

Éléments finis quadrilatéraux d'ordre élevé pour les équations de Vlasov-Maxwell

Marc Duruflé

27 mai 2008

- [G. Cohen, M. Duruflé](#)
Non Spurious Spectral-Like Element Methods for Maxwell's Equations
- Méthodes PIC utilisant des différences finies
Thèse de [R. Barthelme](#) sur le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et Maxwell
- [G. B. Jacobs, J. S. Hesthaven](#)
High-order nodal discontinuous Galerkin particle-in-cell method on unstructured grids
- Utilisation du code différences finies [QuickSilver](#) ([Sandia Labs](#))

Formulation des équations de Vlasov-Maxwell

Système de Maxwell

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \text{curl} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{curl} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Équations de mouvement relativiste des macro-particules

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt}(t) = \mathbf{v}_k(t)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt}(t) = \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{x}_k(t), t) + \mu \mathbf{v}_k(t) \times \mathbf{H}(\mathbf{x}_k(t), t))$$

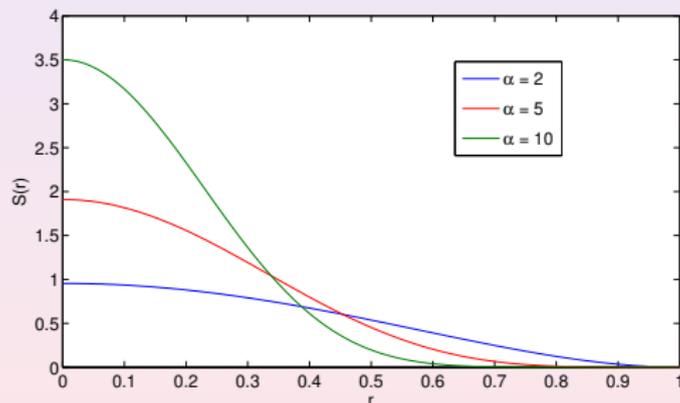
Relation entre le courant et les vitesses des particules

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \omega_k q_k \mathbf{v}_k(t) \mathcal{S}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t))$$

Fonction de distribution des particules

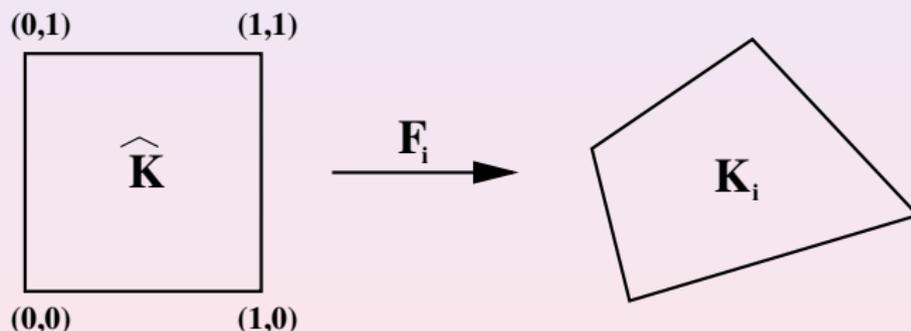
Fonctions de distribution radiales de rayon R

$$S(x - x_k) = \hat{S}(|x - x_k|) = \beta \left(1 - \frac{r}{R}\right)^\alpha$$



Maillage en quadrilatères/hexaèdres

$$\Omega = \bigcup_e K_e$$



Éléments finis d'arête :

$$V_E = \{u \in H(\text{curl}, \Omega) \text{ tel que } DF_e^* u \in Q_r^d\}$$

$$V_H = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } u \in Q_r^d\}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \varphi - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \varphi + \gamma \sum_e \int_{\Sigma_e} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}][\varphi \cdot \mathbf{n}] = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \psi + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \psi + \delta \sum_e \int_{\Sigma_e} [\mathbf{H} \times \mathbf{n}][\varphi \times \mathbf{n}] = 0$$

$$B_h \frac{dE}{dt} - R_h H + S_h^1 E = C_h V$$
$$D_h \frac{dH}{dt} + R_h^* E + S_h^2 H = 0$$

- Condensation de masse $\Rightarrow B_h, D_h, S_h^1, S_h^2$ diagonales par blocs.
- Tensorisation des fonctions de base $\Rightarrow R_h$ peu coûteux à évaluer
- C_h terme de couplage, explicité ultérieurement

Couplage avec le mouvement des particules

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt}(t) = \mathbf{v}_k(t)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt}(t) = \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E}_k + \mu(\mathbf{x}_k(t)) \mathbf{v}_k(t) \times \mathbf{H}_k)$$

Valeurs moyennes de E et H

$$\mathbf{E}_k = \int_{\Omega} E(\mathbf{x}) S_k(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{H}_k = \int_{\Omega} H(\mathbf{x}) S_k(\mathbf{x})$$

Système matriciel

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{dt} = \mathbf{C}_h^* \mathbf{E} + b\mathbf{v}(\mathbf{V}, \mathbf{H})$$

Couplage avec le mouvement des particules

Valeurs moyennes de E et H

$$E_k = \int_{\Omega} E(x) S_k(x)$$

$$H_k = \int_{\Omega} H(x) S_k(x)$$

Système matriciel

$$\frac{dX}{dt} = V$$

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = C_h^* E + bv(V, H)$$

Présence de $C_h^* \Rightarrow$ conservation d'une énergie discrète

$$\frac{1}{2} B_h E \cdot E + \frac{1}{2} D_h H \cdot H + \sum_k \omega_k m_k c_0^2 (\gamma_k - 1) = \text{Constante}$$

Schéma temporel

$$B_h \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = R_h H^{n+1/2} + C_h V^{n+1/2}$$

$$D_h \frac{H^{n+3/2} - H^{n+1/2}}{\Delta t} = -R_h^* E^{n+1}$$

$$\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} = V^{n+1/2}$$

$$\frac{\tilde{P}^{n+3/2} - \tilde{P}^{n+1/2}}{\Delta t} = -C_h^* E^{n+1} + bv \left(\frac{V^{n+3/2} + V^{n+1/2}}{2}, \bar{H}^{n+1} \right)$$

$$\text{CFL}_{\text{Maxwell}} = \max |\lambda(D_h^{-1/2} R_h^* B_h^{1/2})|$$

⇒ CFL la plus restrictive sauf plasmas de très haute densité

Schéma de Runge-Kutta plus coûteux et $\frac{\text{CFL}_{RK}}{\text{CFL}_{LF}} = 1.68$

Intégration numérique avec points de Gauss

$$(C_h V)_j = \sum_k q_k \omega_k \sum_e \sum_m \omega_m^l J_e(\hat{\xi}_m^l) \varphi_j(\xi_m) \cdot v_k \hat{S}(|\xi_m^l - x_k|)$$

Décomposition du produit $C_h V$

- Calcul de

$$S_{k,m} = \omega_m^l J_e(\hat{\xi}_m^l) \hat{S}(|\xi_m^l - x_k|)$$

pour tout point de quadrature de la zone d'influence

$$|\xi_m^l - x_k| \leq R$$

- Calcul du courant sur les points de quadrature

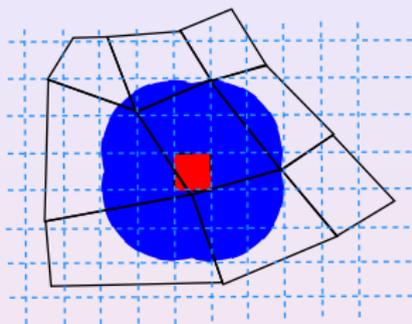
$$J(\xi_m^l) = \sum_k q_k \omega_k v_k S_{k,m}$$

- Intégration contre les fonctions de base

$$(C_h V)_j = \sum_m J(\xi_m^l) \cdot \varphi_j(\xi_m)$$

Complexité de C_h

Utilisation d'une grille régulière pour localiser les points de quadrature et les particules



- \Rightarrow pas de nécessité de localiser les particules dans les éléments du maillage, (on aurait eu besoin d'inverser F_i)
- Détection facile lorsque la particule sort du maillage, très utile lors de la destruction de particules
- Coût de C_h en $N_{part}k + 2n^2 r N_{elt}$

Choix de la précision d'intégration

$\alpha = 2$

R	$R = 5dx$	$R = 2dx$	$R = 1.5dx$	$R = dx$	$R = 0.5dx$
$r = 5$	4	5	6	6	10
$r = 7$	5	6	6	7	14
$r = 10$	7	8	9	10	20

$\alpha = 10$

R	$R = 5dx$	$R = 2dx$	$R = 1.5dx$	$R = dx$	$R = 0.5dx$
$r = 5$	4	5	6	9	34
$r = 7$	5	8	10	12	40
$r = 10$	7	10	10	12	58

Conservation de la charge ?

- Correction de Boris \Rightarrow résolution d'une équation de Poisson

$$\Delta\phi = \rho - \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})$$

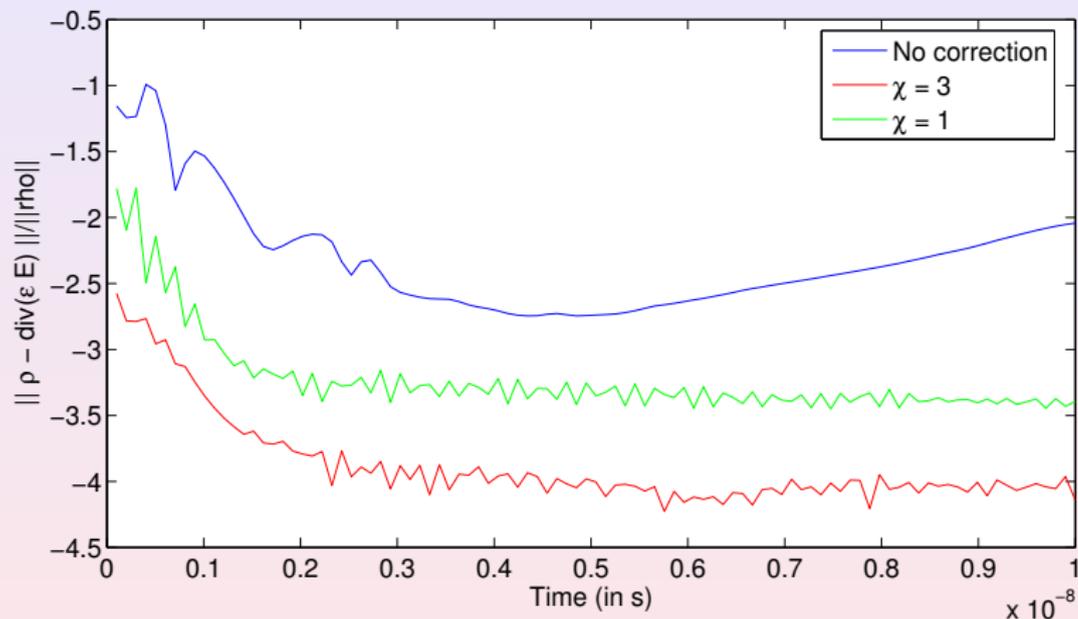
- Correction hyperbolique

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \phi = -\mathbf{J}$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{1}{\chi^2 c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho - \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})$$

Conservation de la charge ?



Création et destruction de particules

- Pour les faisceaux, particules créées en retrait par rapport au domaine de calcul
- Lorsque $|E \cdot n| > E_{\text{disruptif}}$, création de np particules avec

$$np q_0 \omega_k = \int_{\Gamma} E \cdot n$$

Particules créées avec une faible hauteur aléatoire et une faible vitesse initiale aléatoire

⇒ Correction de Boris dans ce cas

- Destruction de particules lorsque leur zone d'influence n'a pas d'intersection avec le maillage

⇒ Pas de correction lors de la destruction

Création et destruction de particules

- Pour les faisceaux, particules créées en retrait par rapport au domaine de calcul
- Lorsque $|E \cdot n| > E_{\text{disruptif}}$, création de np particules avec

$$np q_0 \omega_k = \int_{\Gamma} E \cdot n$$

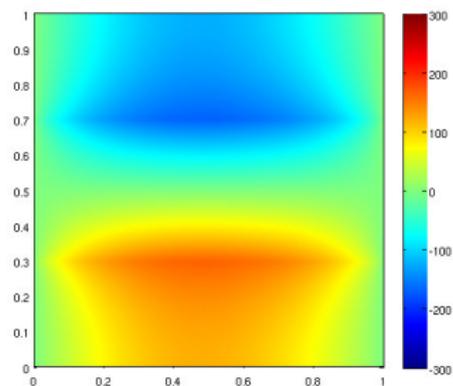
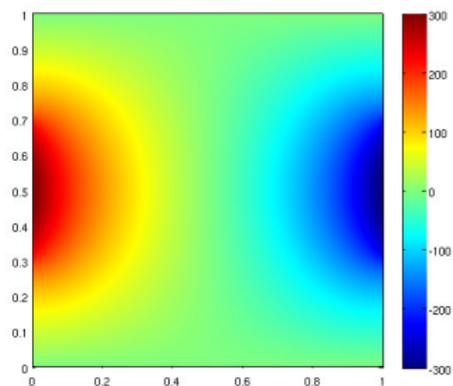
Particules créées avec une faible hauteur aléatoire et une faible vitesse initiale aléatoire

⇒ Correction de Boris dans ce cas

- Destruction de particules lorsque leur zone d'influence n'a pas d'intersection avec le maillage

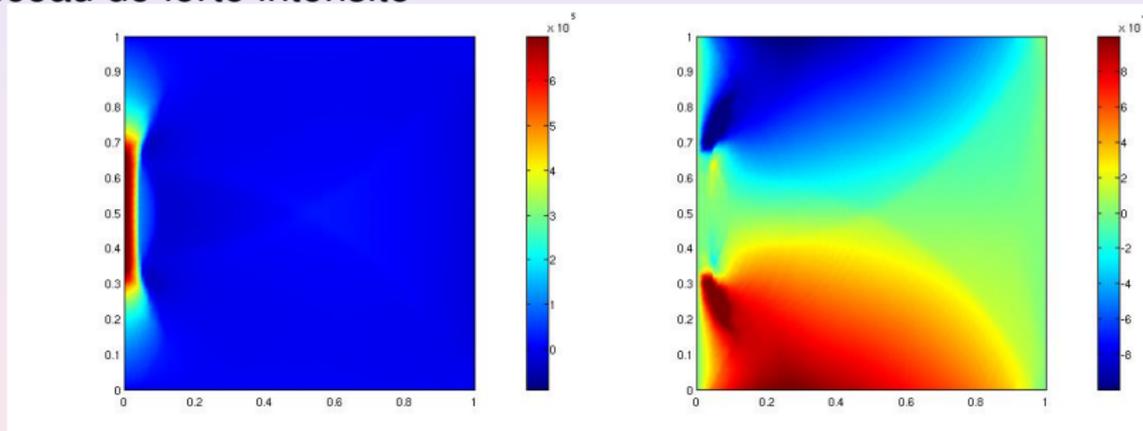
⇒ Pas de correction lors de la destruction

Faisceau de faible intensité

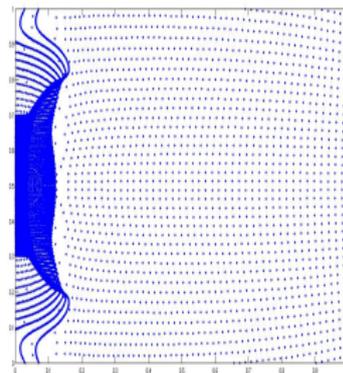
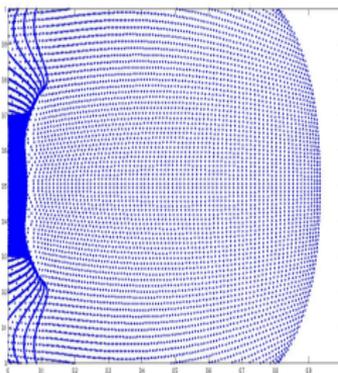
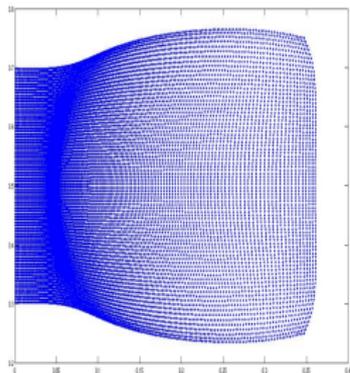


Faisceau d'électrons

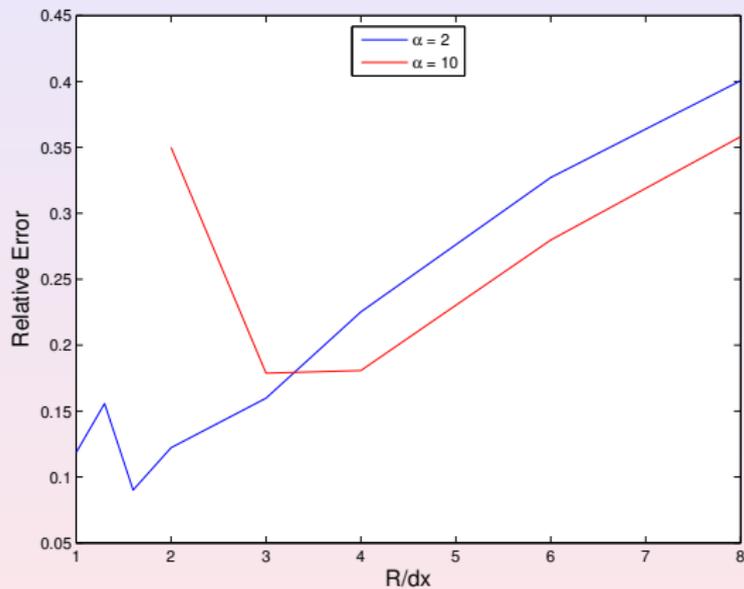
Faisceau de forte intensité



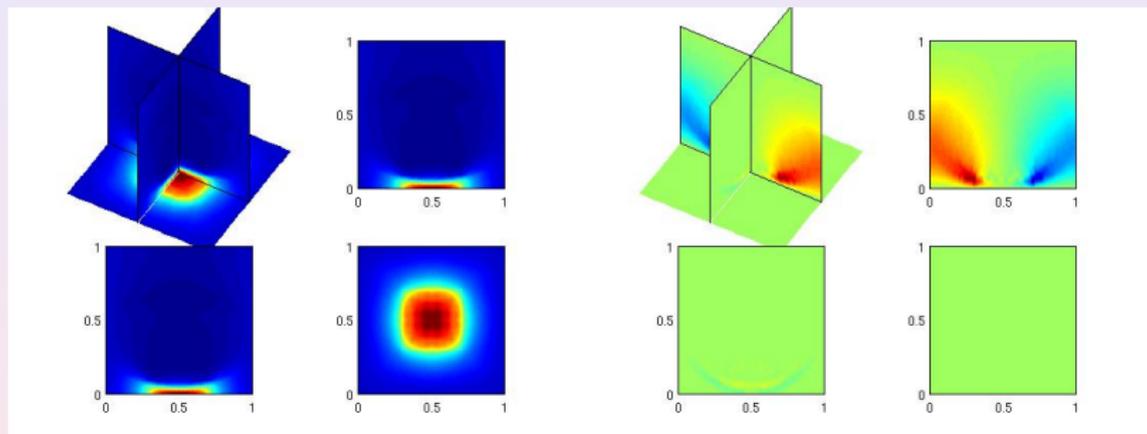
Faisceau d'électrons



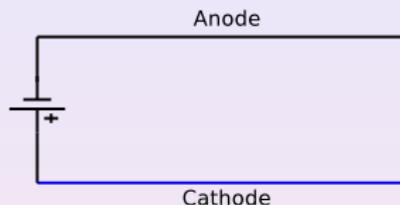
Faisceau d'électrons



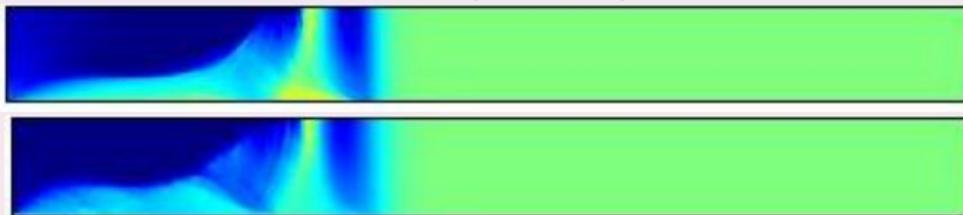
Faisceau d'électrons



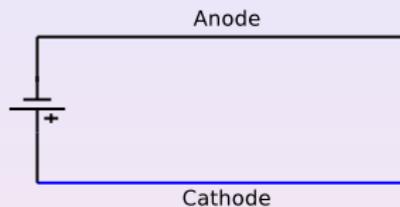
Ligne de transmission à isolement magnétique



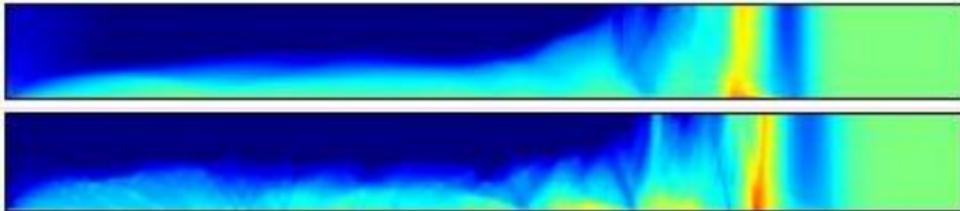
En haut, solution différences finies, en bas, solution éléments finis



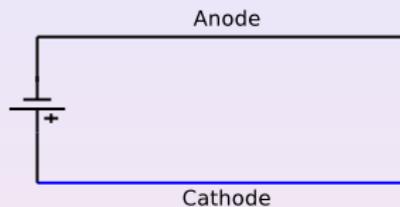
Ligne de transmission à isolement magnétique



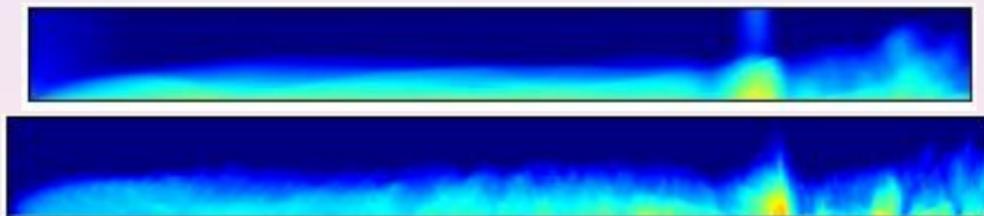
En haut, solution différences finies, en bas, solution éléments finis



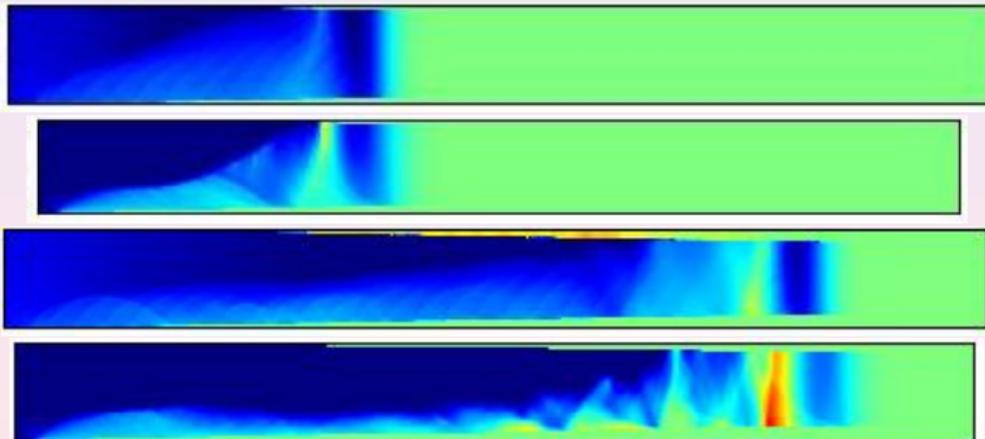
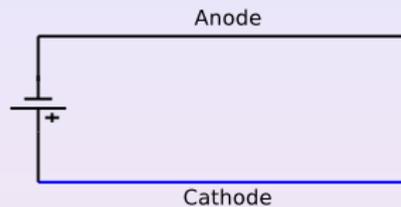
Ligne de transmission à isolement magnétique



En haut, solution différences finies, en bas, solution éléments finis

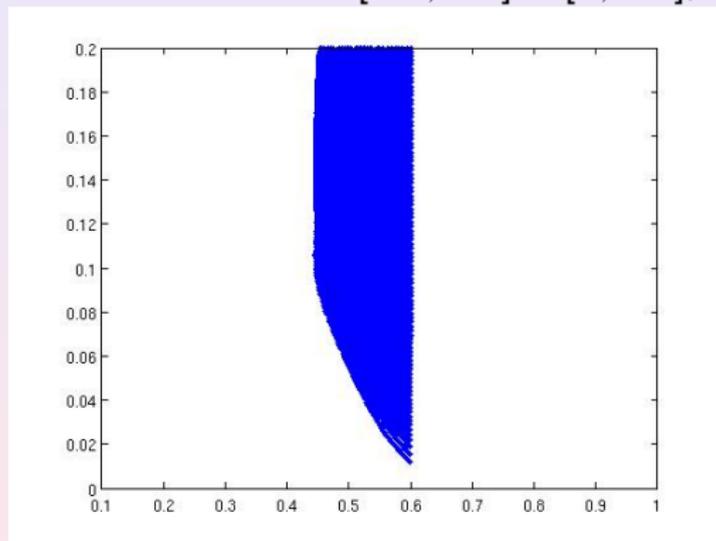


Ligne de transmission à isolement magnétique



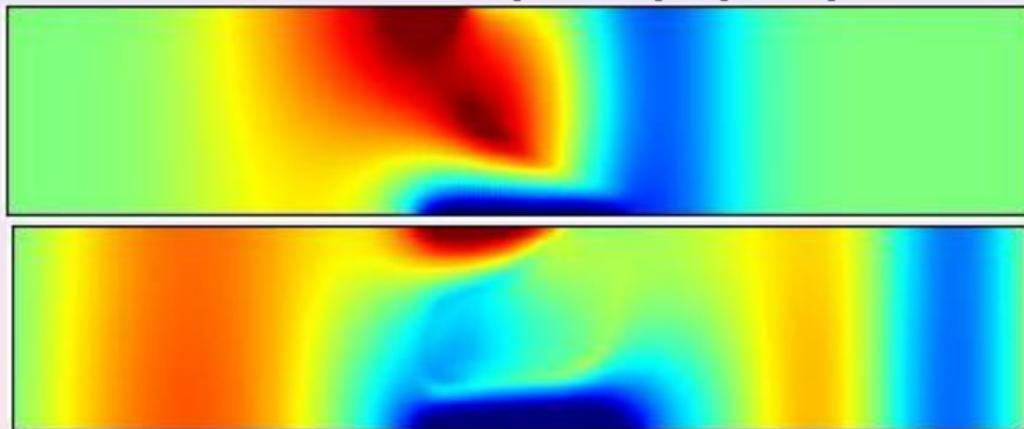
Interrupteur à plasma

Plasma froid localisé dans la zone $[0.4, 0.6] \times [0, 0.2]$, densité 10^{17}



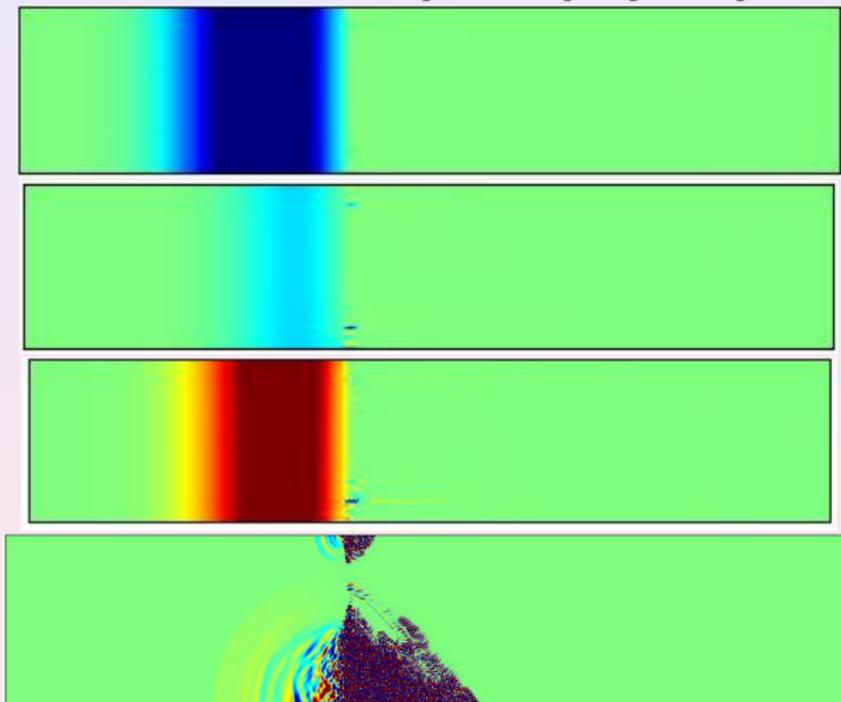
Interrupteur à plasma

Plasma froid localisé dans la zone $[0.4, 0.6] \times [0, 0.2]$, densité 10^{17}



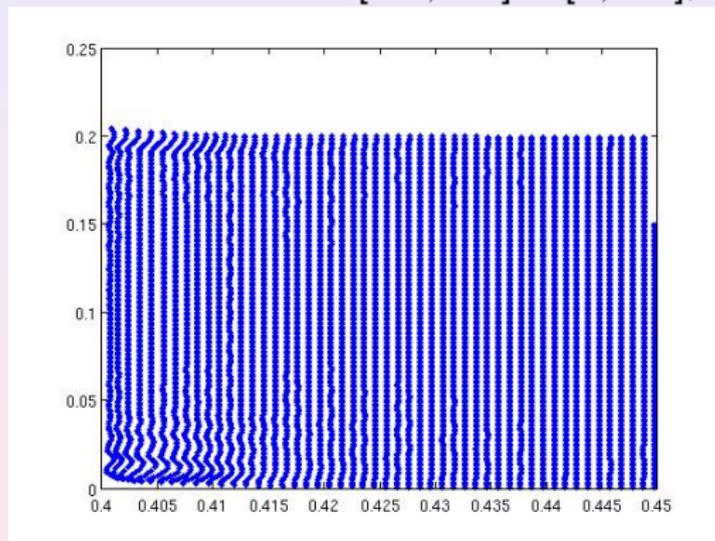
Interrupteur à plasma

Plasma froid localisé dans la zone $[0.4, 0.6] \times [0, 0.2]$, densité 10^{21}



Interrupteur à plasma

Plasma froid localisé dans la zone $[0.4, 0.6] \times [0, 0.2]$, densité 10^{21}



- Analyse/amélioration des techniques d'intégration
⇒ Réduction des oscillations parasites
- Comparaison avec des éléments finis d'ordre un
- Hybridation avec les différences finies
- Problèmes haute-fréquence