CP200. Devoir surveillé d'algèbre de février 2015

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Barème indicatif : QC = 3 points ; Ex. 1 = 10 points ; Ex. 2 = 2 points ; Ex. 3 = 3 points ; Ex. 4 = 2 points.

Question de cours. Soient $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, $a \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-a)^m$ divise $P(X)$ si et seulement si $P^{(k)}(a) = 0$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq m-1$.

Exercice 1. Soient $A(X) = X^6 + X^5 + 5X^4 + 2X^3 + 5X^2 - X - 3$ et $B(X) = X^4 + 4X^2 - X + 6$.
(1) Calculer leur PGCD (unitaire) $D(X)$ par l'algorithme d'Euclide.
(2) Calculer A/D et B/D.
(3) Calculer le PPCM (unitaire) $M(X)$ de $A(X)$ et $B(X)$, en le développant complètement.
(4) Trouver deux polynômes $U_0, V_0 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U_0(X)A(X) + V_0(X)B(X) = D(X)$.
(5) Déterminer, aussi explicitement que possible, l'ensemble des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X)A(X) + V(X)B(X) = D(X).$$

Exercice 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 3. Soit $P(X) = X^{2015} - 3X^{1915} + 2X^{1815} - 1$. Déterminer le reste $R(X)$ de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 4. Justifier que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$P(X) = P_0(X^3) + P_1(X^3)X + P_2(X^3)X^2.$$

FIN