Couplage numérique pour des simulations de flux d'air dans des géométries complexes avec adaptation de maillage

Cécile Dobrzynski

dobrzyns@ann.jussieu.fr

INRIA-Laboratoire Jacques-Louis Lions

But : effectuer des simulations d'air conditionné dans des bâtiments. Autrement dit, on veut quantifier la répartition de température dans un bâtiment réchauffé ou refroidie par une ou plusieurs bouches d'aération.

Modélisation du problème

- **Ecoulement d'air :**

On considère l'air comme un fluide newtonien incompressible. Son écoulement est donc régie par les équations de Navier-Stokes en hypothèse d'incompressibilité :

$$\begin{cases} \rho(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u) = \nabla . S - \rho g e_3 \\ \nabla . (\rho u) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T), \end{cases} \quad (1)$$

avec S le tenseur de contraintes et g la gravité.

- **Hypothèse de Boussinesq :**

Comme la densité du fluide varie faiblement avec la température, on peut appliquer l'hypothèse de Boussinesq : les variations de la densité sont donc uniquement prises en compte dans la mesure où elle donne lieu à une poussée d'Archimède.

Evaluons le terme de Boussinesq :
On pose $\theta = \theta_0 + \theta'$,

$$|\theta'| << |\theta_0| \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p_0}{R(\theta_0 + \theta')} \sim \frac{p_0}{R\theta_0}(1 - \frac{\theta'}{\theta_0})$$

Ce qui peut être réécrit de façon équivalente :

$$\rho - \rho_0 = -\alpha \rho_0 (\theta - \theta_0) \quad (2)$$

- **Calcul de la répartition de température :**

Pour évaluer la température dans le domaine, on résout l'équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3)$$

où κ est la diffusion thermique.

- **Conditions aux limites :**

Pour le calcul fluide :

– vitesse spécifiée (condition de Dirichlet) :

$$u = w \text{ sur } \Gamma_1, \quad (4)$$

– traction spécifiée :

$$-p + (\nu(\nabla u + \nabla u^T).n.n) = 0 \quad (5)$$

$$\text{et } (\nu(\nabla u + \nabla u^T).n.s) = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \quad (6)$$

où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, n et s représente respectivement la normale unitaire et le vecteur tangent. Γ_1 correspond aux murs et aux entrées d'air, et Γ_2 aux sorties d'air.

Pour le calcul de température :

– température spécifiée (condition de Dirichlet):

$$\theta = \theta_0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad (7)$$

– condition de Fourier:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} + a\theta + b(\theta^4 - \theta_e^4) = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \quad (8)$$

où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, θ_e est la température extérieure, a représente le coefficient d'absorption et b le coefficient de radiation.

Adaptation de maillage

But : construire un maillage optimal c'est-à-dire sur lequel l'erreur commise lors des calculs est équirépartie.

- **Estimateur géométrique :**

On majore l'erreur d'approximation sur un élément du maillage par l'erreur d'interpolation :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \leq c \max_{x \in K} \max_{\vec{e} \in E_K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle \quad (9)$$

Rq : cet estimateur ne dépend pas du problème résolu mais simplement des arêtes du maillage.

Comme cet estimateur est délicat à évaluer, on exhibe un tenseur de métrique vérifiant :

$$\max_{x \in K} \langle \vec{e}, |H_u(x)| \vec{e} \rangle \leq \langle \vec{e}, \widetilde{\mathcal{M}}(K) \vec{e} \rangle \quad (10)$$

- **Création de la métrique :**

Idée : contrôler l'erreur par le biais d'une carte de métrique définie sur les sommets du maillage.

On fixe l'erreur qu'on s'autorise

$$\varepsilon_K = c \max_{\vec{e} \in E_K} \langle \vec{e}, \widetilde{\mathcal{M}}(K) \vec{e} \rangle \,. \quad (11)$$

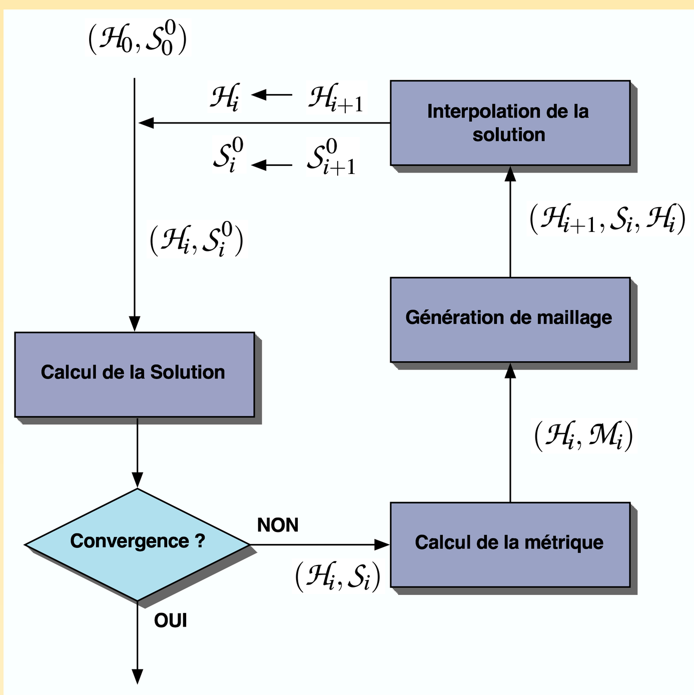
Ce qui peut se réécrire comme :

$$\langle \vec{e}, \mathcal{M}(K)\,, \vec{e} \rangle = 1 \text{ pour tout } \vec{e} \in E_K \quad (12)$$

avec $\mathcal{M} = \mathcal{R} \Lambda \mathcal{R}^{-1}$ un tenseur de métrique où

$\Lambda = diag(\tilde{\lambda}_i)$
et $\tilde{\lambda}_i = \min_i(\max_i(c\varepsilon^{-1}|\lambda_i|, h_{max}^{-2}), h_{min}^{-2})$.

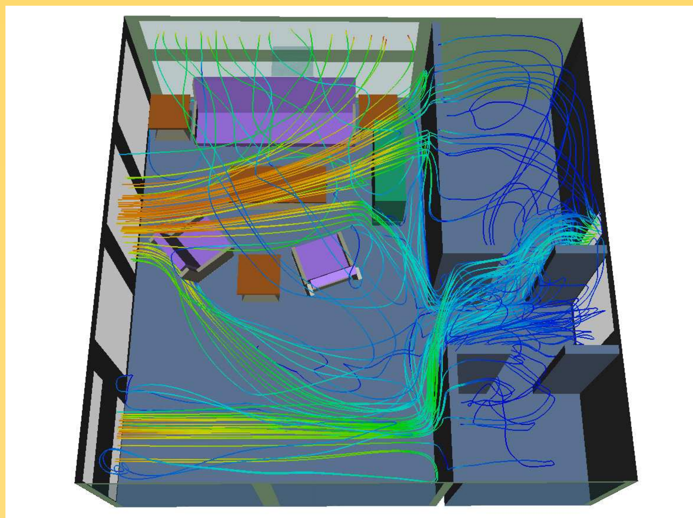
- **Schéma d'adaptation :**

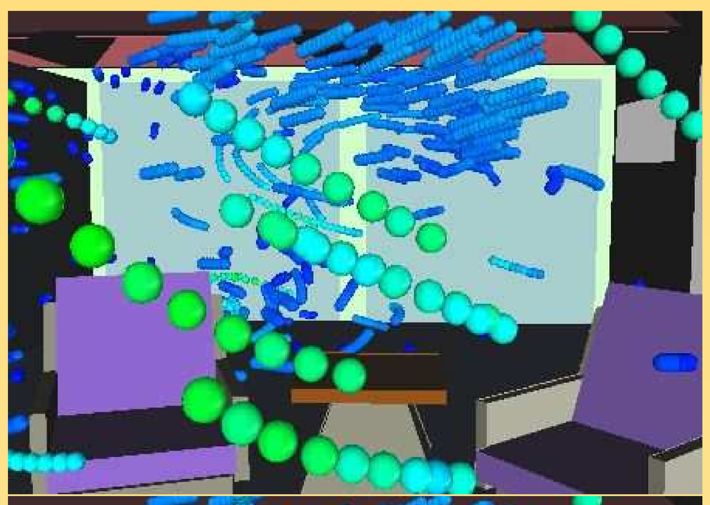


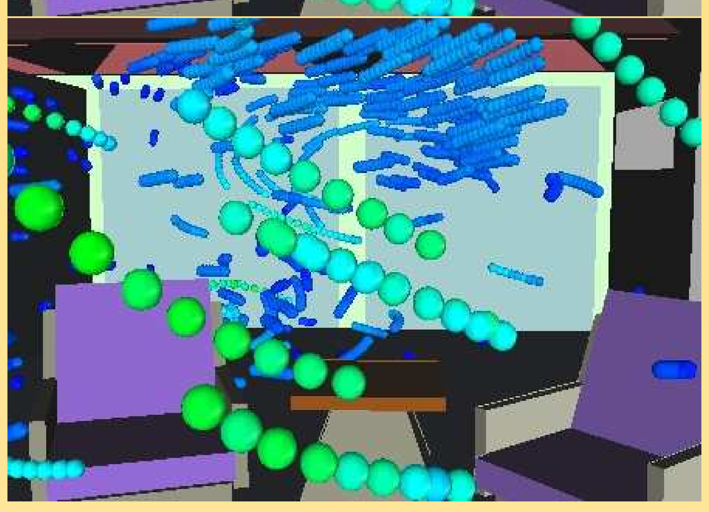
Résultats

Nous étudions ici le réchauffement du dernier étage d'une maison meublée. Deux entrées d'air chaud sont imposées ainsi que deux sorties. Tous les murs de la maison et les meubles sont considérés comme des parois visqueuses pour le calcul du fluide et des conditions d'absorption y sont imposées pour le calcul de température.

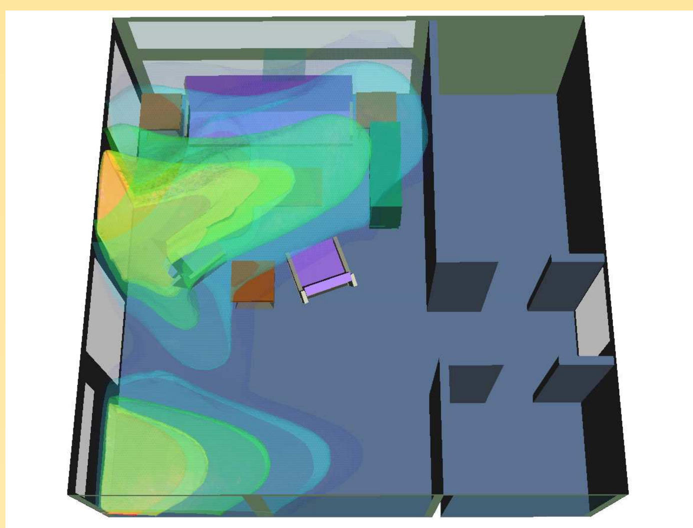
- **Lignes de courant de l'écoulement**







- **Isosurfaces de température**



- **Coupe volumique dans les tétraèdres associés au module de la vitesse**