Un problème posé par
Yahia Ould Hamidoune

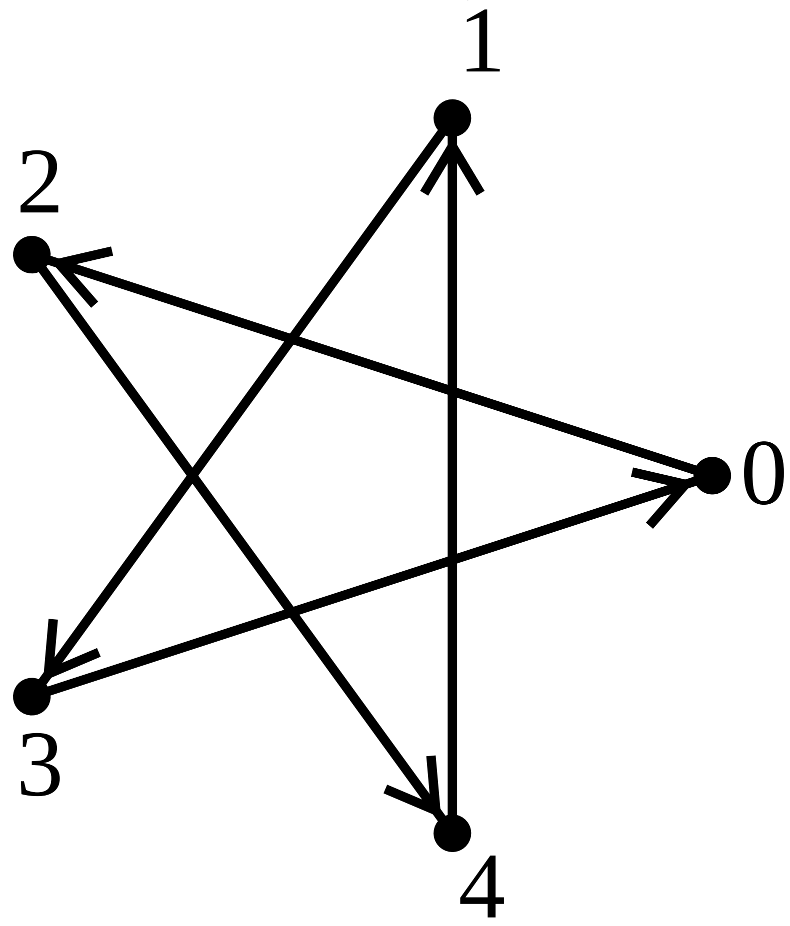
Étant donné un groupe G, et une partie S du groupe, on forme un graphe orienté Cay(G, S) dont

- les sommets sont les éléments du groupe
- les arcs dont les (x, xs) avec $x \in G$ et $s \in S$.

Pour éviter les boucles, on exigera que le neutre du groupe ne soit pas dans S.

Ce graphe est bien entendu régulier de degrés entrant et sortant $|S|$.

Voici un exemple, le groupe est $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, et $S = \{2\}$



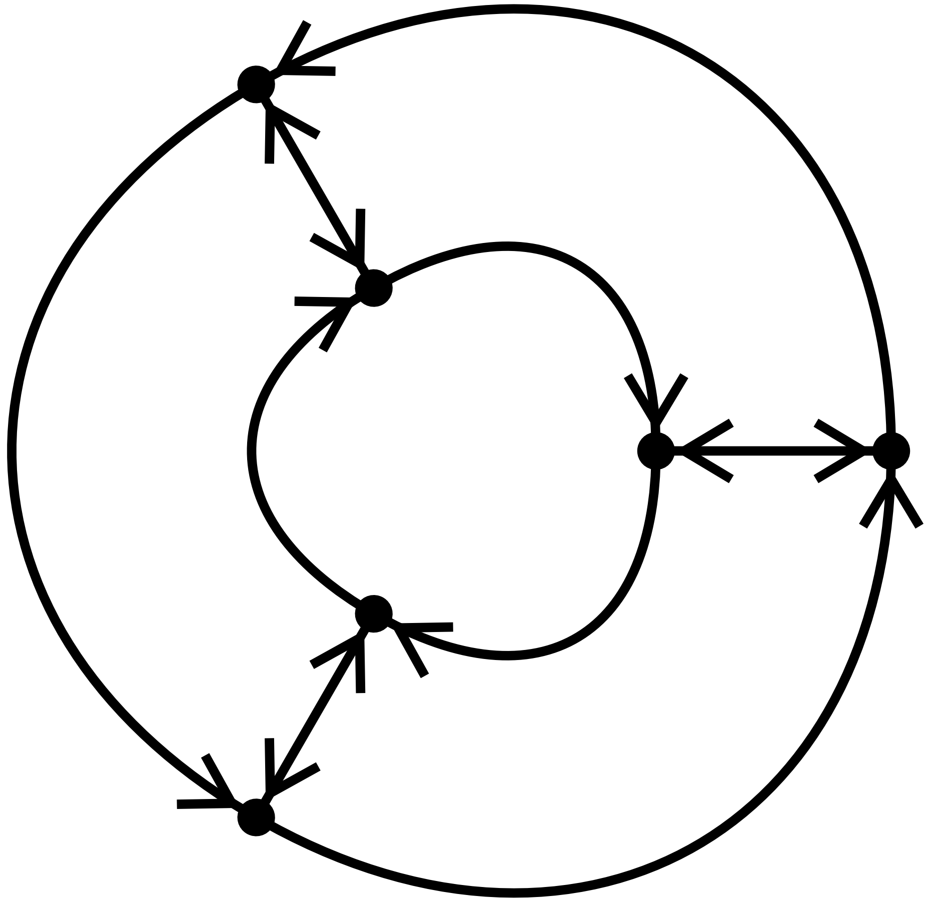
Dans cet exemple, si on remplace chaque arc par l'arc opposé, on trouve un graphe isomorphe.

Plus généralement, si on part d'un groupe commutatif, si on remplace chaque arc par l'arc opposé, on trouve un graphe isomorphe.

En effet, l'isomorphisme du groupe $\varphi : g \mapsto g^{-1}$ envoie Cay(G, S) sur Cay(G, S^{-1}) dont les arcs sont les opposés de ceux de Cay(G, S) . Car $\varphi(as) = \varphi(a)\varphi(s)$.

Mais cette preuve échoue si le graphe n'est pas commutatif, car alors $\varphi(as) = \varphi(s)\varphi(a)$ peut être différent de $\varphi(a)\varphi(s)$.

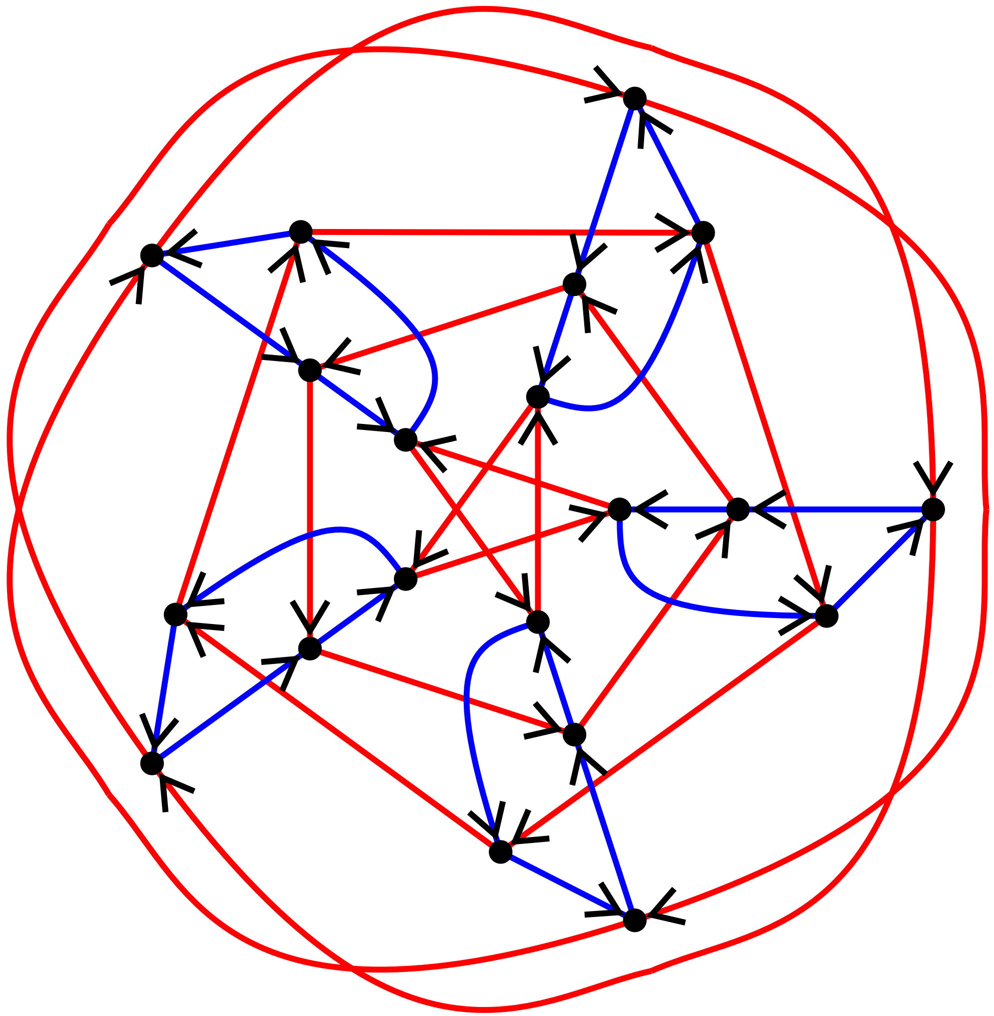
Cependant, des petits exemples donnent des graphes isomorphes. Par exemple $\mathfrak{S}_{\{a,b,c\}}$ avec $S = \{(ab),(abc)\}$ et $S^{-1} = \{(ab),(acb)\}$ qui donnent des graphes isomorphes



D'où la question,

$\boxed{\text{Y a-t-il des graphes de Cayley non isomorphes à leur opposé ?}}$

La réponse est oui. Un exemple à 20 sommets suit. Il est donné par le groupe affine sur la droite affine de $\mathbb{F}_5$. Ce groupe est formé des $x \mapsto 2^t x + s$ avec les générateurs $a = (x \mapsto 2x)$ d'ordre 4 et $b = (x \mapsto x+1)$ d'ordre 5. Noter que $a \circ b = b^2 \circ a = (x \mapsto 2x + 2)$.



Les cycles de longueur 4 permettent de distinguer deux sortes d'arcs a bleus et b rouges. Ce qui correspond aux relateurs a^4 et b^5.

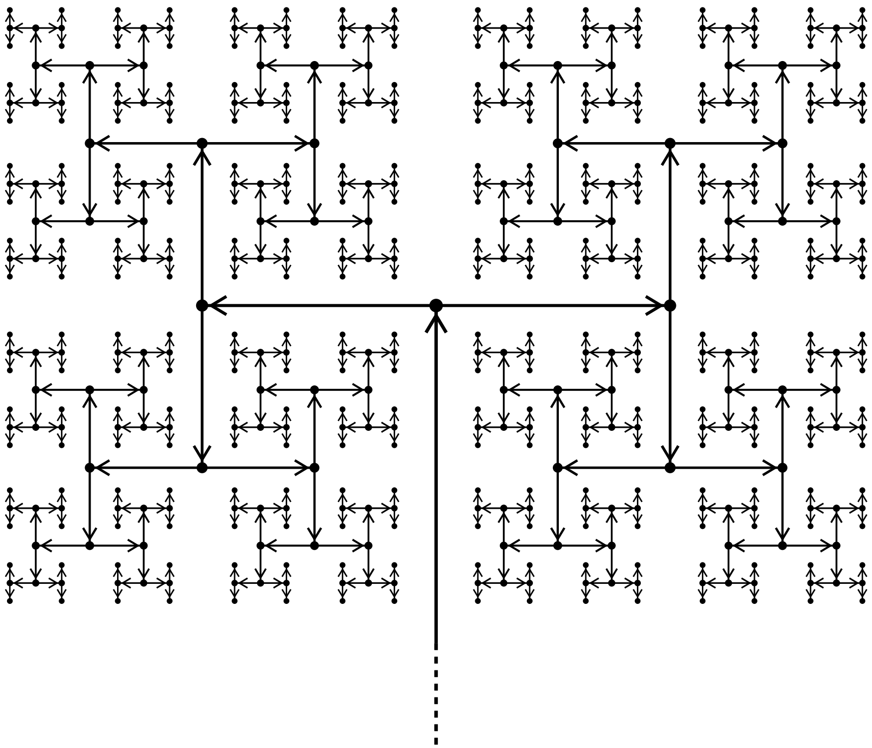
Les cycles de longueur 5 bicolores montrent le relateur $aba^{-1}b^{-2}$.

Mais si a^{-4} et b^{-5} sont des relateurs, $a^{-1}b^{-1}ab^2$ n'en est pas un. car $a^{-1}b^{-1}ab^2 = x \mapsto x + 4$.

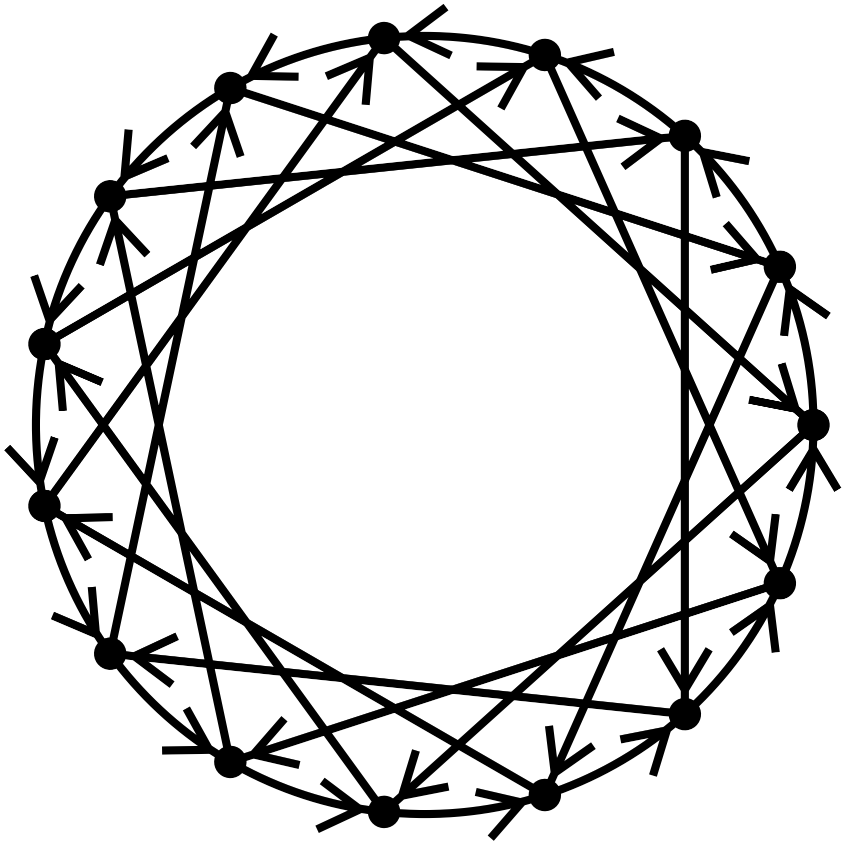
Donc le graphe opposé ne lui est pas isomorphe.

Toujours à propos de graphes, Yahia me demanda de trouver un graphe orienté vertex-transitif et edge -transitif *non trivial*.

Mais l'arbre infini avec un arc entrant et deux arcs sortants en chaque sommet était trop trivial.

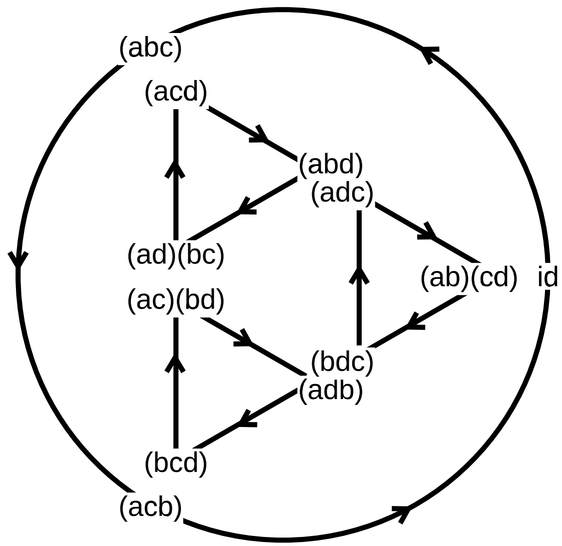


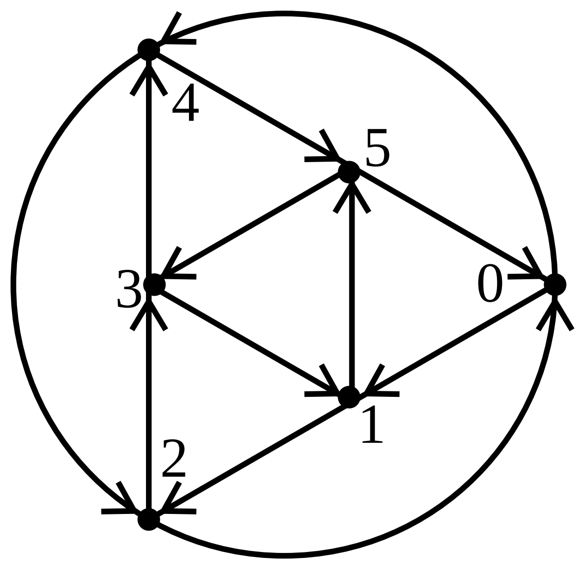
Mais le graphe de Cayley sur un groupe G avec un automorphisme Γ de G agissant transitivement sur S était trop trivial.



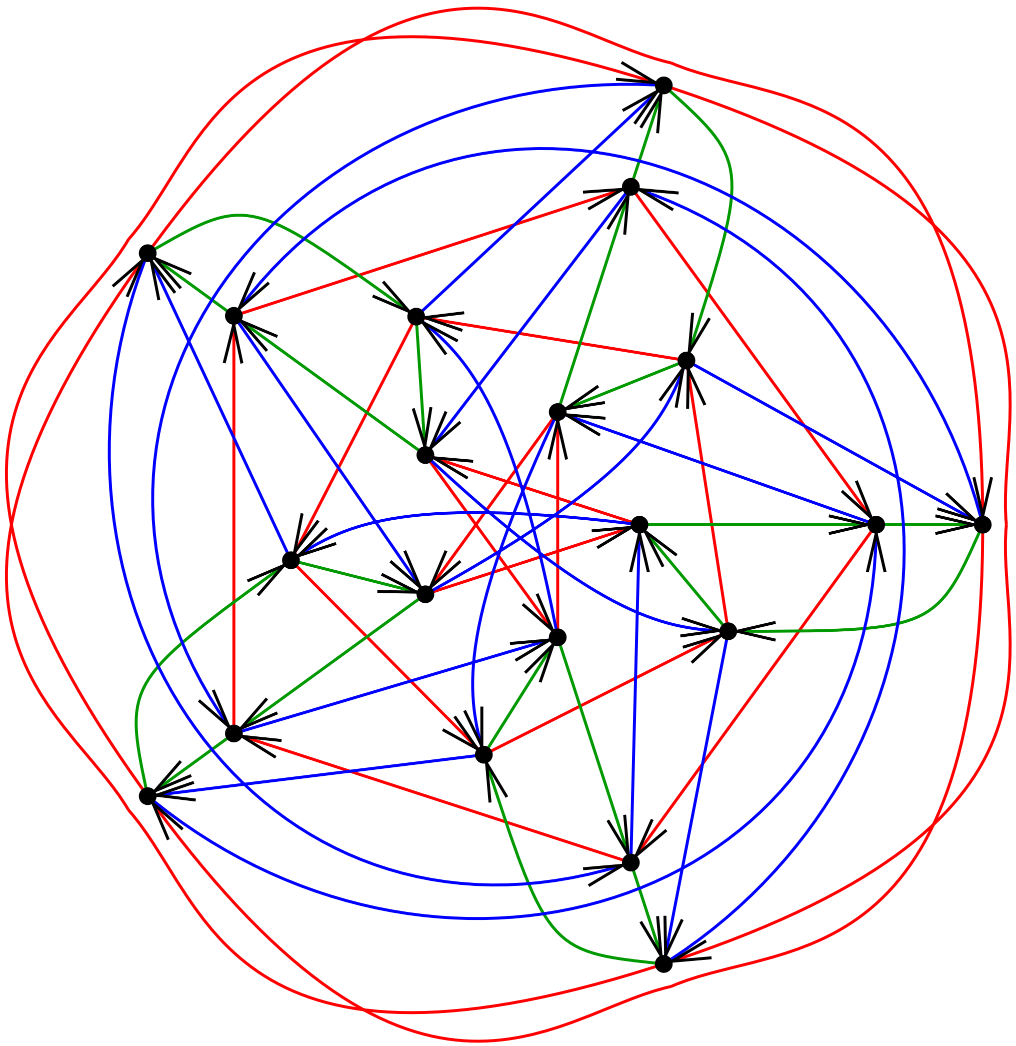
Ici le groupe est $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et le morphisme $x \mapsto 11x$, et $S = \{1, 11\}$.

Le graphe Cay$(\mathfrak{A}_{\{a,b,c,d\}}, \{(acb)\})/\langle(ab)(cd)\rangle$ est aussi Cay$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \{1, 4\})$.

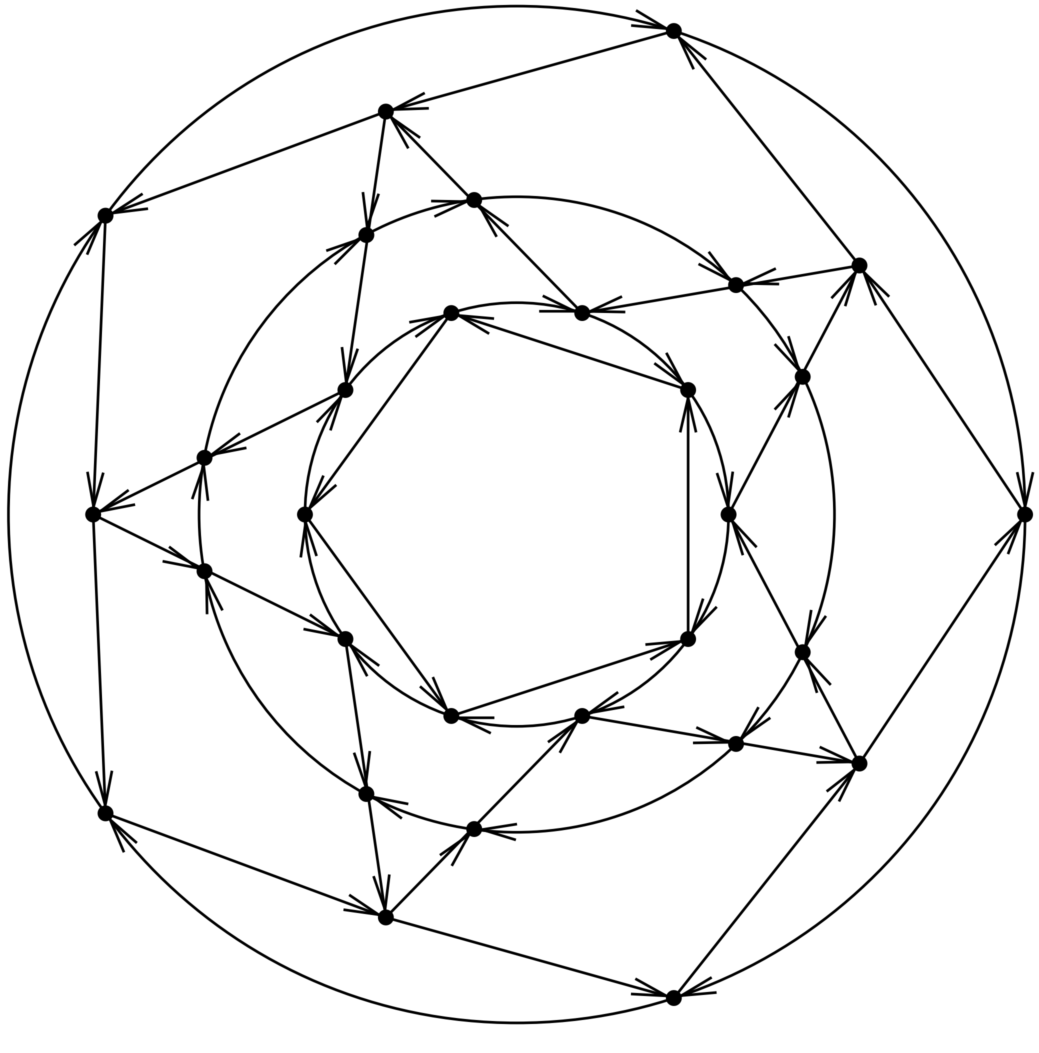




Le graphe Cay($\mathfrak{A}_{\{a,b,c,d,e\}}, \{(ade)\})/\langle(abc)\rangle$ qui a 20 sommets, de degré entrant et sortant 3, aurait peut-être convenu, C'est toutefois encore un graphe de Cayley, avec le groupe affine sur la droite affine de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et les arcs définis $x \mapsto x+1$, $x \mapsto 3x$, et $x \mapsto 2x+3$.



En revanche, Cay$(\mathfrak{A}_{\{a,b,c,d,e\}}, \{(ade)\})/\langle(bd)(ce)\rangle$ n'est pas un graphe de Cayley.



Reste tout de même la question

$\boxed{\text{Y a-t-il un graphe vertex-transitif et arc-transitif, fini, qui ne soit pas isomorphe à son opposé?}}$