

CP200. Devoir surveillé d'algèbre de février 2016

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Barème indicatif : QC1 = 1,5 points ; QC2 = 1 point ; QC3 = 2,5 points ; Ex. 1 = 9 points ; Ex. 2 = 3 points ; Ex. 3 = 3 points.

Question de cours 1. Soient A, B deux polynômes non nuls dans $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tels que $\deg A \geq \deg B$.

1. Si $\deg A > \deg B$, déterminer $\deg(A + B)$.
2. Si $\deg A = \deg B$, à quelle condition a-t-on $\deg(A + B) = \deg A$? Et sinon, que peut-on dire de $\deg(A + B)$?

Question de cours 2. Énoncer le lemme d'Euclide dans $\mathbb{K}[X]$.

Question de cours 3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les $2m$ racines dans $\mathbb{C}$ de $X^{2m} + 1$: vérifier en particulier qu'elles sont toutes distinctes. En déduire la décomposition de $X^{2m} + 1$ en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire la décomposition $X^{2m} + 1$ en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1. Soient $A(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 7X^2 + 3$ et $B(X) = X^4 + X^3 + X^2 + 3X - 6$.

1. Calculer leur PGCD (unitaire) $D(X)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer A/D et B/D .
3. Calculer le PPCM (unitaire) $M(X)$ de $A(X)$ et $B(X)$, en le développant complètement.
4. Trouver deux polynômes $U_0, V_0 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U_0(X)A(X) + V_0(X)B(X) = D(X)$.
5. Déterminer, aussi explicitement que possible, l'ensemble des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X)A(X) + V(X)B(X) = D(X).$$

Exercice 2.

1. Quelles sont les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^2 - X + 1$?
2. Les restes de la division d'un polynôme P par $X - 1$ et par $X^2 - X + 1$ sont respectivement 2 et $X + 2$. Déterminer le reste de la division de P par $(X - 1)(X^2 - X + 1)$.

Exercice 3.

1. Soient un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et deux réels a, b avec $a \neq b$. Trouver le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$.
2. (Application) Quel est le reste de la division de X^n par $X^2 - 5X + 6$.

FIN