shifts. *J. Func. Analysis* **144** (1997) 64-104.

[12] J. Esterle, A. Volberg: "Asymptotically holomorphic functions, quasianalytic weights and shift invariant subspaces" *Laboratoire de mathématiques pures de Bordeaux, prépublication n^o 19* (avril 1996)

[13] K. Hoffmann: Banach spaces of analytic functions. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey* (1962).

[14] B. Joricke, A.L. Volberg:"Summability of the logarithm of an almost analytic function and generalization of the Levinson–Cartwright theorem." *Math Sb 130* (1987) 337-349.

[15] J.P. Kahane: Séries de Fourier absolument convergentes. *Erg. der Math. 50, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York* (1970).

[16] J.P. Kahane et R. Salem: Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Deuxième édition *Hermann, Paris* (1994).

[17] Y. Katznelson: An introduction to harmonic analysis. *Wiley, Paris-New-York* (1968).

[18] B. Korenblum: "Closed ideals in the rings A^n" *Functional Anal Appl. 6* (1972) 203-214.

[19] B. Korenblum: "A beurling type theorem" *Acta Math.* **138** (1977) 265-293.

[20] N.G. Makarov: "invariant subspaces of the space $\mathcal{C}^\infty$" *Math. USSR Sbornik* **Vol 47** (1984) 1-26.

[21] N.K. Nikollski: Proc. Stechlov. Inst. Math. 120 (1974). Traduction anglaise **AMS, 1976**, pp 1–276.

[22] W. Rudin: Real and complex analysis *Mc Graw-Hill Mathematics series* (1987).

[23] A. Shields: "Weighted shift operators and analytic function theory." in *Topics in Operator Theory* (C.Pearcy, Ed) *Amer. Math. Soc. Math Surveys* **Vol 13** *Amer. Math. Soc., Providence*, (1974) 49-128.

[24] B. A. Taylor et D. L. Williams: "Ideals in ring of analytic functions with smooth boundary values." *Can. J. Math. 22.*(1970) 1266-1283.

[25] M. Zarrabi: "Contractions à spectre dénombrable et propriétés d'unicité des fermés dénombrables du cercle" *Ann. Inst. Fourier* (1993) 251-263.

[26] E. H. Zerouali: "Ensembles universels de synthèse pour les algèbres de Beurling" *Bull. Sci. Math.* (1994) 209-223